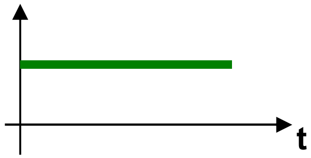
RISPOSTA NEL DOMINIO DEL TEMPO

Nel dominio del tempo le variabili sono esaminate secondo la loro evoluzione temporale.

Normalmente si esamina la risposta del sistema a un *segnale di prova canonico*, cioè si sollecita il sistema con un:

- ***ingresso a gradino***



- ***ingresso a impulso***

NB: non sempre è possibile ricavare sperimentalmente la risposta del sistema all'impulso, in quanto l'impulso deve fornire l'energia sufficiente al sistema per provocarne la risposta.

Transitorio e Regime

La risposta di un sistema può essere scomposta in *componente transitoria* $y_T(t)$ e *componente di regime* $y_R(t)$:

$$y(t) = y_T(t) + y_R(t)$$

La componente transitoria è formata da tutti quei termini che si annullano per il tempo che tende a infinito.

La componente di regime è formata da tutti quei termini che invece non si annullano, cioè:

$$y_R(t) = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

NB: nei sistemi lineari la componente di regime assume la stessa forma d'onda dell'ingresso.

Esempio

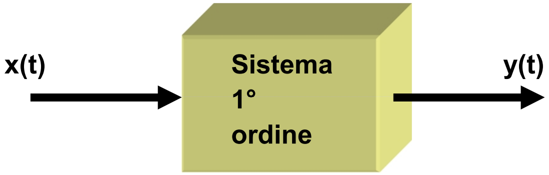
Risposta di un *circuito RL* ad un gradino di tensione: $i(t) = \frac{E}{R}\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + i(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

***Componente transitoria*:** $i_T(t) = -\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i(0)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

***Componente transitoria*:** $i_R(t) = \frac{E}{R}$

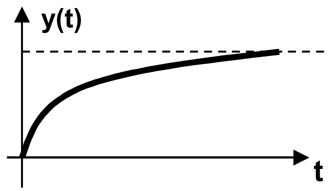
SISTEMI DEL 1° ORDINE

Un sistema del 1° ordine è un sistema con un solo accumulatore di energia. Ossia un sistema il cui comportamento è descrivibile con una sola variabile di stato.

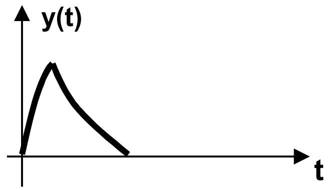


NB: si assume come uscita del sistema la variabile di stato y(t)

Risposta al gradino:

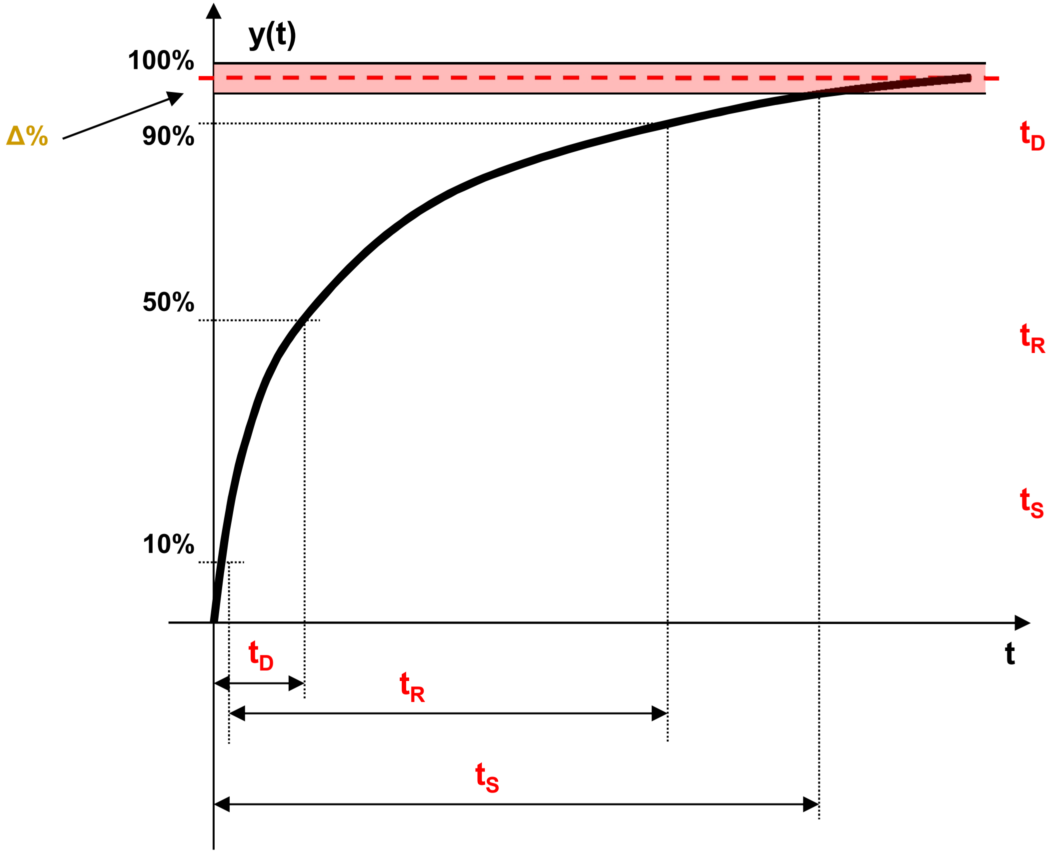


Risposta all'impulso:



Tempi caratteristici

Le prestazioni di un sistema (*non solo del 1° ordine*) nel dominio del tempo sono spesso fornite con l'indicazione di alcuni tempi caratteristici definiti nella *risposta al gradino*.



t_D : tempo di ritardo (*delay time*)

Fornisce l'indicazione della prontezza di risposta del sistema

t_R : tempo di salita (*rise time*)

Fornisce l'indicazione della accelerazione di y(t)

t_S : tempo di assestamento (*setting time*)

Fornisce l'indicazione della durata del transitorio. Corrisponde al tempo impiegato dalla risposta y(t) a portarsi entro la fascia ± Δ%

Modello

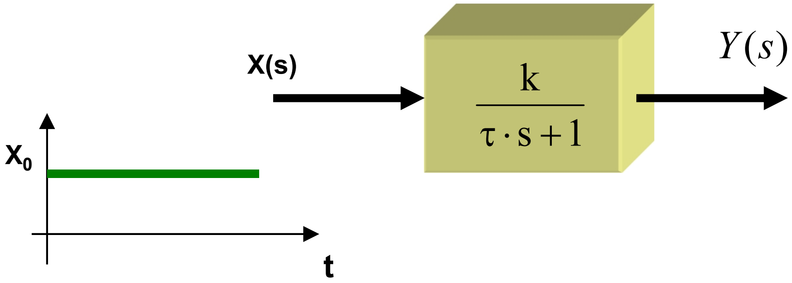
Nel dominio del tempo il modello matematico di un sistema continuo è spesso fornito mediante la rappresentazione ingresso/uscita, cioè dalle sue equazioni differenziali.

Per un sistema del 1° ordine:

x(t) → $$\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t)$$ → **y(t)**

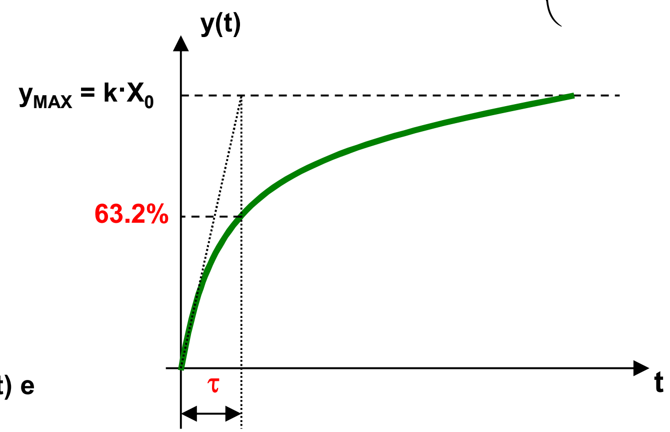
<u>NB</u>: con y(t) variabile di stato

E' comodo studiare la risposta nel tempo ricorrendo anche alla rappresentazione ingresso/uscita nel *dominio di Laplace*, cioè alla schematizzazione del sistema con blocchi e relative funzioni di trasferimento:



$$Y(s) = \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot X(s)$$

$$y(t) = k \cdot X_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



NB: Esaminando la risposta nel tempo, è possibile stimare i parametri della funzione di trasferimento:

$$k = \frac{y_{MAX}}{X_0}$$

τ **: la si stima individuando il 63.2% del valore finale di y(t) e leggendo il tempo corrispondente.**

SISTEMI DEL 2° ORDINE

Un sistema del 2° è un sistema il cui comportamento è descritto da due variabili di stato, sono cioè sistemi con due accumulatori di energia:

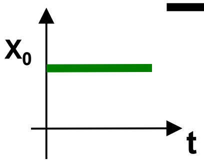
$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{s^2 + a_1 \cdot s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

NB: sistema del 2° ordine *senza zeri.*

La risposta nel tempo dipende dai poli della funzione di trasferimento. Per meglio descriverle si introducono due parametri:

- **δ = *coefficiente di smorzamento***
- **ω_n = *pulsazione naturale* [rad/s]**

E si eseguono le seguenti sostituzioni: $a_1 = 2 \cdot \delta \cdot \omega_n$ $a_0 = \omega_n^2$



$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{X_0}{s} \cdot \frac{k}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Polo introdotto dall'ingresso

Poli propri del sistema

La risposta al gradino presenta un transitorio che dipende solo dai *poli della funzione di trasferimento.*

I tre poli di Y(s) risultano:

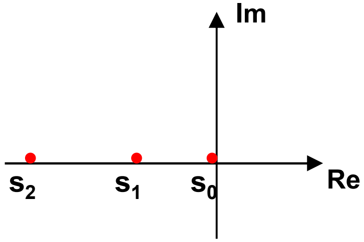
$$s_0 = 0$$
$$s_1 = -\delta\omega_n + \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$
$$s_2 = -\delta\omega_n - \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

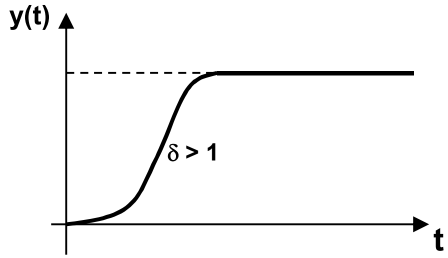
<u>NB</u>: s_1 e s_2 sono i poli della funzione di trasferimento; possono essere reali o complessi in funzione di δ.

Ipotesi: $\boxed{\delta > 1}$

I poli della fdt sono *reali distinti*

$$y(t) = K_0 + K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

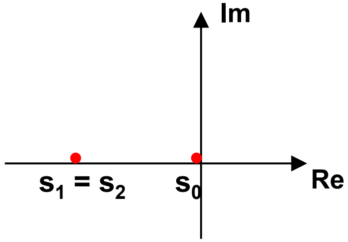


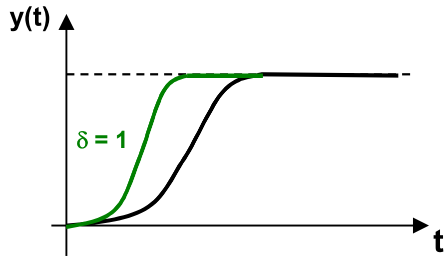


Ipotesi: $\boxed{\delta = 1}$

I poli sono *reali coincidenti*

$$y(t) = K_0 + K \cdot t \cdot e^{s \cdot t}$$





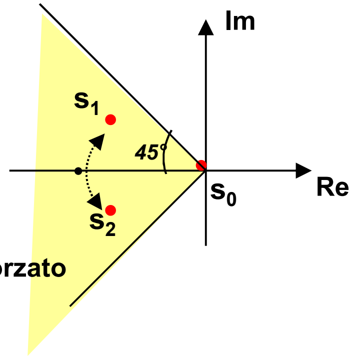
Ipotesi: $\boxed{\delta < 1}$ **I poli sono *complessi coniugati***

$$s_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

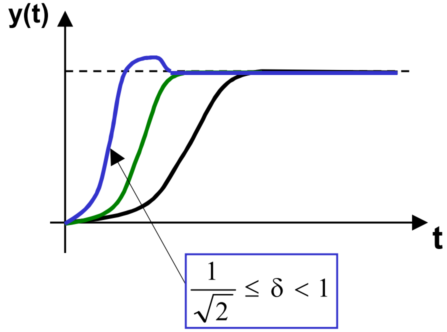
$$y(t) = K_0 + 2\cdot K\cdot e^{\sigma\cdot t}\cdot\cos(\omega t + \theta)$$

<u>NB</u>: ω_n rappresenta la pulsazione alla quale oscillerebbe la risposta del sistema nel caso di assenza di smorzamento (δ = 0).

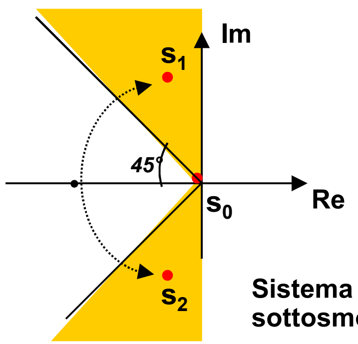
Ipotesi: $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \delta < 1}$



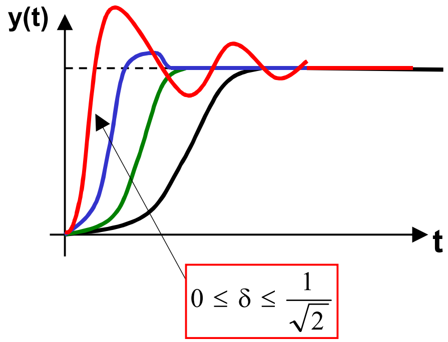
Sistema sovrasmorzato



Ipotesi: $\boxed{0 \le \delta \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$



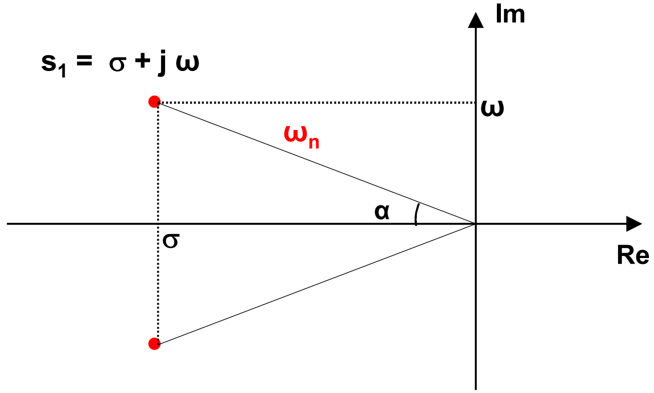
Sistema sottosmorzato



Relazioni tra i *poli della funzione di trasferimento* e i parametri δ e ω_n

Dall'espressione dei poli della funzione di trasferimento:

$$s_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$



risultano le seguenti corrispondenze:

$$\sigma = -\delta\omega_n$$

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

$$|s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = \omega_n$$

Da cui: **(prescindendo dal segno di δ)**

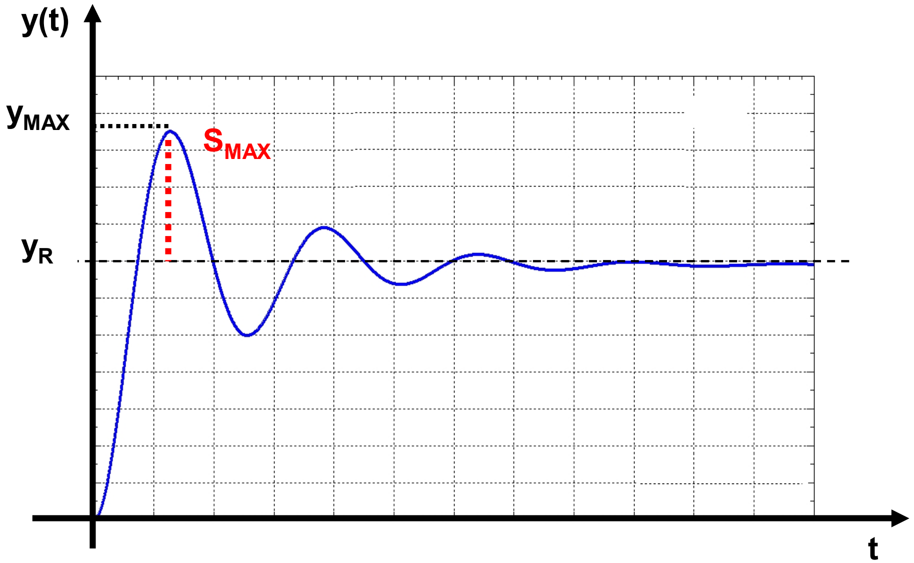
$$\boxed{\delta = \frac{|-\sigma|}{\omega_n}} = \cos(\alpha)$$

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\delta^2}}, \quad \text{sotituendo } \delta = \frac{\sigma}{\omega_n},$$

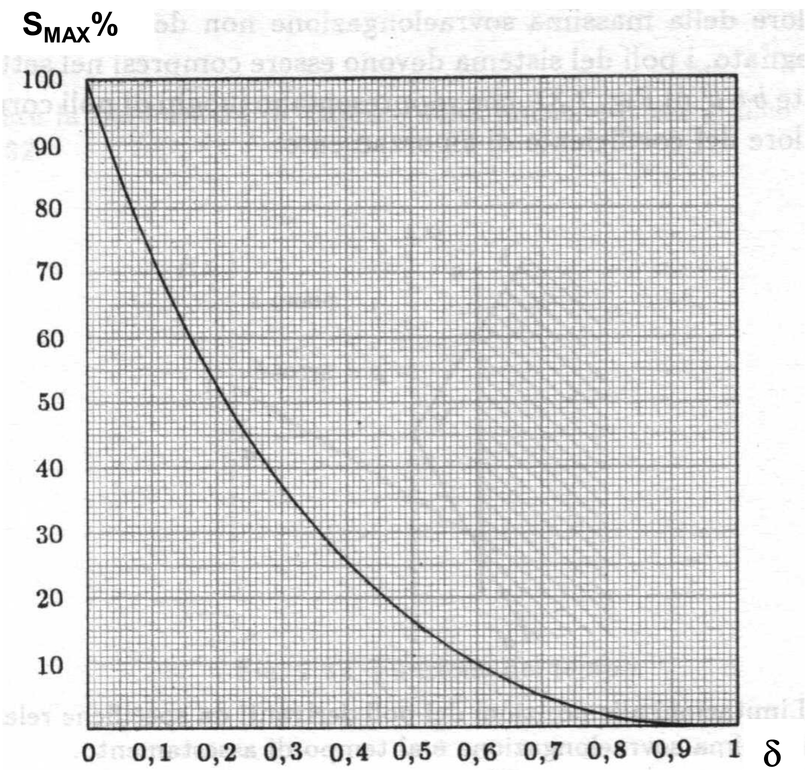
dopo alcuni calcoli risulta : $\boxed{\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$

Relazione tra massima sovraelongazione e δ

Nei sistemi del 2° ordine *senza zeri*, con poli complessi coniugati (δ < 1), la massima sovraelongazione S_{MAX} dipende solo dal coefficiente di smorzamento δ :

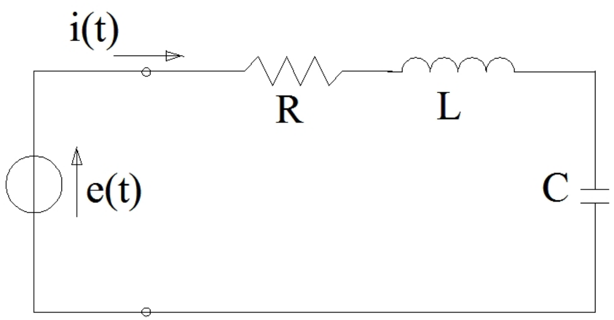


$$S_{MAX}\% = \frac{y_{MAX} - y_R}{y_R} \cdot 100$$



<u>Esercizio</u>: Circuito RLC serie, <u>calcolo</u> δ e ω_n in funzione dei parametri del circuito

La tensione e(t) rappresenta l'ingresso. Come uscita è assunta la tensione sul condensatore.



Si deve manipolare la funzione di trasferimento in modo da porre uguale a 1 il coefficiente del termine con s^2:

$$V_c(s) = E(s) \cdot \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L} \cdot s + \frac{1}{LC}}$$

Osservando la funzione di traferimento, risulta:

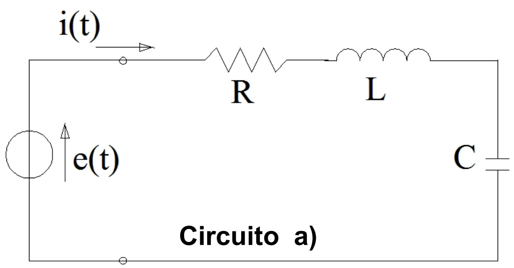
$$\frac{R}{L} = 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \qquad \frac{1}{LC} = \omega_n^2$$

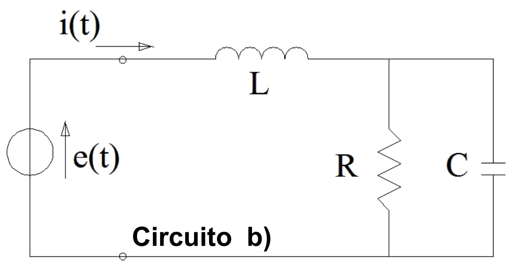
Da cui:

$$\boxed{\delta = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}} \qquad \boxed{\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

<u>NB</u>: un aumento di R comporta un aumento di δ, mentre non influisce su ω_n.

<u>Esercitazione 1</u>: Esaminare il diverso ruolo esercitato dal resistore nei seguenti circuiti:





<u>Dati</u>:

tensione di ingresso e(t): **gradino di 10 V**

***parametri*:** **C = 1 F, L = 2 H**

***uscita*:** **tensione sul condensatore $v_c(t)$**

1) Compilare, mediante simulazione, per entrambi i circuiti, la seguente tabella:

R [Ohm]	Poli	S_{MAX} (%)	δ	ω_n [rad/s]	T_D	T_R	T_S
0							
1							
2							
3							
4							
5							

2) Esaminare le due tabelle e svolgere le proprie considerazioni

3) Verificare alcuni risultati mediante il calcolo di δ e ω_n in funzione dei parametri.

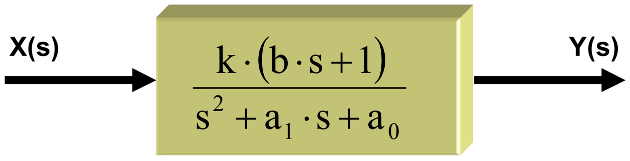
Esercitazione 1: File da utilizzare nella simulazione (SCILAB)

```
xbasc();    // cancellazione di tutti i grafici precedenti
clear;      // cancellazione di tutte le variabili costruite in precedenza

s = poly(0,"s");        // creazione della variabile di Laplace 's'

R = 1;        // Ohm     Parametro da variare nella compilazione della tabella
L = 2;        // Henry
C = 1;        // Farad

H = syslin("c", 1, L*C*s^2 + R*C*s + 1);      // costruzione della funzione di trasferimento
                                              // "c":  sistema continuo
                                              //  1 : numeratore della fdt
                                              //  L*C*s2 + R*J*s + 1 :  denominatore della fdt

t = 0:0.001:20;          // 0: ... :20    istanti iniziale e finale del calcolo
                         // 0.001    passo di integrazione

u = 10 + 0*t;            // u,  tensione di alimentazione del circuito

vc = csim(u, t, H);      // calcolo della tensine sul condensatore


plot2d(t, vc);           // grafico della corrente i

xgrid(3);                // inserimento della griglia

poli = roots([denom(H)])      // “roots” ,  funzione che calcola le radici del polinomio
                              // "denom",  funzione che estrae il denominatore di H
```

Sistema del 2° ordine, la cui funzione di trasferimento possiede uno zero

La presenza di uno zero:

- ***altera*** **la pendenza con cui la risposta si avvia:** ***non più con tangente orizzontale*****.**
- ***altera*** **S_{MAX}, che non dipende più solo da δ**
- ***non altera*** **la pulsazione di oscillazione ω**

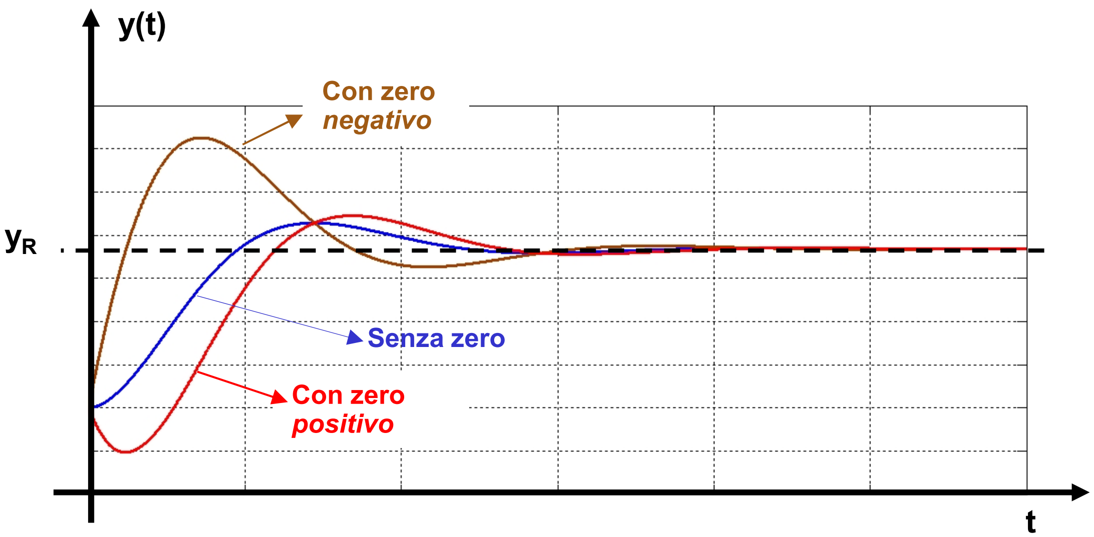


$$\frac{k\cdot(b\cdot s+1)}{s^2+a_1\cdot s+a_0}$$

Nel sistema è presente uno zero:

$$s=-\frac{1}{b}$$

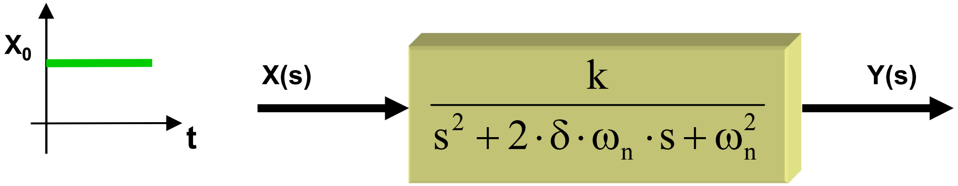
NB: con zero positivo il sistema presenta una risposta che si avvia in direzione opposta.



Risposta nel *dominio del tempo* e *funzione di trasferimento*

Esaminando la risposta nel tempo, è possibile stimare i parametri della funzione di trasferimento.

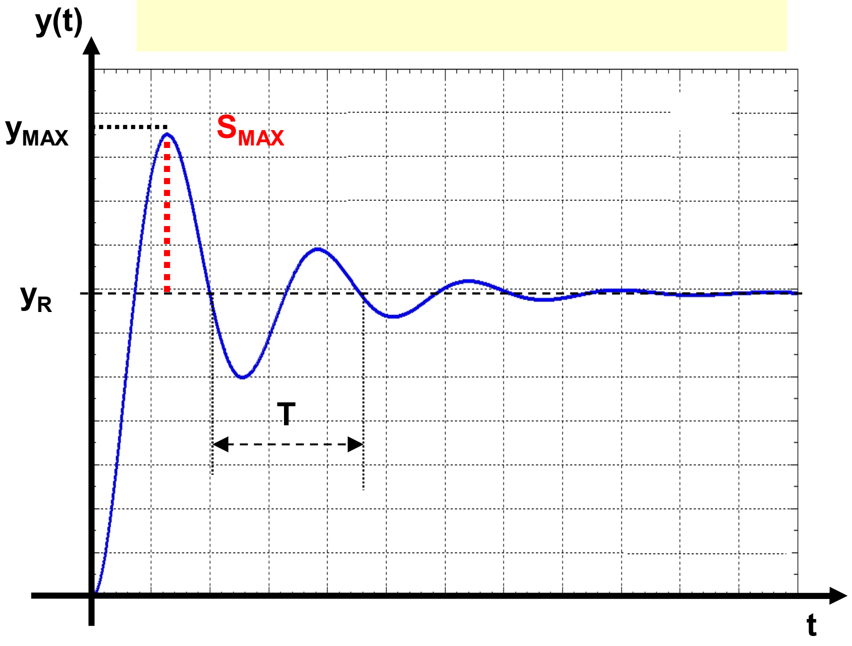
<u>Esempio</u>: sistema del 2° senza zeri *(ricavare k, δ, ω*ω_n*)*



$$\frac{k}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

NB: Per il calcolo del valore di regime y_R è conveniente ricorrere al teorema del valore finale:

$$\boxed{y_R = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)}$$



<u>Calcolo δ</u>:

Dal grafico della risposta si legge y_{MAX} e y_R, con essi si calcola S_{MAX} e per via grafica si ricava δ.

<u>Calcolo ω_n</u>:

Dal grafico della risposta si legge il periodo T, con esso si calcola la pulsazione di oscillazione ω = 2 π / T, e quindi:

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

<u>Calcolo k</u>:

Applicando il teorema del valore finale si ottiene:

$$y_R = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{X_0}{s} \cdot \frac{k}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} = \frac{X_0 \cdot k}{\omega_n^2}$$

Da cui: $$k = \frac{y_R \cdot \omega_n^2}{X_0}$$

Poli dominanti

In un sistema possono essere presenti più accumulatori di energia, quindi più variabili di stato, ossia più poli nelle funzioni di trasferimento.

Ad ogni polo corrisponde una costante di tempo.

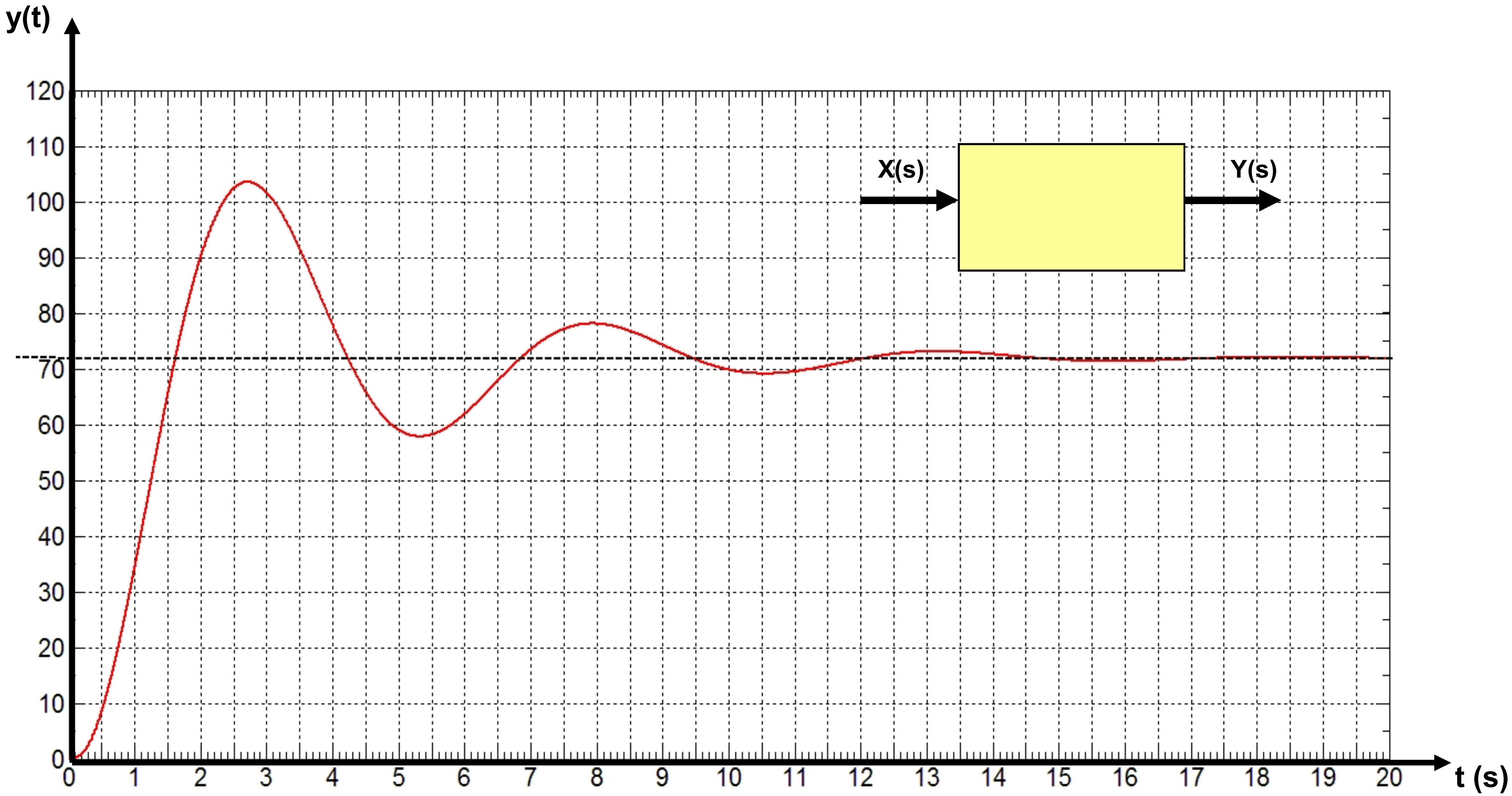
Le costanti di tempo più grandi determinano la durata complessiva del transitorio. Quando sono molto più grandi, il transitorio è di fatto determinato da esse.

Alle costanti di tempo più grandi corrispondono i poli più piccoli (in valore assoluto). Questi poli sono chiamati dominanti.

Se nel sistema sono presenti poli dominanti, gli altri poli si possono trascurare.

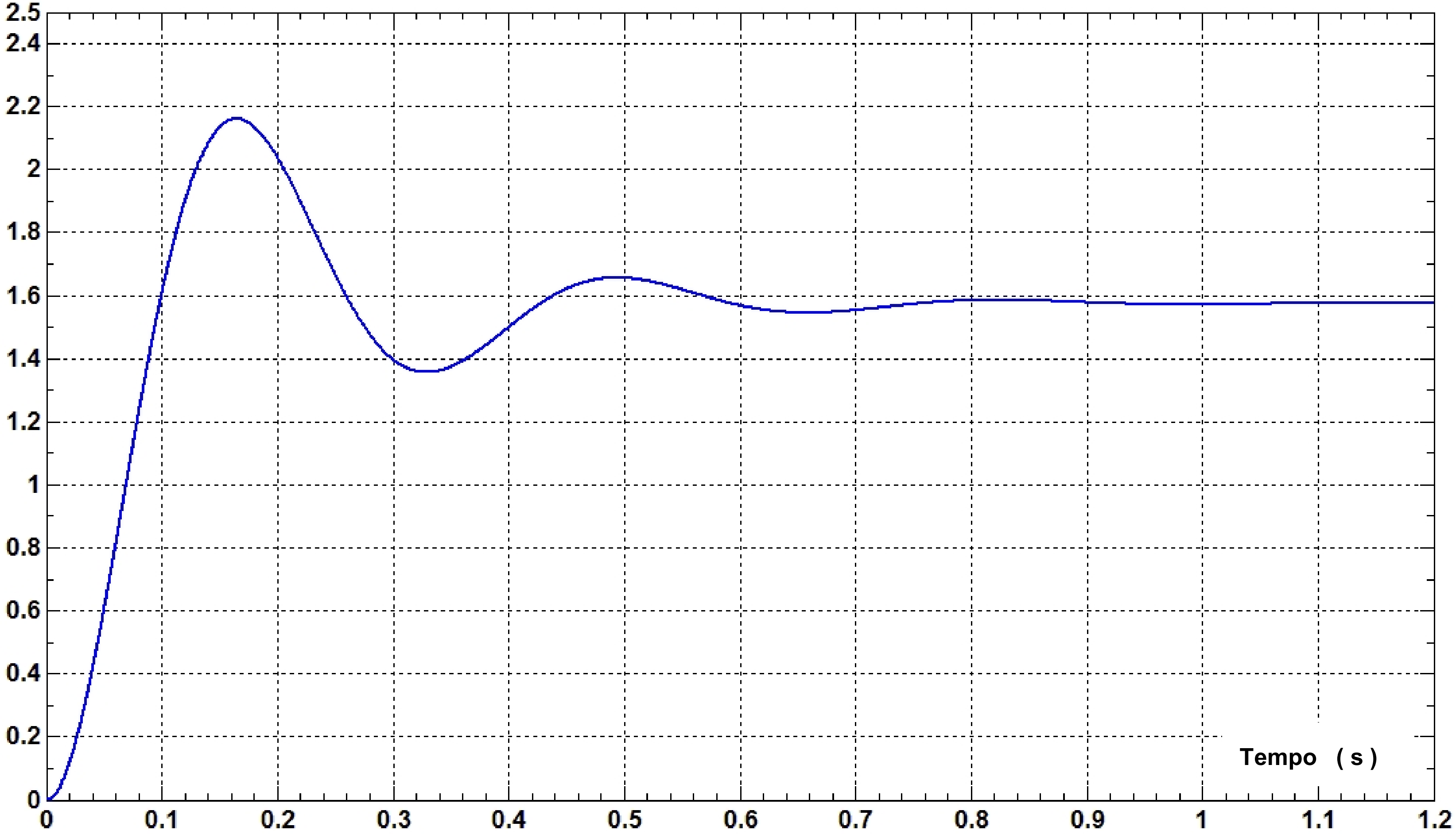
<u>Esercitazione 2</u>: Identificare la funzione di trasferimento di un sistema mediante l'esame della sua risposta al gradino. Confrontare poi la risposta del modello con quella effettiva.

Il sistema è sollecitato mediante un gradino di ampiezza $X_0 = 5$
e presenta la seguente risposta:



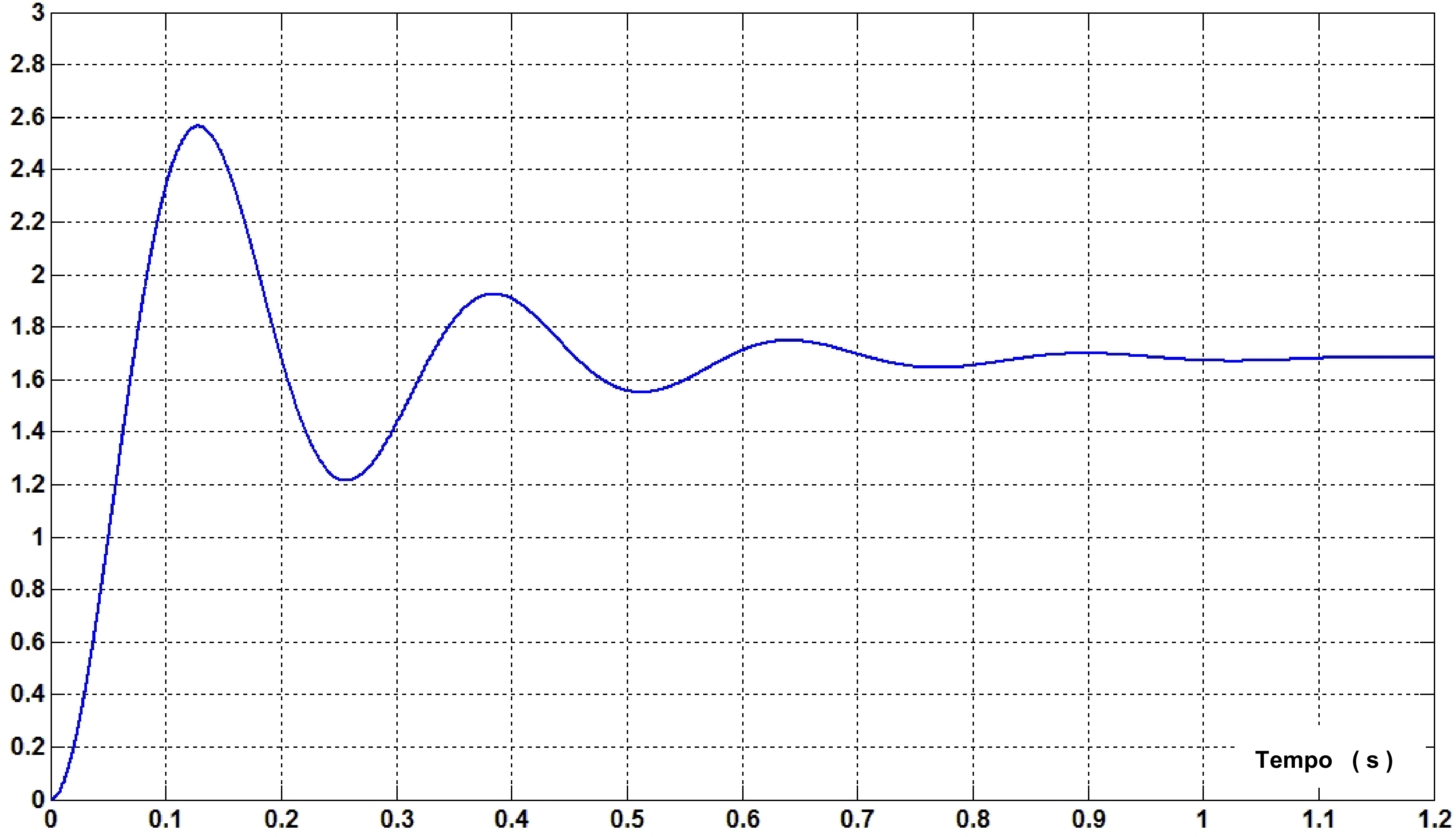
Esercizio 1

Identificare il sistema (funzione di trasferimento) la cui risposta al gradino di ampiezza 5 è la seguente:



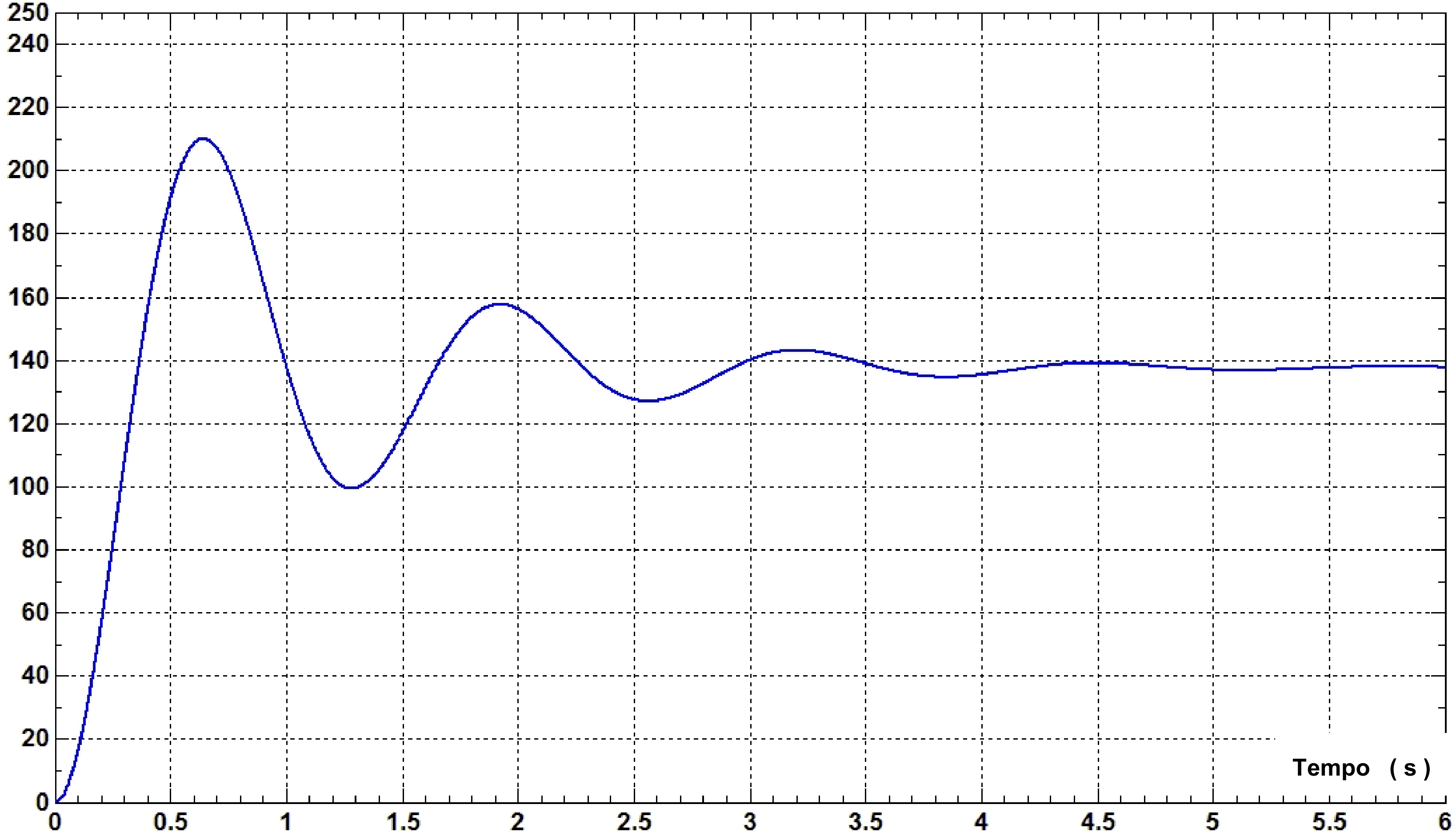
Esercizio 2

Identificare il sistema (funzione di trasferimento) la cui risposta al gradino di ampiezza 5 è la seguente:



Esercizio 3

Identificare il sistema (funzione di trasferimento) la cui risposta al gradino di ampiezza 8 è la seguente:



SOLUZIONE : Esercitazione 1

1 / 2

Circuito a):

R [Ohm]	Poli	S_{MAX} (%)	δ	ω_n [rad/s]
0	0 ± j 0.707	10 (100%)	0	0.707
1	- 0.25 ± j 0.66	3.1 (31%)	0.35	0.705
2	- 0.50 ± j 0.50	0.43 (4.3%)	0.71	0.71
3	- 1 , - 0.5	-	-	-
4	- 1.71 - 0.29	-	-	-
5	- 2.28 , - 0.22	-	-	-

Circuito b):

R [Ohm]	Poli	S_{MAX} (%)	δ	ω_n [rad/s]
0	-	-	-	-
1	- 0.50 ± j 0.50	0.43 (4.3%)	0.71	0.71
2	- 0.25 ± j 0.66	3.1 (31%)	0.35	0.705
3	- 0.17 ± j 0.69	4.7 (47%)	0.23	0.709
4	- 0.125 ± j 0.696	5.7 (57%)	0.175	0.707
5	- 0.10 ± j 0.70	6.4 (64%)	0.14	-

SOLUZIONE : Esercitazione 1

2 / 2

Le variazioni delle variabili di stato descrivono l'accumulo di energia nei due accumulatori (induttore, condensatore). L'accumulo avviene mediante il flusso della carica elettrica (corrente).

Nel circuito a) questa corrente elettrica attraversa anche il resistore, per cui valori alti di R la frenano. Dalla tabella si osserva che valori bassi di R comportano uno scambio ripetuto di energia tra L e C (soluzioni complesse coniugate), con frequenza (pulsazione) in diminuzione all'aumentare di R.

L'aumento di R, riduce la corrente e così ridimensiona il "tira e molla" dell'energia, come rilevato dalla diminuzione di S_{MAX} e δ, fino ad annullarlo (soluzioni reali).

Nel circuito b) la corrente che attraversa il resistore rappresenta una sottrazione a quella che trasporta l'energia in L e C. Quanto minore è R, tanto maggiore è questa sottrazione e più ostacolato risulta lo scambio energetico tra L e C.

All'aumentare di R, si riduce la corrente sottratta e si riduce quindi l'effetto frenante sullo scambio energetico, che quindi si amplifica in termini di frequenza e ampiezza, come rilevato dalla parte immaginaria dei poli e da S_{MAX}.

<u>SOLUZIONE</u> : Esercitazione 2

1 / 3

La risposta del sistema presenta:

- **una dinamica oscillante, si è quindi in presenza di almeno due poli complessi coniugati**
- **una fase di avvio con tangente orizzontale, cioè il sistema non presenta zeri**

In definitiva si è nella condizione di poter pensare a un modello matematico tipo funzione di trasferimento senza zeri e con due poli complessi coniugati.

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{s^2 + 2\cdot\delta\cdot\omega_n\cdot s + \omega_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

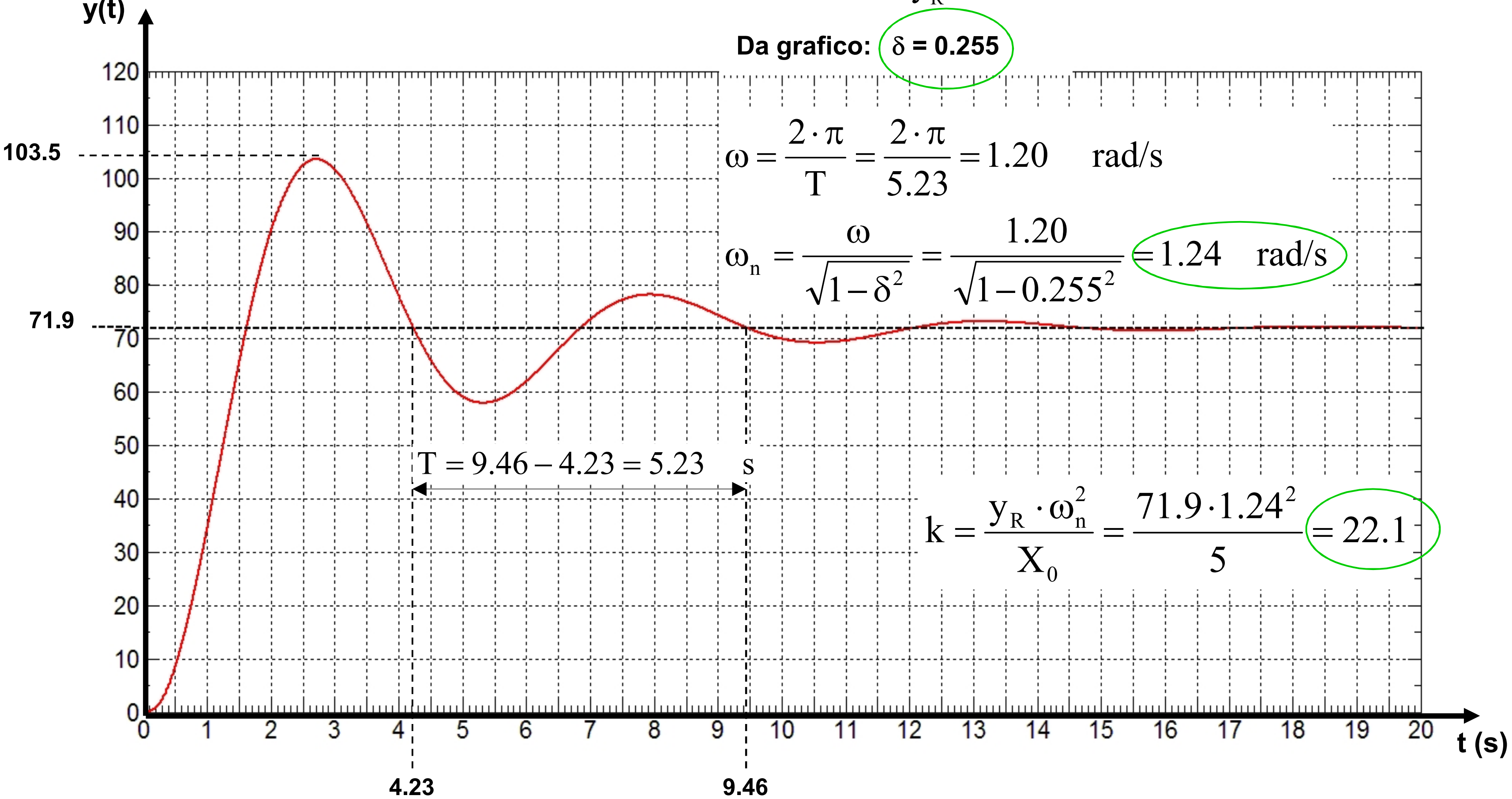
<u>SOLUZIONE</u> : Esercitazione 2

2 / 3

Il calcolo dei parametri della funzione di trasferimento richiede la lettura dei seguenti dati dal grafico della risposta:

$$S_{MAX}\% = \frac{y_{MAX} - y_R}{y_R} \cdot 100 = \frac{103.5 - 71.9}{71.9} \cdot 100 = 44\%$$

Da grafico: $\delta = 0.255$



$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{5.23} = 1.20 \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{1.20}{\sqrt{1-0.255^2}} = 1.24 \quad \text{rad/s}$$

$$T = 9.46 - 4.23 = 5.23 \quad \text{s}$$

$$k = \frac{y_R \cdot \omega_n^2}{X_0} = \frac{71.9 \cdot 1.24^2}{5} = 22.1$$

<u>SOLUZIONE</u> : Esercitazione 2

Dai *calcoli* risulta la seguente funzione di trasferimento:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{22.1}{s^2 + 0.6324 \cdot s + 1.538}} \longrightarrow Y(s)$$

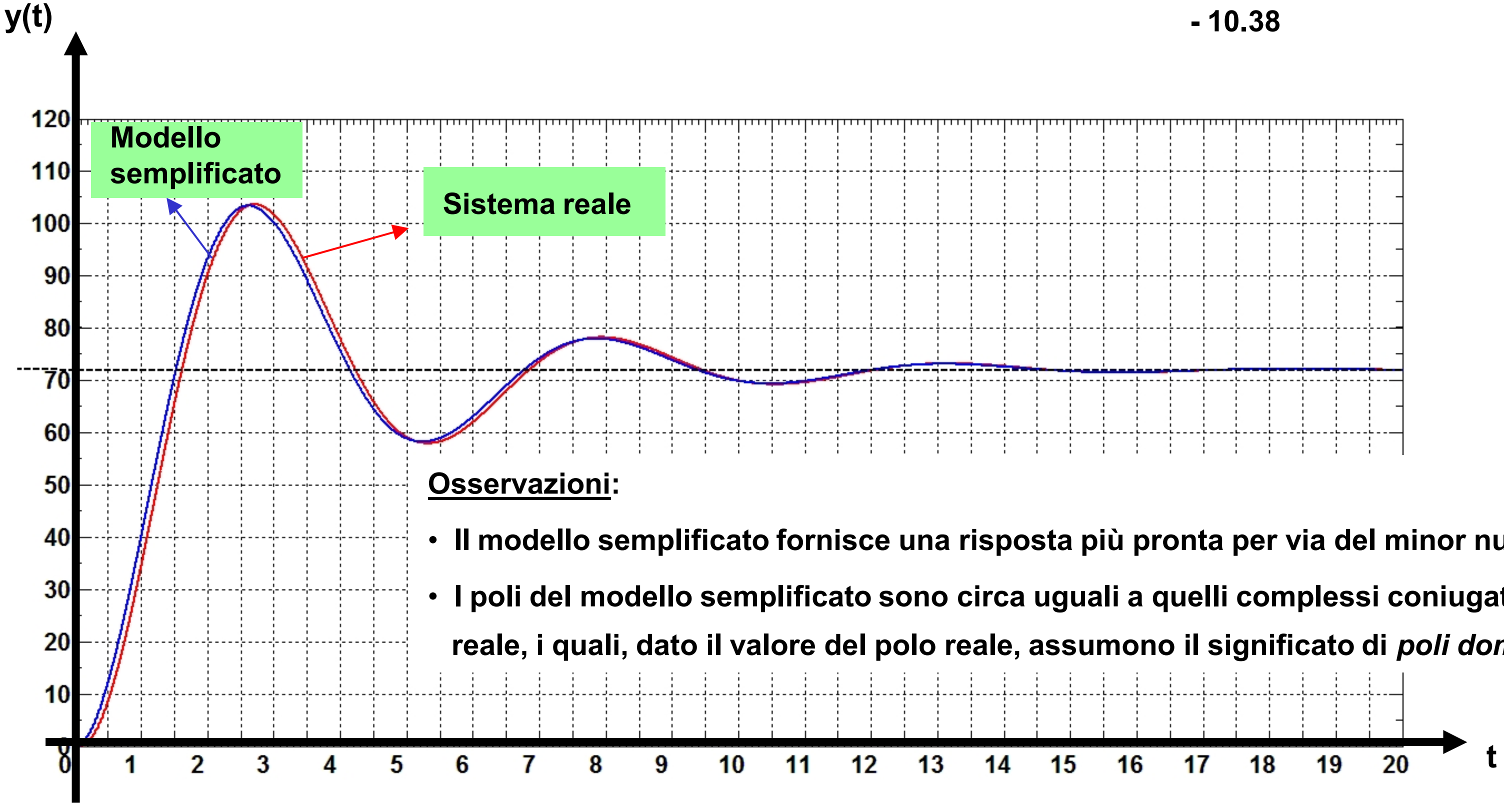
Poli = - 0.3162 ± j 1.199

La *reale* funzione di trasferimento, di cui il profilo esaminato è la sua risposta al gradino, è invece:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{230}{s^3 + 11 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 16}} \longrightarrow Y(s)$$

Poli = - 0.3112 ± j 1.202

- 10.38



<u>Osservazioni</u>:

- **Il modello semplificato fornisce una risposta più pronta per via del minor numero di poli**
- **I poli del modello semplificato sono circa uguali a quelli complessi coniugati del sistema reale, i quali, dato il valore del polo reale, assumono il significato di *poli dominanti*.**

SOLUZIONE : Esercizi

Esercizio 1

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{126}{s^2 + 2\cdot 0.3 \cdot 20 \cdot s + 20^2}} \longrightarrow Y(s)$$

Poli = - 6.0 ± j 19.1

Esercizio 2

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{210}{s^2 + 2\cdot 0.2 \cdot 25 \cdot s + 25^2}} \longrightarrow Y(s)$$

Poli = - 5.0 ± j 24.5

Esercizio 3

$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{430}{s^2 + 2\cdot 0.2 \cdot 5 \cdot s + 5^2}} \longrightarrow Y(s)$$

Poli = - 1.0 ± j 4.9