Algebra di Boole

Proprietà, assiomi e teoremi

© Prof. Giacomo Pastorino

Proprietà Commutativa

Rispetto alla somma logica:

$A + B = B + A$

Rispetto al prodotto logico:

$A \cdot B = B \cdot A$

Proprietà associativa

Rispetto alla somma logica:

$A + (B + C) = (A + B) + C$

Rispetto al prodotto logico:

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Proprietà distributiva

Rispetto alla somma logica:

$A + BC = (A + B) \cdot (A + C)$

Rispetto al prodotto logico:

$A \cdot (B + C) = AB + AC$

Assiomi

Assorbimento o annullamento

$A \cdot 0 = 0$

$A + 1 = 1$

C***ompletamentazione***

$A \cdot notA = 0$

$A + notA = 1$

Assiomi

Idempotenza

$A \cdot A = A$

$A + A = A$

Nagazione

se $A = B$ allora $\text{not}A = \text{not}B$

Doppia negazione

$\text{not}(\text{not}A) = A$

Principio di dualità

Data un’espressione Y, si chiama espressione duale di Y quella che si ottiene con le seguenti sostituzioni:

- **AND** si sostituisce con **OR** e viceversa
- **0** si sostituisce con **1** e viceversa
- Ogni variabile si sostituisce con il suo complemento e viceversa

Esempio:

$Y = A + (\text{not}B \cdot C)$

$\text{not}Y = \text{not}A \cdot (B + \text{not}C)$

Primo teorema di De Morgan

not(A **· B) = notA + notB**

Dimostrazione:

Y = notA + notB

Assioma della dualità → notY = A · B

Assioma della negazione → not(notY) = not(A · B)

togliamo la doppia negazione → Y = not(A · B)

Eguagliando le due Y (finale e iniziale) troviamo:

not(A · B) = notA + notB

Se usiamo di nuovo il principio di negazione da tutte e due le parti possiamo vedere come l'AND si trasforma in OR…

A · B = not(notA + notB)

Secondo teorema di De Morgan

***not(A* + B) = notA · notB**

Dimostrazione:

Y = notA · notB

Assioma della dualità → notY = A + B

Assioma della negazione → not(notY) = not(A + B)

togliamo la doppia negazione → Y = not(A + B)

Eguagliando le due Y (finale e iniziale) troviamo:

not(A + B) = notA · notB

Se usiamo di nuovo il principio di negazione da tutte e due le parti possiamo vedere come l'OR si trasforma in AND…

A + B = not(notA · notB)