ALGEBRA BOOLEANA – ESERCIZI BASE

soluzioni

Rispondere alle seguenti domande

1) **Esprimere a parole (senza tavola di verità) l'utilizzo delle funzioni logiche AND, OR, EXOR, NAND, NOR e EXNOR.**

AND: è vera se tutti i suoi operandi sono veri

OR: è vera se almeno uno dei suoi operandi è vero

EXOR: è vero se i suoi due operandi sono diversi. Se ci sono più di due operandi: è vero se il numero di 1 è dispari

NAND: è vero se almeno uno dei suoi operandi è falso

NOR: è vero se tutti i suoi operandi sono falsi

EXNOR: è vero se i suoi due operandi sono uguali. Se ci sono più di due operandi: è vero se il numero di 1 è pari

2) **Illustrare il teorema di dualità**

Il duale si una espressione si ottiene:

1) Negando le variabili
2) Trasformando AND e OR e viceversa
3) Trasformando 1 in 0 e viceversa

Il duale di ***a** OR NOT**b** AND **c*** sarà dunque *NOT**a** AND (**b** OR NOT**c**)*

È importante notare come si mantiene l'ordine di svolgimento delle operazioni: se prima c'era un AND e si svolgeva prima l'operazione tra b e c, anche dopo la prima operazione da svolgere resta quella tra b e c (in questo caso uso le parentesi in quanto l'operazione è diventata un OR)

Il **teorema di dualità** dice che **se è vera una espressione, è vera anche il duale di quella espressione** (ovvero eseguo il duale sia della parte a destra che a sinistra dell'espressione)

3) Illustrare i due teoremi di De Morgan. A quale operazione logica sono riferiti?

I due teoremi di De Morgan sono riferiti alle operazioni NAND e NOR e sono in grado di trasformare le operazioni di AND in OR e viceversa:

primo teorema (NAND)

a** NAND **b** = NOT**a** OR NOT**b oppure scritto come: *NOT(**a** AND **b**) = NOT**a** OR NOT**b***

Secondo teorema (NOR)

a** NOR **b** = NOT**a** AND NOT**b oppure scritto come: *NOT(**a** OR **b**) = NOT**a** AND NOT**b***

4) Tramuta in equazione logica la frase: se sai suonare la chitarra o il basso e se sei libero giovedì e martedì allora puoi suonare con noi!

Chiamiamo ***r*** il risultato finale:

r = vero → poi suonare con la band r = falso → non puoi suonare con la band

Servono 4 variabili:

c: saper suonare la chitarra (vero→ sai suonarla / falso → non sai suonarla)

b: saper suonare il basso (vero→ sai suonarla / falso → non sai suonarlo)

g: essere libero di giovedì (vero → sei libero / falso → sei occupato)

m: essere libero di martedì (vero → sei libero / falso → sei occupato)

La preposizione logica descritta nel testo si può esprimere con la seguente espressione booleana

r *= (**c** OR **b**) AND **g** AND **m***

Fare le tabelle di verità intermedie e finale della seguente espressione logica (non usare semplificazioni)

z = NOT**a** AND **b** OR NOT**b** AND **a**

a	**b**	(1) NOT**a** AND **b**	(2) NOT**b** AND **a**	**z** = **(1)** OR **(2)**
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

z = (**a** XOR **b**) AND NOT**c** OR (**c** XOR **b**)

a	**b**	**c**	(1) = **a** XOR **b**	(2) = (1) AND NOT**c**	(3) = **c** XOR **b**	Z = **(2)** OR **(3)**
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

z = ((a NAND c) AND c) XOR (a OR c AND NOTc)

Qui possiamo notare che per la proprietà (assioma) della complementazione

c** AND NOT**c** = **0

A questo punto resta *a OR 0* che per la proprietà del numero neutro: ***a** OR **0** = **a***

L'espressione diventa quindi:

z = ((a NAND c) AND c) XOR (a)

a	**b**	**c**	(1) = **a** AND **c**	(1) = **a** NAND **c**	(2) = **(1)** AND **c**	z = **(2)** XOR **a**
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1

z = NOT***a*** AND (***c*** OR (***a*** NAND NOT***b***))

a	**b**	**c**	(1) = **a** AND NOT**b** (temporaneo per NAND)	(1) = **a** NAND NOT**b** **= NOT(1)**	(2) = **c** OR **(1)**	z = NOT**a** AND **(2)**
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

z = NOT(***a*** AND NOT***b***) XOR ((***c*** NOR ***b***) AND NOT***a***)

a	b	c	(1) = **a** AND NOT**b**	(2) = NOT **(1)**	(3) = **c** NOR **b**	(4) = **(3)** AND NOT**a**	z = **(2)** XOR **(4)**
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1

Semplificare le precedenti espressioni boolene utilizzando proprietà assiomi e teoremi visti a lezione (in particolare i due teoremi di DeMorgan).

Accertarsi (usando i risultati precedenti) della correttezza delle semplificazioni.

Semplifichiamo la **penultima** espressione di cui abbiamo calcolato la tabella, indicando esplicitamente quali passaggi saranno eseguiti.

z = NOT***a*** AND (***c*** OR (***a*** NAND NOT***b***))

iniziamo eseguendo il **primo teorema di De Morgan** sulla parte *(**a** NAND NOT **b**)*

***z** = NOT**a** AND (**c** OR NOT**a** OR **b**)*

ora possiamo usare la **legge (teorema) di assorbimento** in quanto abbiamo *NOT**a*** sia dentro la parentesi con gli OR che fuori legato ad un AND

quindi la variabile NOTa, assorbe tutte le altre allo stesso modo in cui **a** AND (**a** OR **c**) = **a**

dunque

z** = NOT**a

Osservando la tabella di verità creata in precedenza possiamo accertarci della correttezza della nostra semplificazione

Semplificare la seguente espressione UN PASSSO ALLA VOLTA, spiegando quale proprietà o assioma si sta utilizzando. Qual è il risultato finale?

z = (**a** OR (**a** AND (**b** OR **1**))) AND (**a** OR **b**)

iniziamo con la proprietà dell'**elemento neutro** nella parte *(**b** OR **1**) =* ***b***

***z** = (**a** OR (**a** AND **b**)) AND (**a** OR **b**)*

a questo punto possiamo procedere con il **legge di assorbimento** in ***a** OR (**a** AND **b**) =* ***a***

quindi:

z** =* ***a *AND (**a** OR **b**)*

qui possimo usare nuovamente la **legge di assorbimento:**

z = a

Proviamo ora un ulteriore esempio:

***z** = NOT(**a** AND **b**) OR (NOT**b** AND (**a** OR (NOT**b** AND (**a** OR NOT**a**))))*

iniziamo notando, in fondo all'espressione, un $\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$ per l'**assioma di complementazione** (o complemento)

***z** = NOT(**a** AND **b**) OR (NOT**b** AND (**a** OR (NOT**b** AND (**1**))))*

Ora per la proprietà del **numero neutro** *(NOT**b** AND **1**) = NOT**b***

***z** = NOT(**a** AND **b**) OR (NOT**b** AND (**a** OR NOT**b**))*

Ora possiamo usare il **teorema di assorbimento** tra il NOT**b** e la variabile **a**

***z** = NOT(**a** AND **b**) OR (NOT**b**)*

La prima parte dell'espressione è un NAND e può essere cambiata con il **teorema di De Morgan**

z** = NOT**a** OR NOT**b** OR NOT**b

Infine usiamo l'**idempotenza** (proprietà di potenza identica) del NOT**b** e otteniamo il risultato finale

z** = NOT**a** OR NOT**b