

FILTRI - DEFINIZIONI

1. Un filtro è un circuito elettrico selettivo nei confronti della frequenza dei segnali applicati in ingresso.
 - In altre parole , segnali di diversa frequenza non sono elaborati allo stesso modo
 - Si individua una Banda di frequenze, detta Banda Passante, in cui il Modulo del Guadagno di tensione del filtro, cioè il rapporto tra $|V_{out}|$ e $|V_{in}|$, è quasi costante (in realtà compreso tra G_{max} e $0.7 G_{max}$).
 - Al di fuori di questa banda , i segnali sono attenuati , in misura sempre maggiore quanto più ci si allontana dalla B.Passante .
 - I segnali sono altresì sfasati , fuori dalla Banda Passante , cioè la tensione V_{out} sarà in ritardo o in anticipo sulla V_{in} , a seconda del tipo di filtro.
2. La Frequenza di taglio è la f_c che separa la **Banda Passante (Banda Chiara)** dalla **Banda Attenuante (Banda Scura)**.

$$\begin{aligned} |G| \text{ dB} &= 20 \text{ Log } [|G_{max}| / \sqrt{2}] = 20 \text{ Log } |G_{max}| - 20 \text{ Log } \sqrt{2} = \\ &= 20 \text{ Log } |G_{max}| - 3 \text{ [dB]} \end{aligned}$$

3. Ci sono 2 categorie di Filtri :

- F. passivi (composti solo da R, L, C)
- F. Attivi

(c'è anche un amplificatore , p.e. un A.O.)

Ogni categoria è composta da 4 tipi di filtri :

- F. Passa - basso
- F. Passa - alto
- F. Passa – banda
- F. Elimina – banda

4. L' **Ordine** di un filtro dipende dal n° di componenti reattivi indipendenti presenti nel circuito.

L' ordine è anche il massimo fra i gradi dei 2 polinomi presenti a Numeratore e Denominatore della **Funzione di Trasferimento (F.d.t.)**

5. Indipendenza :

2 o più componenti sono indipendenti se non sono direttamente in serie o in parallelo , infatti :

- n induttori in serie sono equivalenti a un unico induttore avente Induttanza :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

- n condensatori in parallelo sono equivalenti a un unico condensatore avente Capacità

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

6. La Funzione di Trasferimento (FdT) è la funzione , nel Dominio di $j\omega$, che esprime il legame tra una grandezza di OUT (V o I) e una omologa grandezza di IN , in un circuito elettrico :

$$\bar{G}(j\omega) = \bar{V}_{out} / \bar{V}_{in}$$

Condizione di fisica realizzabilità : nella FdT la differenza tra i gradi dei polinomi a Numeratore e Denominatore è , al max , 1 .

7. Impedenza $\rightarrow Z = V / I = R + jX \leftarrow$ Reattanza

\uparrow
Resistenza

Resistenza R : rapporto tra tensione e corrente in un Resistore .

E' un n° Reale, con qualunque tipo di regime (è un ' approssimazione !
I componenti resistivi possono solo dissipare energia elettrica

Reattanza X : è la resistenza, al variare della frequenza , dei componenti reattivi , cioè Induttori e Condensatori .

I componenti reattivi non dissipano energia ma la conservano
(energia del campo elettrostatico per il condensatore, del campo magnetico per l'induttore)

- Induttori e condensatori hanno un'impedenza reattiva , cioè puramente immaginaria .

$$\overline{Z_L} = j\omega L$$

$$\overline{Z_C} = 1 / j\omega C$$

il che significa che l'ampiezza del rapporto tra V e I dipende dalla frequenza di lavoro e che V e I sono sfasate di 90°

(V in anticipo su I nell'induttore , V in ritardo su I nel condensatore)

La teoria dei filtri

I filtri per radiofrequenza impiegati comunemente negli impianti d'antenna si possono dividere in quattro tipologie:

- **passa-basso**
- **passa-alto**
- **passa-banda**
- **elimina banda (notch)**

e sono costituiti da condensatori, fissi o variabili, e bobine (induttanze) d'opportuno valore, collegati tra loro secondo uno schema opportuno.

- Il filtro **passa-basso** attenua i segnali di frequenza **superiore** ad una certa frequenza di taglio, che è definita sulla base dei valori di capacità , induttanza e resistenza presenti nel circuito.
- Il filtro passa-alto attenua i segnali di frequenza **inferiore** ad una certa frequenza di taglio.
- Il filtro passa-banda è una combinazione di un filtro passa-alto con un filtro passa-basso.
- Il filtro elimina banda, detto anche notch, è una combinazione di filtri che attenuano fortemente i segnali che si trovano all'**interno** di una banda ristretta, lasciando invece inalterati i segnali che sono al di fuori.

Questo tipo di filtro è particolarmente utile per ridurre i problemi d'intermodulazione e frequenza immagine causati dai forti segnali delle stazioni di radiodiffusione che trasmettono nella banda **88-108 [Mhz]**.

I parametri che caratterizzano un filtro per radiofrequenza sono:

- **la frequenza di taglio**
(per passa-basso e passa-alto)
- **la frequenza di centro banda e il fattore di qualità**
per i filtri passa-banda e notch
- **la corrispondente attenuazione in dB e la pendenza**
della curva di guadagno in Banda attenuata

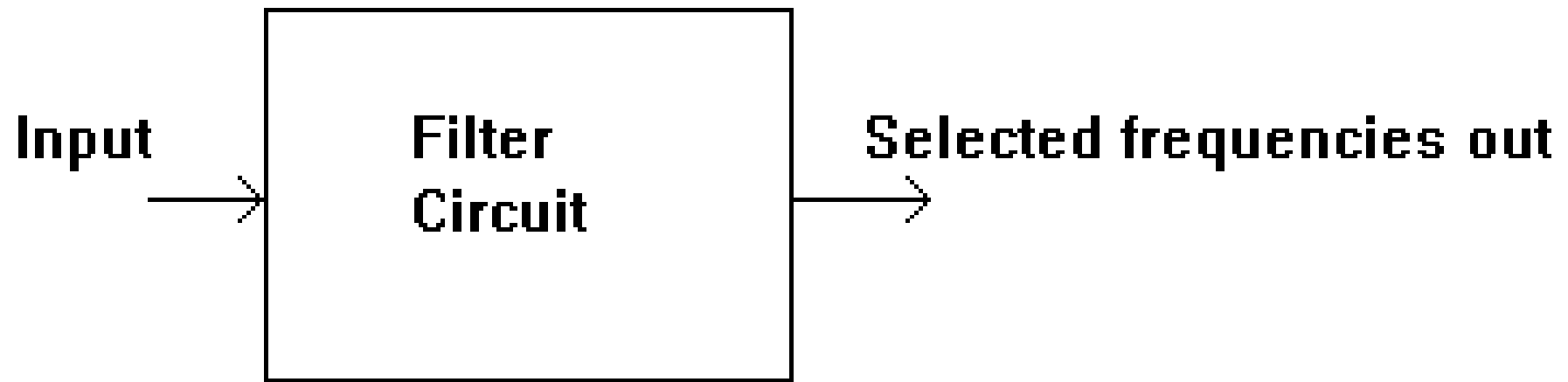
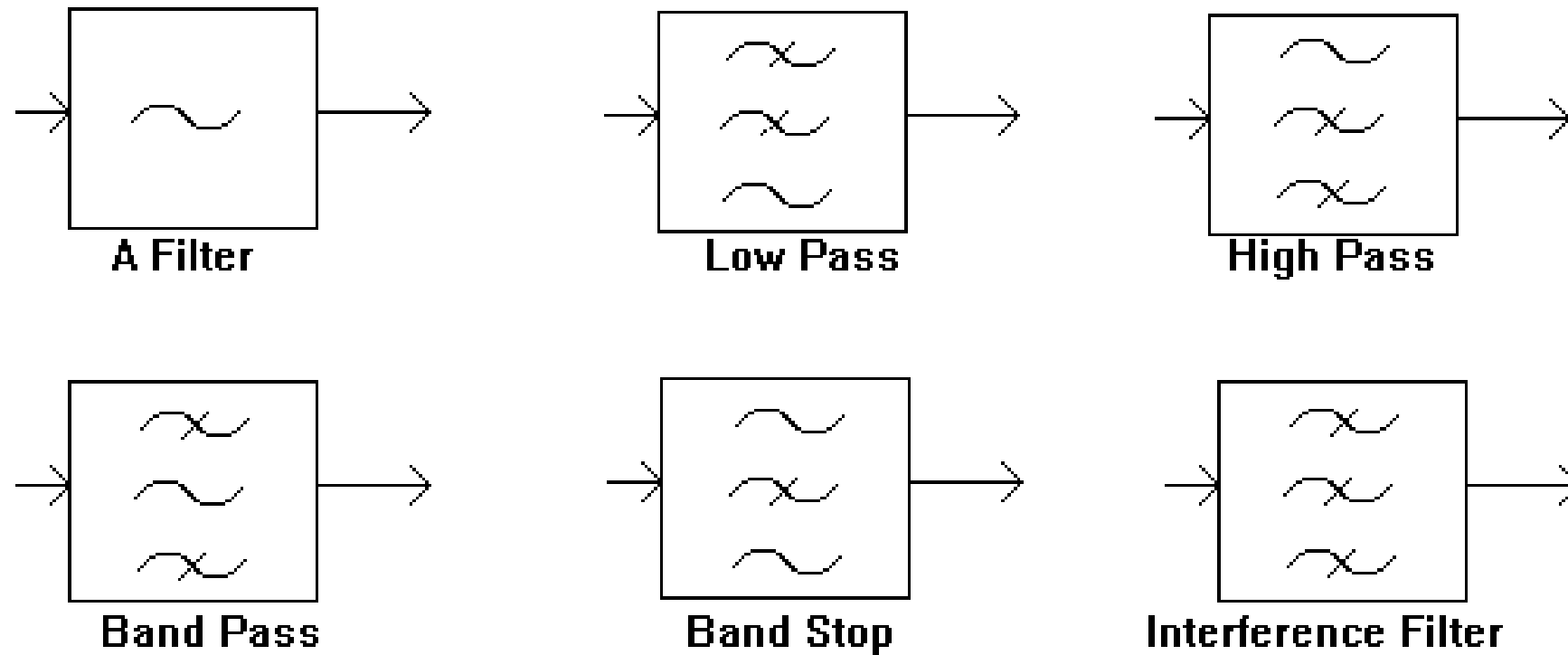


fig. 1

Questo è lo schema a blocchi di un generico filtro avente in ingresso un generico segnale , con in uscita il segnale modificato in vario modo (**attenuato e sfasato**) a seconda della frequenza .

Nell'immagine successiva vengono raffigurati i rispettivi blocchi di un filtro generico, di un passa-basso, di un passa-alto, passa - banda, elimina - banda:



BLOCK DIAGRAM SYMBOLS FOR FILTERS

Filtri elementari passivi

Si dicono passivi perché non vi sono componenti attivi : la resistenza ,il condensatore e l'induttore non dissipano potenza, quindi sono passivi.

I filtri passivi si dividono in 2 categorie :

1°) A polo singolo : sono basati sulla combinazione di resistori, con condensatori e/ o induttori.

Sono circuiti **RC, RL** .

Sono chiamati "**filtri passivi**", perché il loro funzionamento non dipende da una fonte di alimentazione esterna e il segnale di **OUT** ha ampiezza minore o al max uguale a quella del segnale di **IN**.

➤ Gli **induttori** (posti in serie a un generatore) bloccano i segnali ad **alta frequenza** e conducono quelli a bassa frequenza, mentre i **condensatori** si comportano al contrario.

[Infatti l' induttore è un c.c. in continua e un c.a. in HF , il condensatore viceversa]

➤ Un filtro in cui il segnale passi in serie attraverso un induttore, o nel quale un condensatore fornisca un percorso verso terra, presenta quindi minore attenuazione ai segnali a bassa frequenza rispetto a quelli ad alta frequenza ed è perciò un filtro **passa - basso**.

➤ Se il segnale passa in serie attraverso un condensatore, o ha un percorso a terra attraverso un induttore, allora il filtro presenta un'attenuazione minore per i segnali ad alta frequenza rispetto a quelli a bassa frequenza, ed è un filtro **passa-alto**.

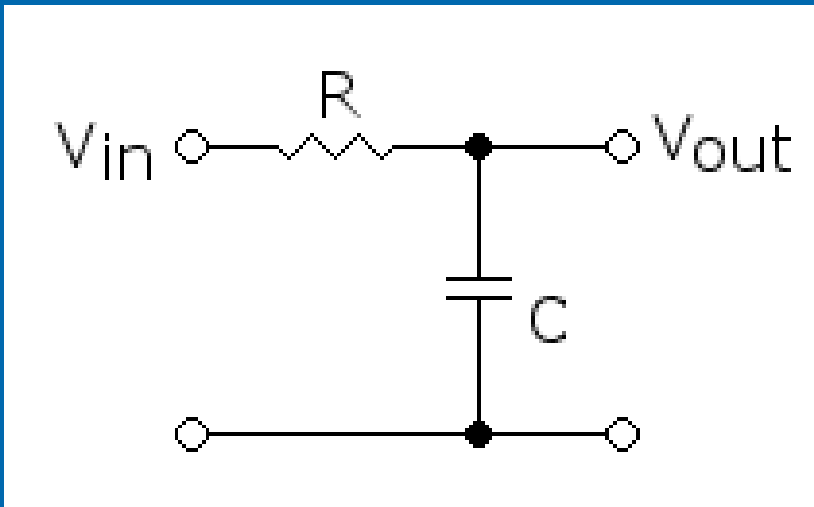
- I resistori da parte loro non hanno la proprietà di selezionare le frequenze, ma sono aggiunti a condensatori e induttori per determinare le **costanti di tempo** del circuito, e quindi le frequenze a cui essi rispondono.
- A frequenze molto alte ,maggiori di circa **100 [MHz]**, a volte gli induttori sono semplicemente fatti da un singolo anello o da una striscia di lamina metallica, e i capacitori da strisce metalliche adiacenti.
- Tali strutture, che sono utilizzate anche per fare adattamento di impedenza, sono chiamate **stub**.

2°) Multipolari : LC , RLC

I filtri del secondo ordine (o di ordine superiore) sono misurati con il loro **fattore di qualità** o **fattore Q**.

Si dice che un filtro ha un Q alto, se seleziona o inibisce un intervallo di frequenze stretto, relativamente alla sua **frequenza centrale**.

Vediamo ora i vari tipi di filtri passivi a polo singolo.



FILTRO PASSIVO PASSA-BASSO del 1° ORDINE

Il circuito rappresenta un filtro **passa-basso**.

Si dice filtro passa basso un circuito che fa passare in uscita solo i segnali di frequenza più bassa di un'altra **prefissata**.

La frequenza prefissata, che viene scelta a piacere, viene detta **frequenza di taglio** e la indichiamo con f_c .

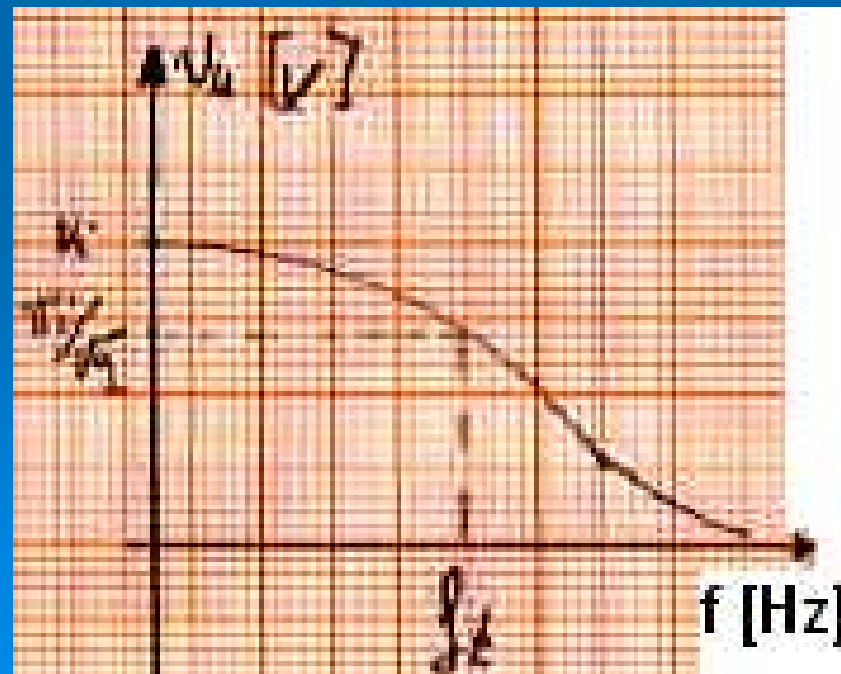
Possiamo vedere come il condensatore sia un componente che conduce molto i segnali di alta frequenza mentre attenua e non fa passare quelli di bassa frequenza .

Nel nostro caso, però, il C non è posto in serie tra ingresso e uscita ma in parallelo all'uscita, quindi i segnali di alta frequenza vengono messi in corto circuito dal C verso massa, e non li ritroviamo in uscita, dove arrivano solo quelli di bassa frequenza .

Il filtro si comporta perciò da passa basso.

Per calcolare la frequenza di taglio si usa la seguente formula : $f_t = 1 / 2 \pi RC$

- Possiamo vedere come a **frequenza zero** l'uscita assume il massimo valore (1), cioè $V_o = V_i$
- In corrispondenza della frequenza di taglio **f_t** l'uscita assume il valore $V_o = V_i / \sqrt{2}$
- Si dice frequenza di taglio di un filtro quella frequenza alla quale l'attenuazione del filtro, cioè il **rapporto tra tensione di uscita e tensione di ingresso** , è uguale a $1/\sqrt{2}$, cioè : $V_o/V_i = 1 / \sqrt{2}$
- Per frequenze superiori alla f_t vediamo che la curva scende verso il basso e quindi la tensione in uscita risulta molto attenuata.



$$\underline{G(j\omega)} = \underline{V_{out}} / \underline{V_{in}} = \underline{Z_c} / (\underline{R} + \underline{Z_c}) = 1 / (1 + j\omega RC)$$

$$|G| = 1 / \sqrt{[1 + (\omega RC)^2]}$$

$$G(j0) = 1 \rightarrow 0 \text{ [dB]}$$

$$G(j\infty) = 0 \rightarrow -\infty \text{ [dB]}$$

$$|G(j\omega_t)| = 1 / \sqrt{2} \rightarrow -3 \text{ [dB]}$$

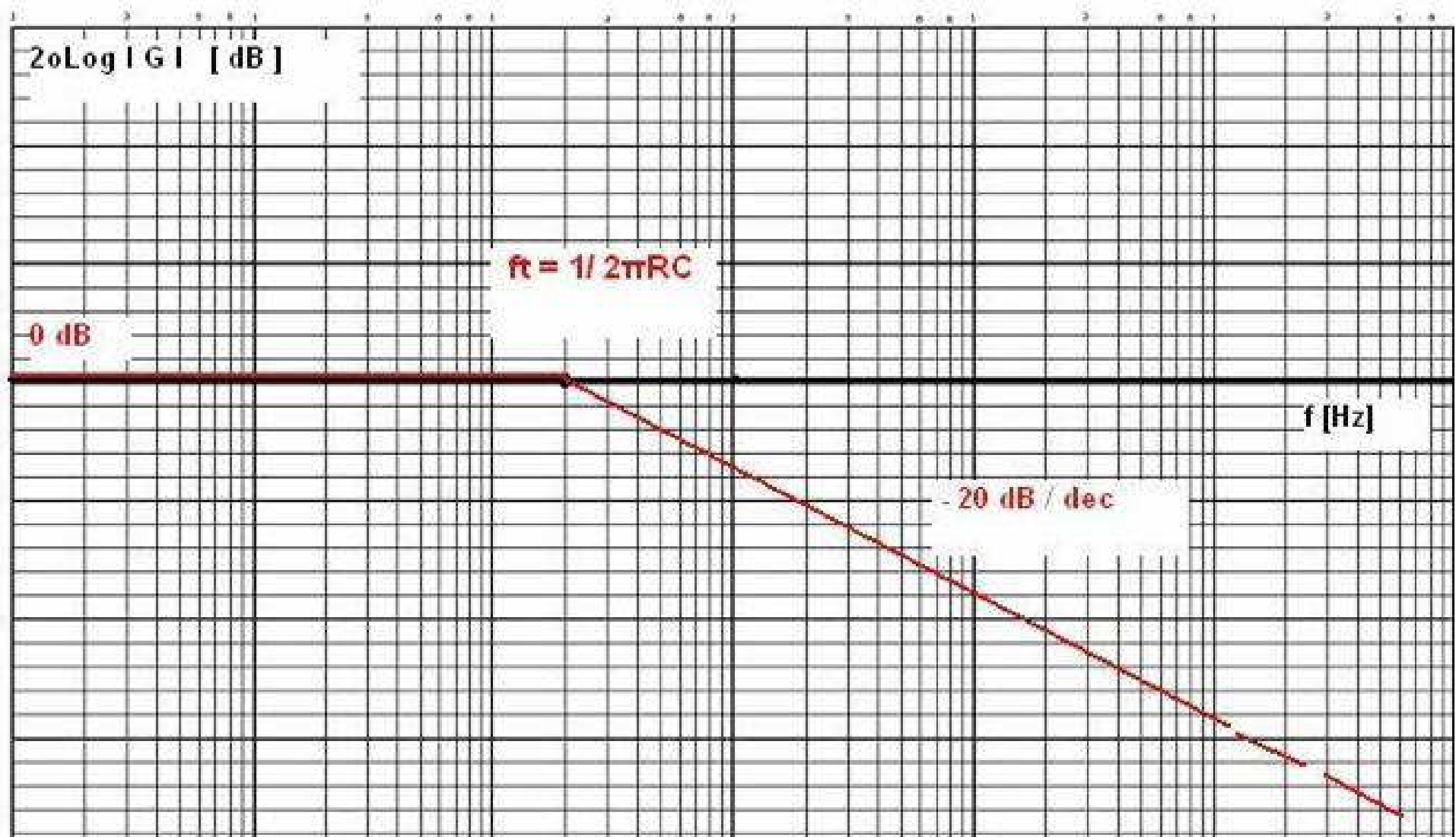
$$\text{Fase di } G = -\text{artan}(\omega RC)$$

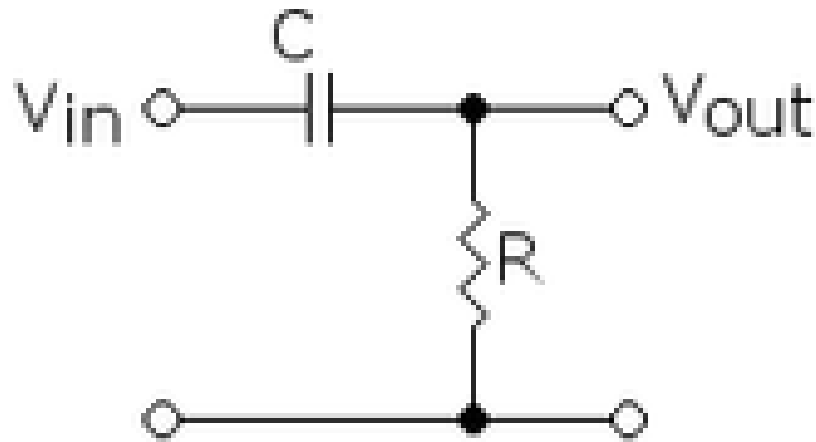
$$\text{Fase (per } \omega = 0) = 0^\circ$$

$$\text{Fase (per } \omega \rightarrow \infty) = -90^\circ$$

$$\text{Fase (per } \omega = \omega_t) = -45^\circ$$

Curva ideale del Guadagno di un generico filtro RC passa-basso (in scale logaritmiche)





FILTRO PASSIVO PASSA – ALTO del 1° ORDINE

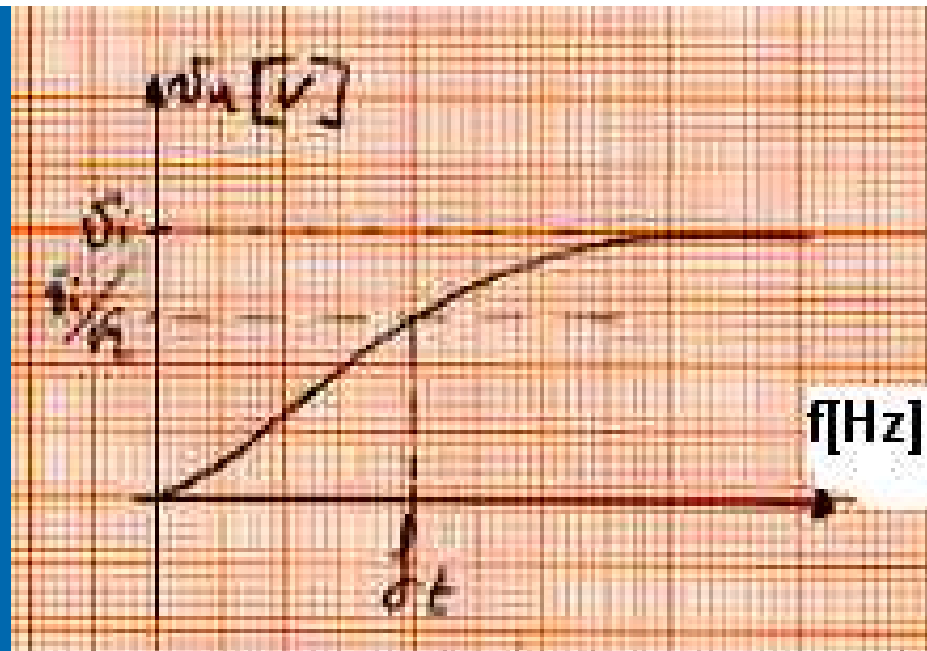
Il circuito rappresentato è un filtro passa-alto.

Si dice filtro passa alto un circuito che fa passare in uscita solo i segnali di frequenza più alta della frequenza di taglio f_t .

Possiamo vedere come il condensatore sia un componente che conduce molto i segnali di alta frequenza mentre attenua e non fa passare quelli di bassa frequenza.

Nel nostro caso il condensatore è posto in serie tra ingresso e uscita quindi i segnali di alta frequenza trovano una resistenza molto bassa e li ritroviamo in uscita, mentre per quelli di bassa frequenza il C si comporta come un circuito aperto, quindi tali segnali non riescono a passare.

Il circuito si comporta perciò da filtro passa alto..

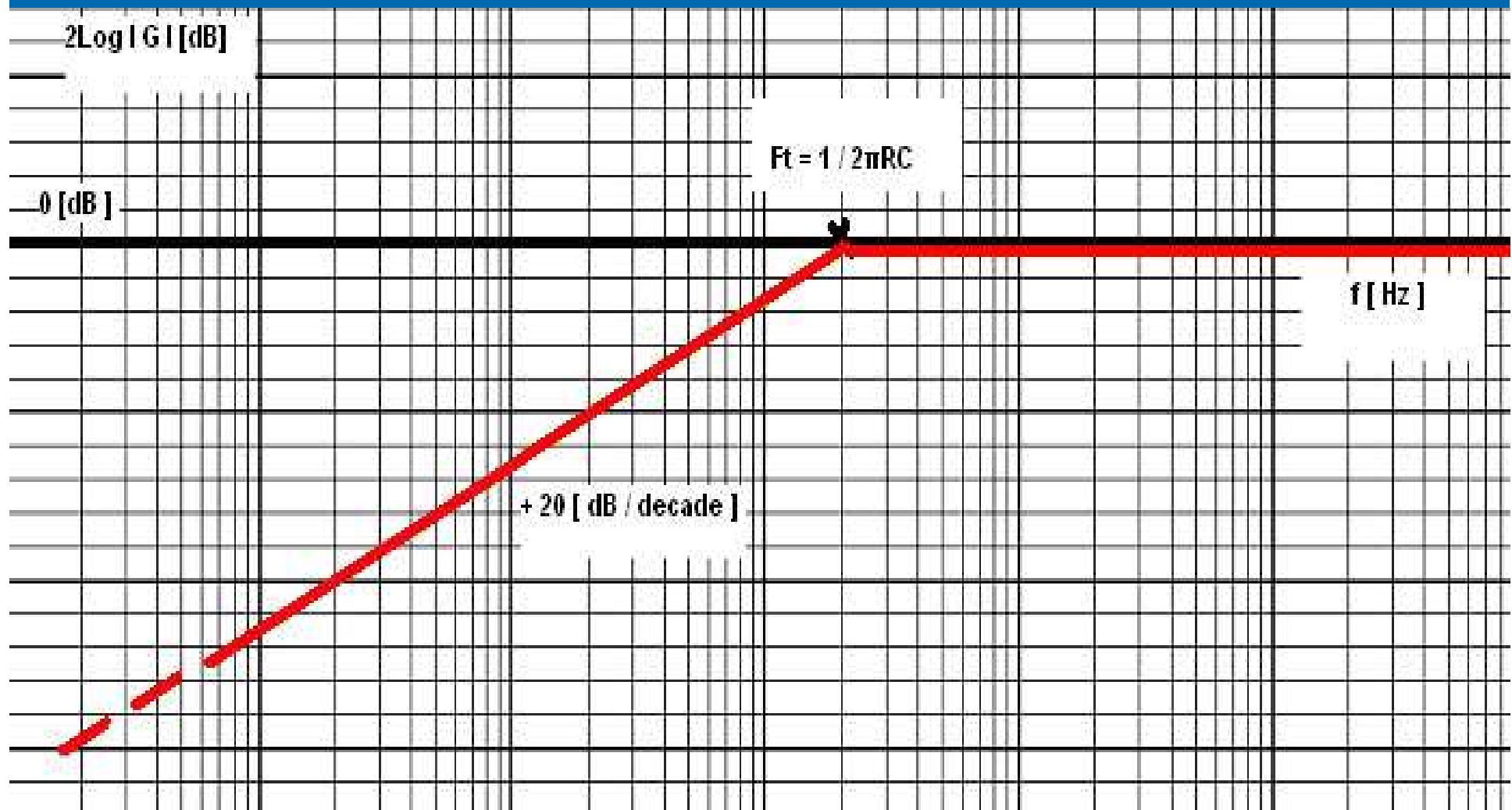


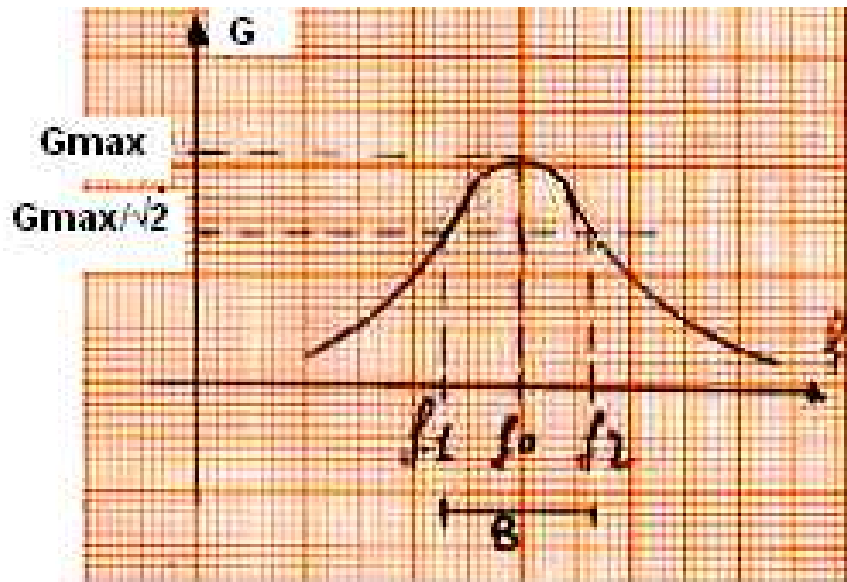
Per calcolare la frequenza di taglio si usa la seguente formula:

$$F_t = 1 / 2 \pi RC$$

- Se indichiamo con V_i la tensione di ingresso e con V_o la tensione di uscita il diagramma del filtro è in funzione della frequenza.
- Possiamo vedere come a frequenza zero l'uscita assume il valore zero; per frequenze inferiori a f_t la curva si mantiene molto bassa, quindi i segnali di bassa frequenza non passano.
- In corrispondenza della frequenza di taglio f_t l'uscita assume il valore $v_u = v_i / \sqrt{2}$
- Per frequenze superiori a f_t vediamo che la curva va verso il valore massimo v_i .

Curva ideale del Guadagno di un generico filtro RC passa - alto (in scale logaritmiche)





FILTRO PASSIVO PASSA-BANDA del 2° ORDINE

Un filtro passa-banda è un dispositivo che permette il passaggio di segnali con frequenza compresa in un certo intervallo (la banda passante) e attenua quelli con frequenza al di fuori di esso.

Un esempio di un circuito analogico che si comporta come un filtro passa-banda è un circuito RLC (una rete elettrica formata da resistore-induttore-condensatore).

I filtri passa-banda possono anche essere creati dalla combinazione di un filtro passa-basso e un filtro passa-alto.

- Un filtro ideale dovrebbe avere una banda passante perfettamente piatta, non dovrebbe avere né attenuazione né guadagno per i segnali di frequenza all'interno della banda e dovrebbe attenuare completamente tutte i segnali con frequenza al di fuori di essa.
- Inoltre, dovrebbe avere un intervallo ben determinato, con una suddivisione netta tra frequenze all'interno o all'esterno della banda passante (cioè il grafico del Guadagno dovrebbe essere un rettangolo).
- Nella pratica, nessun filtro passa-banda è realizzabile.
- Il filtro non attenua completamente tutte i segnali di frequenza al di fuori della banda voluta; in particolare, esiste una regione contigua alla banda passante dove i segnali sono poco attenuati.
- Tra la frequenza di taglio inferiore f_1 e quella superiore f_2 di una banda passante, si trova la frequenza di risonanza f_0 , in corrispondenza della quale il guadagno del filtro è massimo.
- La banda passante del filtro è semplicemente la differenza tra f_2 e f_1 .

Filtri attivi

- Sfruttando essenzialmente il diverso comportamento di elementi reattivi, C ed L, al variare della frequenza ,si realizzano filtri di vario tipo con prestazioni e strutture molto differenziate.
- Se la rete filtrante comprende solo elementi passivi, il filtro è detto passivo, e deve avere, necessariamente, su tutto l'asse delle frequenze un guadagno di potenza inferiore o uguale a 1
- Se è presente un componente attivo (tipicamente un amplificatore operazionale), il filtro è di tipo attivo, ed è possibile che abbia, in un certo intervallo di frequenze, un guadagno di potenza maggiore di 1.
- Gli amplificatori operazionali sono frequentemente utilizzati nel progetto dei filtri attivi. Possono avere Q elevati e raggiungere la risonanza senza utilizzo di induttori
- La loro frequenza superiore è però limitata dalla larghezza di banda degli amplificatori utilizzati.

I filtri attivi si differenziano da quelli passivi per le seguenti proprietà :

- **Amplificano il segnale filtrato : Presentano quindi un elemento attivo (amplificatore) che permette di attribuire al segnale in uscita l'ampiezza più opportuna.**
- **Si può progettare il filtro indipendentemente dal carico e si possono collegare in cascata più celle filtranti senza che esse interagiscano tra di loro. I componenti attivi grazie alla loro bassa impedenza**
- **E' possibile evitare l'uso di induttanze: infatti è possibile ottenere filtri attivi combinando reti RC con amplificatori operazionali. Ciò comporta una diminuzione dell'ingombro e una diminuzione dei disturbi di natura elettromagnetica. Solo alle alte frequenze le bobine sono ancora usate.**
- **Permettono di realizzare facilmente filtri di ordine elevato: Possono infatti essere collegati in cascata filtri del 1°, 2° ordine per realizzare filtri di ordine superiore.**
- **Si ha maggiore facilità nella progettazione e nella realizzazione. Esistono in commercio integrati che per il completamento del filtro richiedono solo l'aggiunta di pochi componenti.**

- I filtri attivi realizzati con l'impiego di amplificatori operazionali presentano numerosi vantaggi rispetto ai filtri passivi: la presenza dell'amplificatore operazionale oltre a consentire un eventuale guadagno rende la progettazione del filtro indipendente dalle reti del filtro stesso.
- D'altra parte i filtri passivi non necessitano di un'alimentazione e possono agire anche a frequenze molto elevate, irraggiungibili da un filtro attivo data la limitata larghezza di banda dell'operazionale (dipendente anche dal guadagno).
- La classificazione dei filtri viene effettuata oltre che per il tipo di filtraggio anche in relazione al grado dei polinomi al Numeratore e al Denominatore della funzione di trasferimento, detto **ordine del filtro**.
- La **selettività** dei filtri attivi viene misurata mediante la loro capacità di attenuare i segnali di frequenza esterna alla banda passante, inoltre la selettività è legata alla **pendenza** della curva di guadagno.

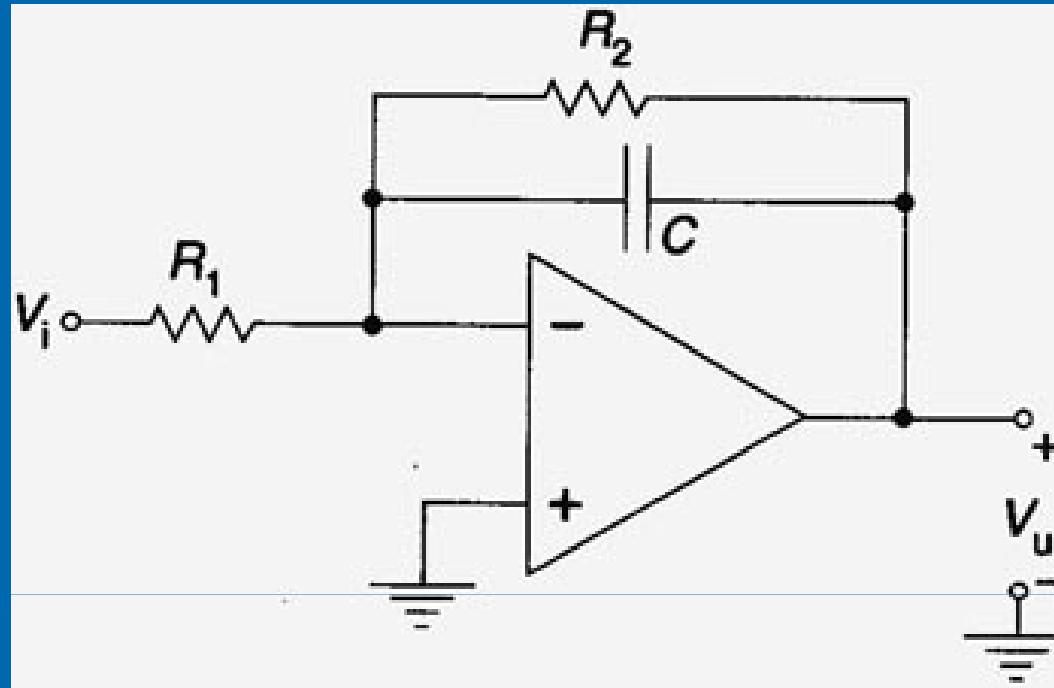
Andiamo ora ad analizzare i diversi tipi di filtri:

FILTRI PASSA BASSO (LP)

FILTRI PASSA ALTO (HP)

FILTRI PASSA BANDA (BP)

1. Filtro attivo passa-basso con A.O. (invertente)



Il circuito sopra rappresenta un filtro attivo passa-basso (invertente) con AO.

Alle basse frequenze il condensatore può essere considerato un ramo aperto (reattanza molto elevata), per cui la sua amplificazione è : $A_f = - R_2 / R_1$

Il suo limite di banda è : $f_t = B = 1 / 2\pi R_2 C$

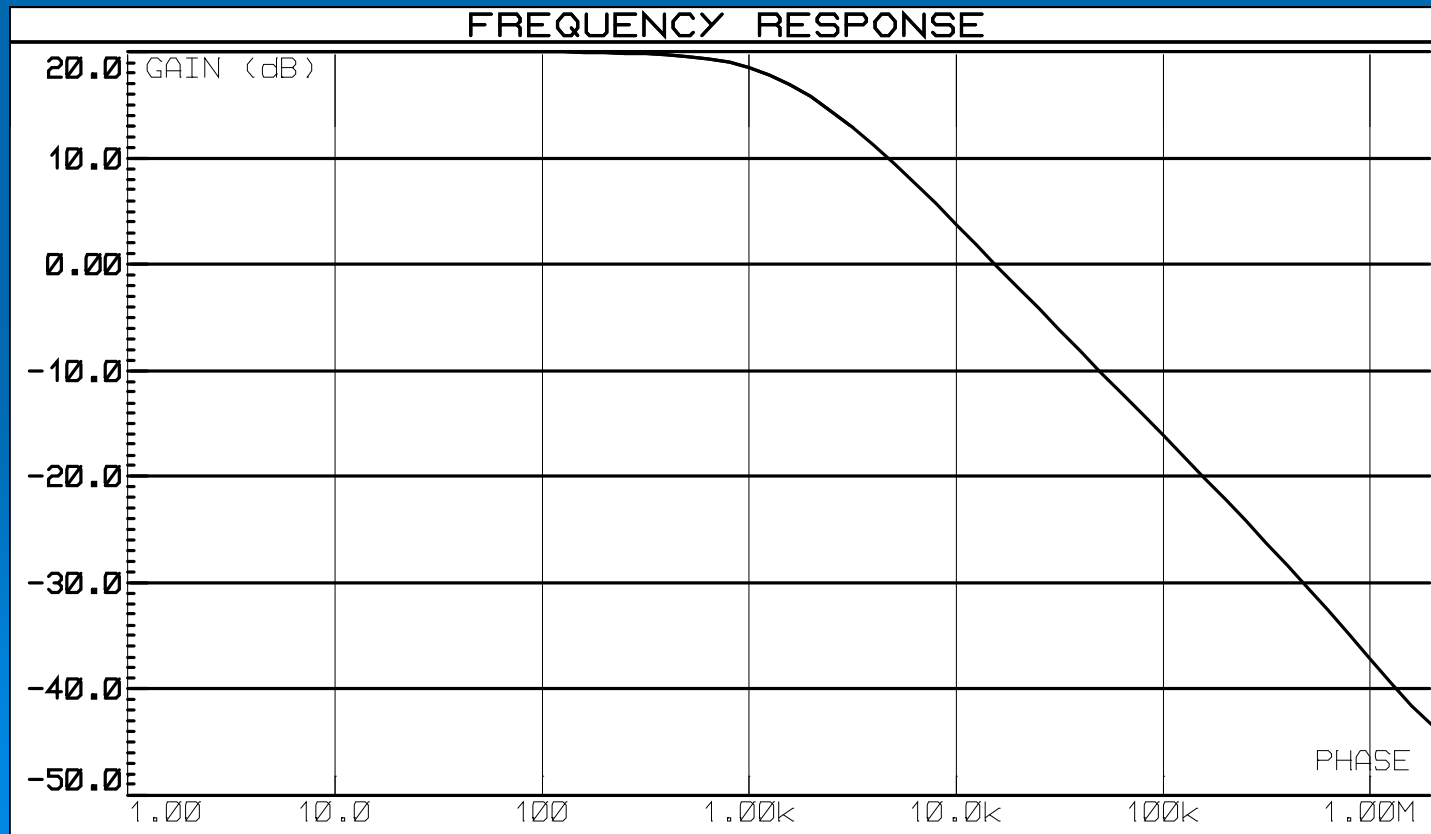
Ricaviamo la f.d.t. :

$$\overline{G} = - \overline{Z_p} / R1 \quad \overline{Z_p} = (R2 * 1 / j\omega C) / (R2 + 1 / j\omega C) = R2 / (1+ j\omega R2 C)$$

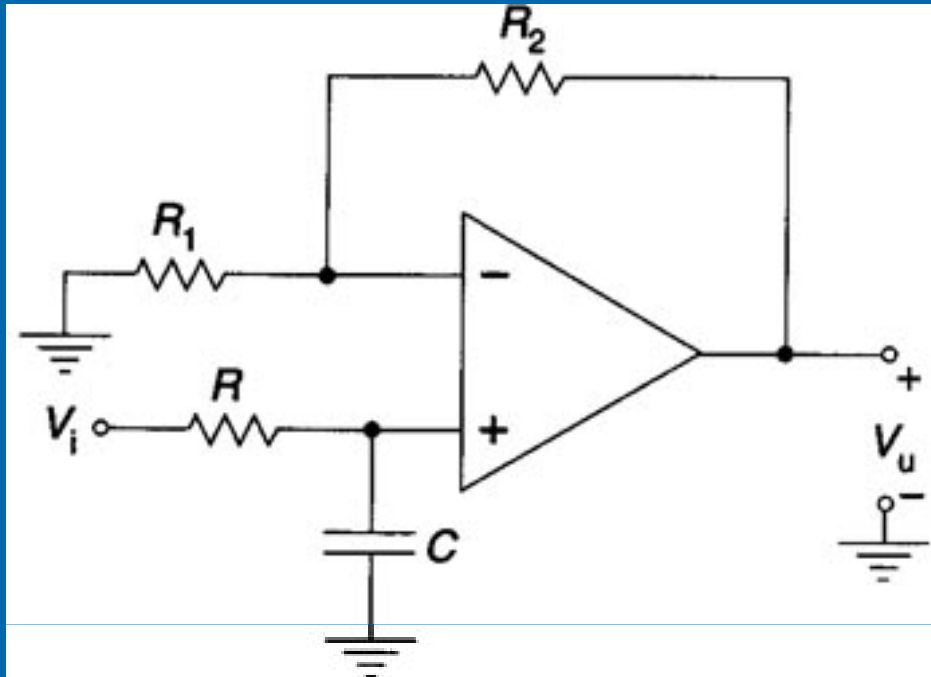
$$\overline{G} = - R2 / (R1 + j\omega R1R2 C) \quad \text{da cui si vede come } G (j0) = - R2 / R1 \\ \text{mentre } G(j\infty) = 0$$

Curva del guadagno con $R1 = 10 \text{ k}$ $R2 = 100 \text{ K}$ $C = 1 \text{ [nF]}$

$f_t = 1590 \text{ [Hz]}$

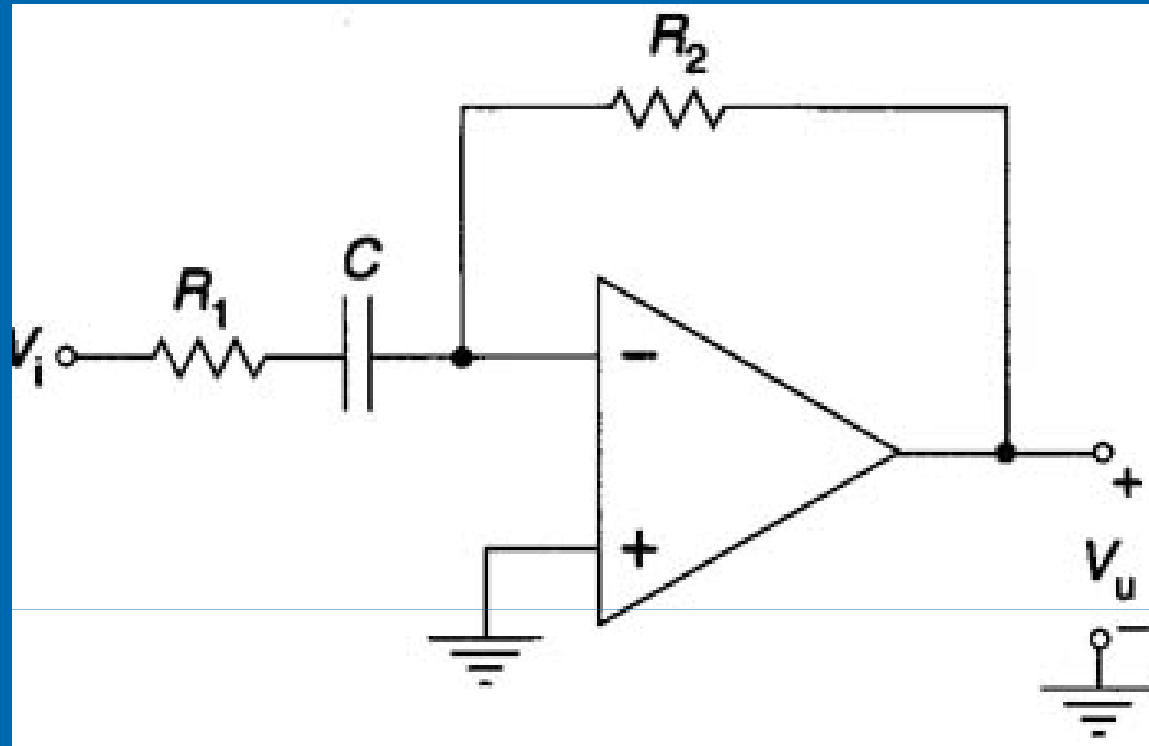


2. Filtro attivo passa - basso con A.O. (non invertente)



- Il circuito sopra rappresenta un filtro attivo passa-basso ma questa volta è **non invertente** perchè il segnale d'ingresso V_i è inserito sull'ingresso (+) , quello non invertente dell'operazionale.
- Il condensatore in continua è un circuito aperto, per cui $V_c = V_i$
- L' amplificazione , in **LF** , è : $G_{LF} = 1 + (R_2 / R_1)$
- Invece in **HF** il condensatore è un corto circuito, per cui $V_c = 0$ e anche $V_u = 0 \rightarrow G_{HF} = 0$
- Il suo limite di banda è : $f_t = B = 1 / 2\pi RC$

3. Filtro attivo passa - alto con AO (invertente)



Il circuito sopra è un **filtro attivo passa-alto (invertente)** con A.O.
Alle alte frequenze il condensatore può essere considerato come un cortocircuito (reattanza **Xc** trascurabile).

La sua amplificazione , in **HF** , è : **$G_{HF} = - R2 / R1$**

In **LF**, invece, il Condensatore non fa passare il segnale, per cui **$G_{LF}=0$**

Il suo limite di banda è : **$f_t = 1 / 2\pi R1C$**

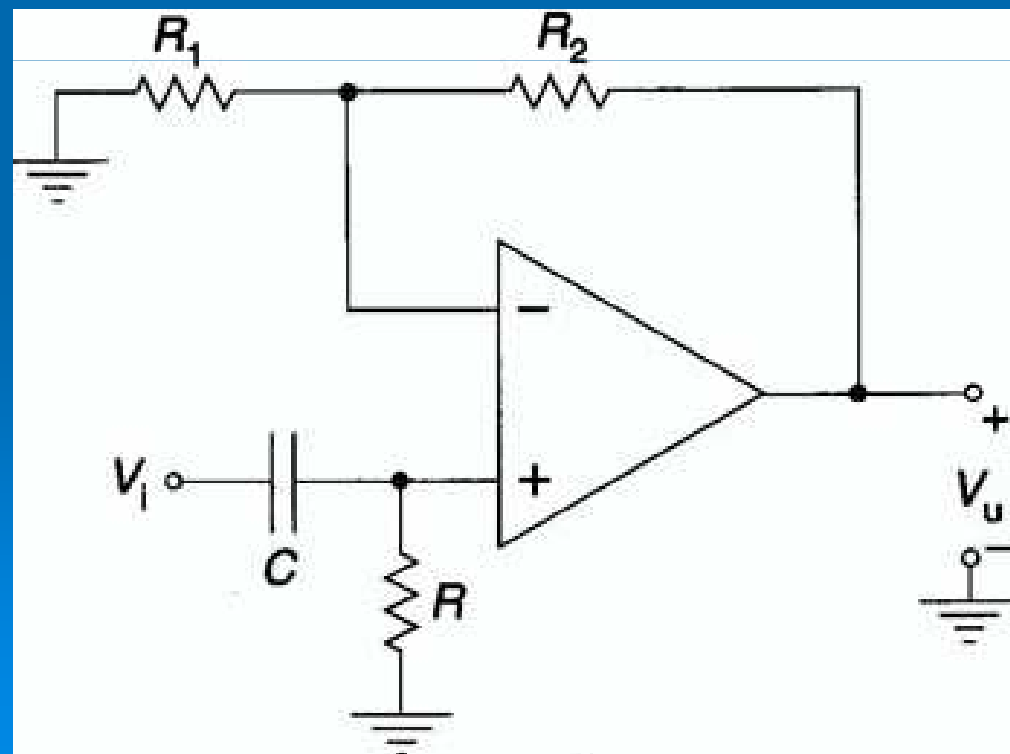
4. Filtro attivo passa-alto con A.O. (non invertente)

Il circuito sopra rappresenta sempre un filtro attivo passa-alto, ma questa volta **non invertente**, perchè avente il segnale d'ingresso sull'ingresso non invertente dell'operazionale.

Il condensatore è considerato anche adesso come un cortocircuito.

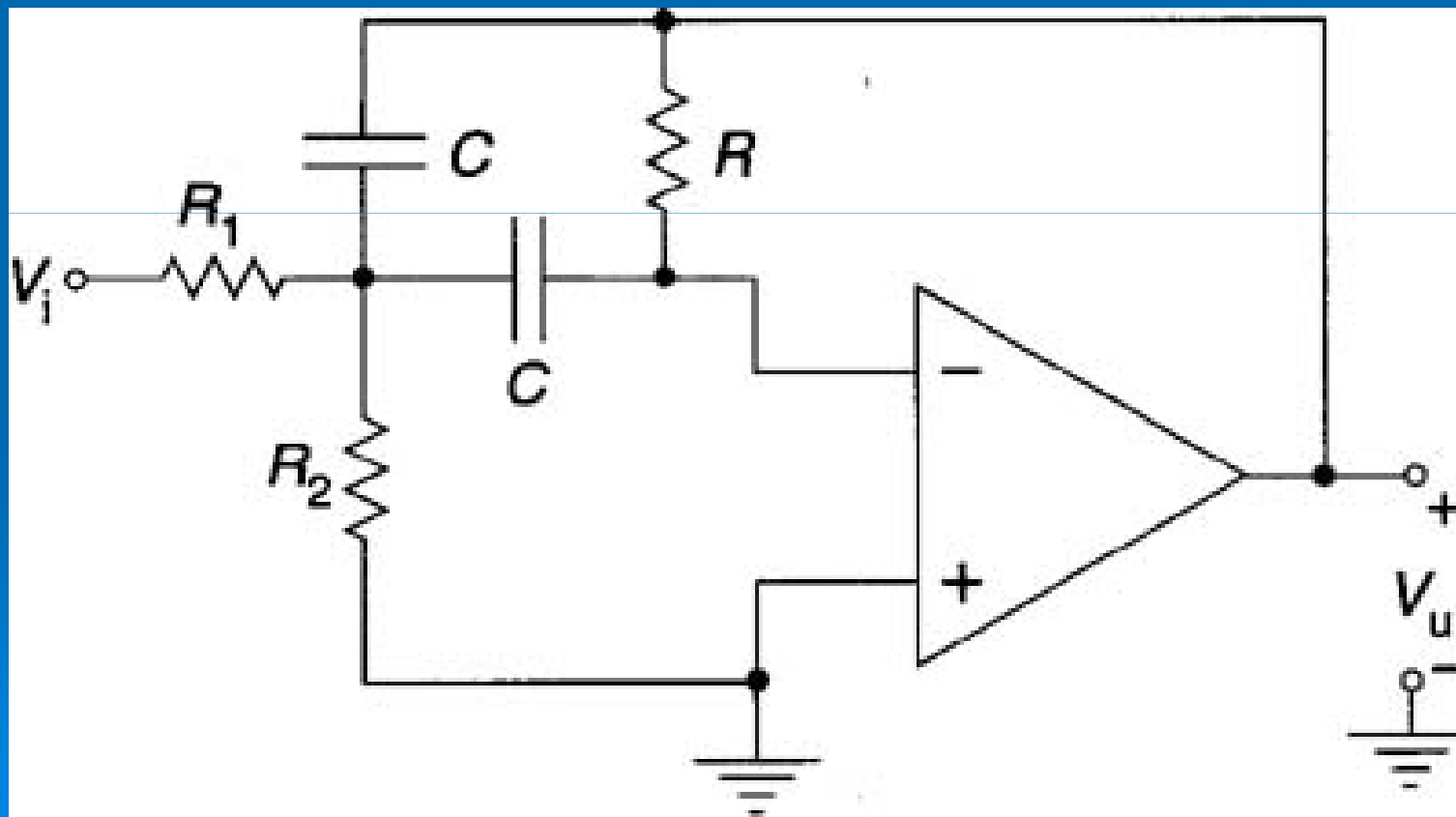
La sua amplificazione è : $G_{HF} = 1 + (R_2 / R_1)$

Il suo limite di banda è : $f_t = 1 / 2\pi RC$

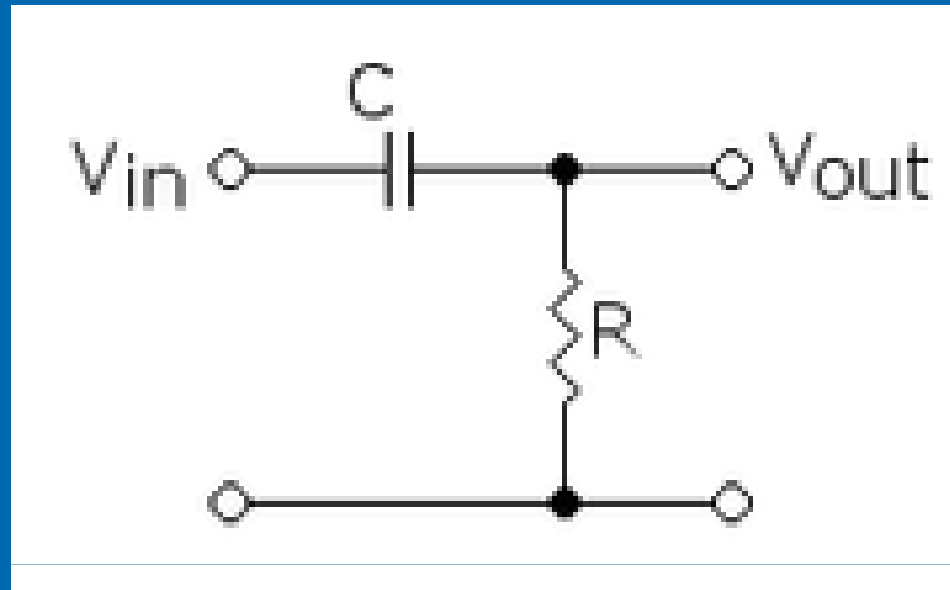


5. Filtro attivo passa-banda con AO

La sua amplificazione è : $G_{MF} = - R / 2 R_1$



Applicazioni e considerazioni Esercizio n°1:



Si vuole realizzare mediante un quadripolo RC un filtro **passa-alto**, disponendo di una resistenza $R=10$ [K Ω] e di una capacit  $C = 0,2$ [μ F] .

Calcolare la frequenza di taglio f_t , sapendo che il segnale che entra all'ingresso del quadripolo ha una $V_{eff} = 220$ [V] e una frequenza $f = 100$ [Hz]

Svolgimento

➤ Conoscendo il valore dei due componenti che formano il filtro, possiamo subito calcolare la f_t .

$$\begin{aligned} \text{➤ } f_t &= 1/2\pi RC = 1/ (2 * 3,14 * 10^4 * 0,2 * 10^{-6}) = \\ &= 1/ (6,28 * 10^4 * 0,2 * 10^{-6}) = \\ &= 1 / (12,56 * 10^{-3}) = \mathbf{79,6 [Hz]} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } V_i = V_c + V_r = 1/ j \omega C * I + R * I = I * (R + 1/ j \omega C)$$

$$\begin{aligned} X_c &= 1/\omega C = 1/2\pi f * C = 1/ (6,28 * 100 * 0,2 * 10^{-6}) = \\ &= 1/ 125,6 * 10^6 \approx 8 [K\Omega] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R - j * X_c \rightarrow \bar{Z} = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{10^8 + 64 * 10^6} = \sqrt{10^6 * (100 + 64)} = \\ &= \sqrt{10^6} * \sqrt{100 + 64} = 10^3 * \sqrt{164} = 12,8 [K\Omega] \end{aligned}$$

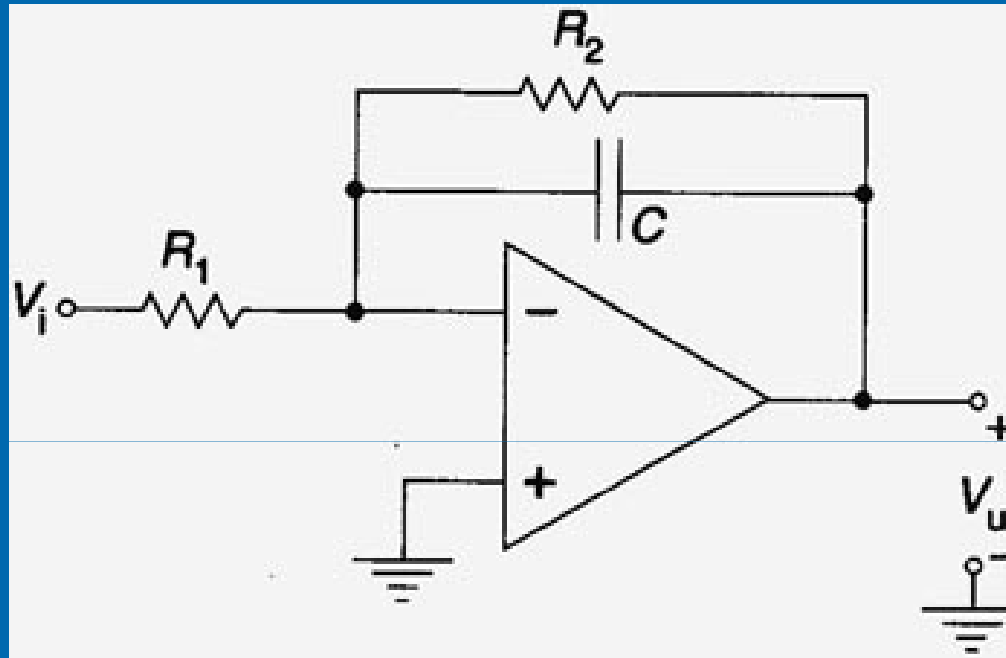
$$\bar{I} = \bar{V}_i / \bar{Z} = 220 / 12,8 * 10^3 = 17,18 [mA]$$

$$\bar{V}_u = R * \bar{I} = 10 * 10^3 * 17,18 * 10^{-3} = \mathbf{171,8 [V]}$$

Segnali a frequenze minori della frequenza di taglio vengono filtrati (attenuati e sfasati), mentre segnali a frequenze maggiori di f_t arrivano in uscita non attenuati nè sfasati.

Esercizio n°2

Dimensionare un **filtro passa-basso attivo** del 1° ordine, di tipo invertente, volendo ottenere un' amplificazione $G_{LF} = -10$ e una banda passante $B = 1$ [KHz] . Si conosce il valore della sola resistenza R_1 , pari a 1 [K Ω] .



Svolgimento:

$$G_{LF} = - R_2/R_1 = -10 \rightarrow R_2/R_1=10 \rightarrow R_2 = R_1*10 = 1*10 = 10 \text{ [K}\Omega \text{]}.$$

Conoscendo il valore di R_2 , basta ora calcolare il valore di capacità da utilizzare.

$$f_t = 1/2\pi R_2 * C \rightarrow C = 1/2\pi f_t R_2 \rightarrow = 1/ 2*3,14*10^4*10^3 = 1/62,8*10^6 = 0,016 \text{ [}\mu\text{F]} = 16 \text{ [nF]}$$