mcm – minimo comune multiplo

mcm — Prendo tutti i fattori, una sola volta e con l'esponente maggiore

È il più piccolo tra i multipli comuni di due o più numeri (o elementi).
Per calcolarlo, dobbiamo

- Scomporre i numeri considerati in fattori primi
- Moltiplicare fra loro i fattori primi comuni e non comuni, presi una sola volta con il massimo esponente

Esempio 1 Calcolare mcm tra 8, 12, 18	$8 = 2^3$ $12 = 2^2 \cdot 3 \rightarrow mcm = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ $18 = 2 \cdot 3^2$
Esempio 2 Calcolare mcm tra 15, 35, 20	$15 = 3 \cdot 5$ $35 = 5 \cdot 7 \rightarrow mcm = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ $20 = 2^2 \cdot 5$

Se due numeri sono primi tra loro, il m.c.m. è il loro prodotto

MCD – Massimo Comun Divisore

MCD — Prendo solo i fattori comuni e con l'esponente minimo

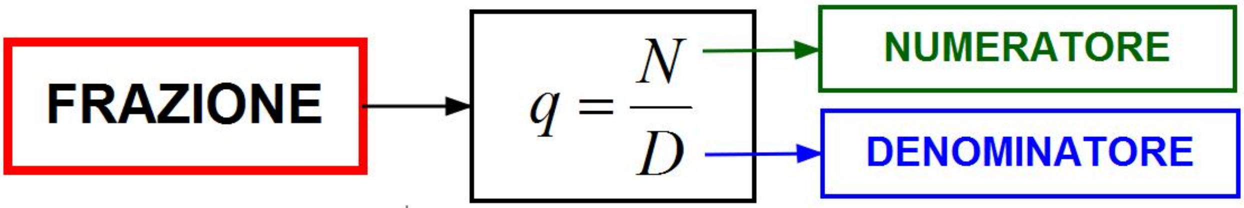
È il più grande tra i divisori comuni di due o più numeri.
Per calcolarlo, dobbiamo:

- Scomporre i numeri considerati in fattori primi
- Moltiplicare fra loro i fattori primi comuni, presi una sola volta con il minimo esponente

Esempio 1 Calcolare MCD tra 8, 12, 18	$8 = 2^3$ $12 = 2^2 \cdot 3 \rightarrow MCD = 2$ $18 = 2 \cdot 3^2$
Esempio 2 Calcolare MCD tra 15, 35, 20	$15 = 3 \cdot 5$ $35 = 5 \cdot 7 \rightarrow MCD = 5$ $20 = 2^2 \cdot 5$

Due o più numeri si dicono primi tra loro se hanno come MCD 1

Le frazioni



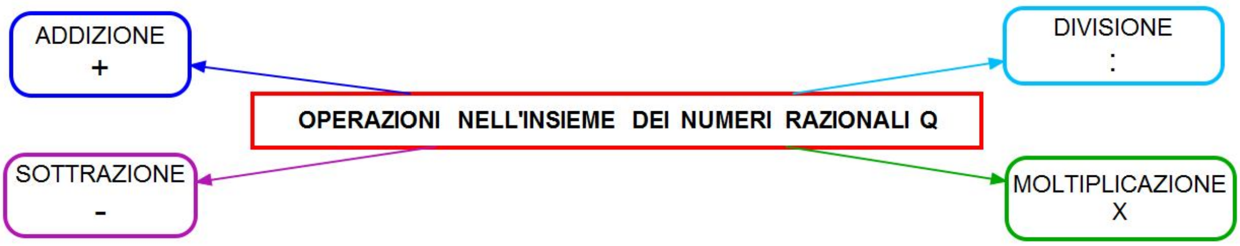
Sono operatori che restituiscono come risultato una grandezza omogenea a quella data e che consistono nella divisione tra un dividendo, detto numeratore (N) ed un divisore, detto denominatore (D).

Operazione	Regola	Esempio
Proprietà invariantiva	Divido o moltiplico per la stessa quantità numeratore e denominatore	$\frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}$
Riduzione allo stesso denominatore	Trovo l'mcm dei denominatori che diventa il nuovo denominatore. Lo divido per i vecchi e lo moltiplico per i rispettivi numeratori	$\frac{1}{3} \quad \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1\cdot(12:3)}{12} \quad \frac{3\cdot(12:4)}{12} \quad \frac{1\cdot 4}{12} \quad \frac{3\cdot 3}{12} \rightarrow \frac{4}{12} \quad \frac{9}{12}$
Addizione/ sottrazione	Si trasformano le frazioni in equivalenti, si mantiene lo stesso denominatore e si sommano (sottraggono) i numeratori	$\frac{1}{5} + \frac{3}{2} = \frac{1\cdot(10:5)+3\cdot(10:2)}{10} = \frac{1\cdot 2+3\cdot 5}{10} = \frac{17}{10}$
Moltiplicazione	Se possibile si semplifica a croce e poi si moltiplicano tra loro numeratore e denominatore	$\frac{10}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\overset{\boxed{5}}{\cancel{10}}}{\underset{\boxed{3}}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{\boxed{1}}{\cancel{3}}}{\underset{\boxed{2}}{\cancel{4}}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
Divisione	Si moltiplica la prima frazione per l'inversa della seconda.	$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$
Elevamento a potenza	Elevo sia N che D allo stesso indice della potenza. Se elevo con indice pari il risultato è sempre positivo, se elevo con indice dispari mantengo il segno della frazione	$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{3^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

Una frazione può essere **propria**, **impropria** o **apparente**

Frazione propria	$N < D$	$\frac{8}{11}$
Frazione impropria	$N > D$	$\frac{9}{4}$
Frazione apparente	N è uguale oppure è multiplo di D	$\frac{12}{3} = 4$

Espressioni in Q



Le espressioni in Q sono sequenze di operazioni algebriche comprendenti tutte le quattro operazioni fondamentali. I termini possono anche essere espressi sottoforma di frazioni o di potenze.

$$\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}\right]:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=$$

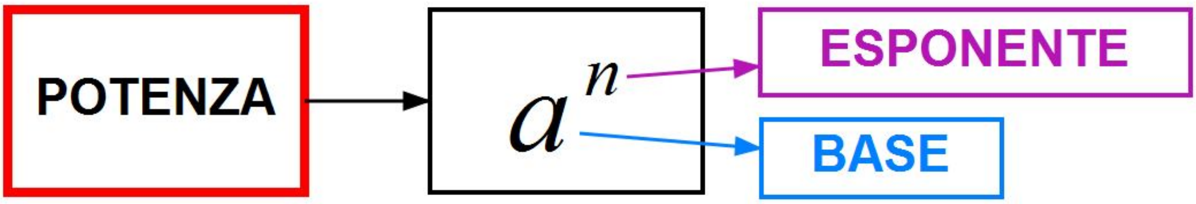
$$\left[\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1-8}{12}\right)\cdot\frac{3}{2}\right]:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=$$

$$\left[\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{3}{2}\right]\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$$

$$\left[\left(\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)\right]\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$$

$$-\frac{4}{8}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$$

Potenze e loro proprietà



Proprietà	**Regola**	**Esempio**
Prodotto tra potenze con egual base	Mantengo la stessa base e sommo gli esponenti $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 =$ $= 2^{3+4} = 2^7 =$ $= 128$
Rapporto tra potenze con egual base	Mantengo la stessa base e sottraggo gli esponenti $a^n : a^m = a^n / a^m = a^{n-m}$	$5^3 : 5^4 =$ $= 5^{3-4} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$
Prodotto tra potenze con egual esponente	Moltiplico le basi e conservo l'esponente $a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 =$ $= 6^2 = 36$
Quoziente tra potenze con egual esponente	Divido le basi e conservo l'esponente $a^n : b^n = (a/b)^n$	$12^3 : 6^3 = \left(\frac{12}{6}\right)^3 =$ $= 2^3 = 8$
Elevamento a potenza	Mantengo la stessa base e moltiplico tra loro gli esponenti $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^4 =$ $= 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
Potenze ad esponente negativo	Inverto numeratore con denominatore e scrivo l'esponente con segno positivo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
Potenze ad esponente frazionario	Il denominatore dell'esponente è l'indice della radice $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} =$ $= \sqrt[3]{2^6} = 2^2$
Potenze con esponente pari a zero	Qualsiasi numero elevato alla 0 da come risultato 1	$(-5)^0 = 1 \quad (2)^0 = 1$

Esempio

$(-3)^2 - (-3)^0 - [(-2)^{13} \cdot (-2)^9] : [(-2)^6]^3 =$

$= 9 - 1 - [(-2)^{22}] : (-2)^{18} =$

$= 8 - (-2)^4 =$

$= 8 - 16 =$

$= -8$

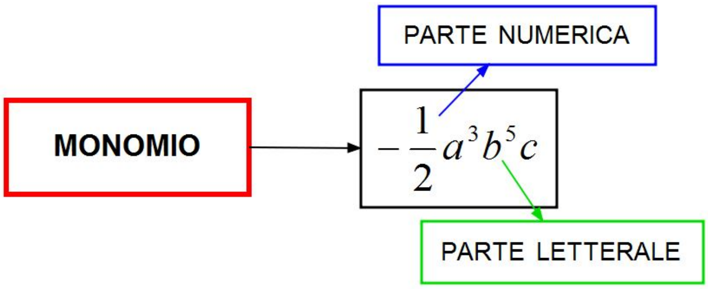
NB: devo rispettare le seguenti priorità tra le operazioni:

- Svolgere i calcoli tra le parentesi
- Elevare a potenza
- Moltiplicare e dividere
- Sommare e sottrarre

III - Monomi e polinomi

Monomi

Un monomio è un'espressione letterale formata da lettere e numeri moltiplicati fra loro. In un monomio non vi sono lettere al denominatore.



Caratteristiche dei monomi

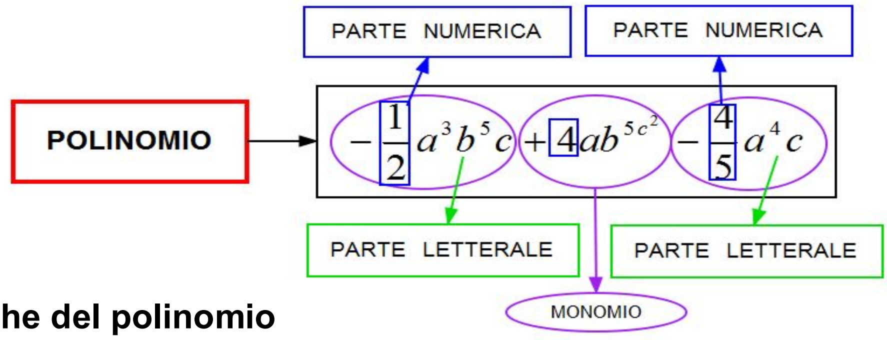
Coefficiente: parte numerica	$-\frac{1}{2}$
Parte letterale: lettere	a^3b^5c
Grado complessivo del monomio: somma di tutti gli esponenti delle lettere	$g = 3+5+1 = 9$
Grado del monomio rispetto alla lettera: esponente della lettera	$g(a)=3 \quad g(b)=5 \quad g(c)=1$
Monomi simili: monomi con la stessa parte letterale, esponenti compresi	$-\frac{1}{2}a^3b^5c \qquad 7a^3b^5c$

Operazioni con i monomi

Operazione	**Definizione**	**Esempio**
Addizione e sottrazione	Se i monomi sono simili il risultato è un monomio con la stessa parte letteraria e con coefficiente la somma (differenza) dei coefficienti. se i monomi non sono simili il risultato non può essere semplificato	$\frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{2}a^2b = $ $= \frac{1-3}{2}a^2b = -a^2b$
Moltiplicazione	Il prodotto è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali	$3a^3b \cdot 7a^4 =$ $= 3\cdot 7a^{3+4}b = 21a^7b$
Divisione	Se il primo monomio è divisibile per il secondo, il quoziente è un monomio che ha per coefficiente il rapporto tra i coefficienti e per parte letterale il rapporto tra le parti letterali	$12a^4b^2 : 10a^2b =$ $= \frac{12}{10}a^{4-2}b^{2-1} = \frac{6}{5}a^2b$
Potenza	Si applicano le proprietà delle potenze a parte numerica e a parte letterale	$\left(\frac{2}{3}a^4b\right)^3 =$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(a^4\right)^3 \cdot b^3 = \frac{8}{27}a^{12}b^3$
mcm	È un monomio che ha per coefficiente l'mcm dei coefficienti e per parte letterale il prodotto di tutte le lettere, prese una volta sola con il massimo esponente	$3a^3b^5c\ ;\ 6ac^4$ $mcm = 6a^3b^5c^4$
MCD	È un monomio che ha per coefficiente l'MCD dei coefficienti e per parte letterale solo le lettere comuni, prese una volta sola con il minimo esponente	$3a^3b^5c\ ;\ 6ac^4$ $MCD = 3ac$

Polinomi

Un polinomio è la somma algebrica di due o più monomi, detti termini del polinomio.



Caratteristiche del polinomio

(ci riferiamo, nella colonna di destra, al polinomio $\frac{1}{2}a^3b^5c+4ab^5c^2-\frac{4}{5}a^4c$)

Grado rispetto ad una lettera: massimo dei gradi di una lettera in un polinomio	$g(a)=4 \quad g(b)=5 \quad g(c)=2$
Grado complessivo del polinomio: massimo grado di uno dei suoi termini	$g(P)=9$ grado di $\frac{1}{2}a^3b^5c$

Un polinomio può essere:

Omogeneo: se i termini sono tutti dello stesso grado	$2a^2b-3b^3-\frac{2}{5}ab^2$
Completo: (rispetto ad una lettera) se i termini presenti contengono tutte le potenze della lettera dal grado massimo allo zero	$3x+4x^2-4+\frac{1}{2}x^3$
Ordinato: se i termini sono ordinati in modo che gli esponenti crescano o decrescono	$2y^3-5y^2+12y+3$

Operazioni tra polinomi

Operazione	**Definizione**	**Esempio**
Somma di polinomi	Scrivo i due polinomi tra parentesi interponendo tra essi il segno +. Dopo ciò sommo tra loro i monomi simili	$(m^3+n^3)+(m^3+mn-n^3)=$ $=2m^3+mn$
Differenza di polinomi	Scrivo i due polinomi tra parentesi interponendo tra essi il segno -. Dopo ciò sommo tra loro i monomi simili	$(m^3+n^3)-(m^3+mn-n^3)=$ $=2n^3-mn$
Prodotto di un monomio per un polinomio	Moltiplico il monomio per tutti i termini del polinomio	$-2x^2(4x^3+x-3)=$ $=-8x^5-2x^3+6x^2$
Divisione di un polinomio per un monomio	Divido tutti i termini del polinomio per il monomio	$(-8x^5-2x^3+6x^2):(-2x^2)=$ $4x^3+x-3$
Prodotto tra due polinomi	Moltiplico tutti i termini del primo binomio per tutti quelli del secondo.	$(3x-5)(x+2)=$ $3x^2+6x-5x-10=$ $3x^2+x-10$
Divisione tra due polinomi	Con il metodo della divisione latina (in colonna), eseguo il quoziente, riportando anche l'eventuale resto.	$(-2a^4+a^3-1):(a^2+1)=$ $-2a^2+a+2 \quad R \quad -a-3$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

PRODOTTO EGUAL BASE

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

QUOZIENTE EGUAL BASE

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

PRODOTTO EGUAL ESPONENTE

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

QUOZIENTE EGUAL ESPONENTE

$$a^n : b^n = (a/b)^n$$

POTENZA DI POTENZA

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

ESPONENTE NEGATIVO

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ESPONENTE FRAZIONARIO

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

PRODOTTI NOTEVOLI

SOMMA DI UN BINOMIO PER LA SUA DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

QUADRATO DI BINOMIO

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

CUBO DI BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

QUADRATO DI TRINOMIO

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$