SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

Cenni Storici (Wikipedia)

Jean Baptiste Joseph Fourier (nato a Auxerre il 21 marzo 1768 e morto a Parigi il 16 maggio 1830) è stato un matematico e fisico, ma è conosciuto soprattutto per la sua famosa trasformata.

La sua istruzione si compì dapprima dai Benedettini, poi in una scuola militare. Partecipò alla Rivoluzione Francese, rischiando di essere ghigliottinato durante il periodo del Terrore, ma fu salvato dalla caduta di Robespierre. Entrò poi nella École Normale Supérieure, dove ebbe come professori, tra gli altri,Joseph-Louis Lagrange e Pierre Simon Laplace. Succedette anche a quest'ultimo nel ruolo di professore alla École Polytechnique nel 1797.

Fourier partecipò alla campagna d'Egitto di Napoleone nel 1798 e ricoprì un importante ruolo di diplomatico in quel paese. Al suo ritorno in Francia, nel 1801, fu nominato da Napoleone prefetto dell'Isère. Fu quindi lì, nella città di Grenoble, che condusse i suoi esperimenti sulla propagazione del calore che gli consentirono di modellizzare l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche. Questi lavori furono pubblicati nel 822in *Teoria analitica del calore*, ma furono molto contestati, specialmente da Laplace e Lagrange. Nel 1817 entrò a far parte dell'Accademia delle Scienze. A Grenoble incontrò il giovane Jean-François Champollion che, guardando la collezione dei geroglifici, decise che da grande sarebbero stati trascritti da lui (così racconta lo stesso Champollion in uno dei suoi scritti).

Tra i suoi maggiori contributi figurano: la teorizzazione della serie di Fourier e la conseguente Trasformata di Fourier in matematica e la formulazione dell'equazione generale della conduzione termica, denominata legge di Fourier, in termodinamica.

A lui è stato intitolato l'omonimo cratere sulla Luna.

Premessa

Per studiare le proprietà di un segnale si possono usare vari metodi e nonostante che l'esistenza fisica di un segnale temporale sia proprio nel dominio del tempo, si possono evidenziare meglio certe sue proprietà **proiettando il segnale** stesso in domini diversi da quello del tempo. Queste **proiezioni** avvengono tramite delle trasformazioni che rappresentano il segnale in domini virtuali, che rendono agevole l'analisi che si vuole compiere. Una di queste proiezioni è ottenuta tramite la **Trasformata di Fourier**, che utilizza il dominio della frequenza nel quale il segnale è rappresentato come un insieme di molte (eventualmente infinite) oscillazioni sinusoidali con diverse frequenza e fase.

Nella trasmissione delle informazioni, al fine di trasmettere nel modo migliore le informazioni contenute in un segnale, è necessario conoscere le sue caratteristiche. Un segnale, come già scritto, può essere studiato in diversi modi in base alle caratteristiche che vogliamo evidenziare. Di solito i segnali studiati nel corso di telecomunicazioni vengono analizzati almeno in due domini:

a) **Dominio del tempo**

b) **Dominio della frequenza**

I segnali che s'incontrano nelle applicazioni non sono quasi mai di tipo sinusoidale e quindi non sono facili da studiare, perché la loro forma appare a "strana". Il teorema di Fourier consente di ricondurre tali segnali ad una somma di semplici segnali sinusoidali. L'unica imposizione, per applicare il Teorema di Fourier è che i segnali devono essere di tipo periodico.

I segnali, come si è visto nel capitolo introduttivo si definiscono periodici quando il loro andamento nel tempo si ripete sempre uguale a se stesso dopo ogni particolare intervallo detto periodo T. La **frequenza fondamentale f_0** è l'inverso del periodo e si misura in Hertz, 1 Hz = [sec^{-1}]. Si definisce **pulsazione fondamentale** $\omega_0 = 2 \pi f_0$ e si misura è il rad/s.

Teorema di Fourier. Sviluppo in serie di Fourier per segnali periodici

Gli apparati elettronici operano solitamente con segnali di forma arbitraria, come ad esempio i segnali audio e video, che possiedono una quantità di informazione superiore ad un segnale puramente sinusoidale. Lo studio di tali circuiti in regime periodico, ma non sinusoidale si può effettuare semplicemente applicando il **Teorema di Fourier**:

una grandezza periodica, di periodo T, può essere rappresentata come somma di una infinità di funzioni sinusoidali.

Ognuna di queste funzioni sinusoidali, prende il nome di **armonica** e l'insieme delle armoniche è detto spettro. Ne segue che, una qualsiasi grandezza periodica di periodo T può essere rappresentata dalla seguente somma di funzioni sinusoidali chiamata serie di Fourier.

$$y(t) = Y_m + Y_{1M}\sin(\omega t + \varphi_1) + Y_{2M}\sin(2\,\omega t + \varphi_2) + Y_{3M}\sin(3\,\omega t + \varphi_3) + $$
$$+ Y_{4M}\sin(4\,\omega t + \varphi_4) + \dots + Y_{nM}\sin(n\,\omega t + \varphi_n) + \dots$$

FIGURA 1 - Sviluppo in serie di Fourier

dove:

Y_m	=	**valore medio della grandezza y(t)**
Y_{1M}	=	**ampiezza della componente fondamentale e con pulsazione uguale alla grandezza periodica applicata e chiamata armonica fondamentale**
Y_{nM}	=	**ampiezza dell'armonica ennesima (n-esima)**
φ_1	=	**fase delll'armonica fondamentale**
φ_n	=	**fase dell'armonica n-esima**

FIGURA 2 - Significato dei termini dello sviluppo in serie di Fourier

In altre parole, il teorema di Fourier dimostra come una grandezza periodica sia costituita, ad eccezione del termine costante $\mathbf{Y_m}$ (valore medio), da una somma di infinite grandezze sinusoidali: la prima con pulsazione e frequenza

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \qquad f_0 = 1/T$$

e le altre con frequenze (o pulsazione) che sono multiple intere della frequenza fondamentale f_0.

Il valor medio della grandezza $\mathbf{Y_m}$ è costante è viene anche chiamato **componente continua**.

Il risultato di una **somma armonica** sarà un'onda periodica, con lo stesso periodo dell'armonica fondamentale, di forma generica, non sinusoidale, e con media nulla. Se la somma armonica si estende ad infiniti termini si parla allora più correttamente di **serie armonica**.

Sia dato un circuito lineare e si desideri conoscere l'andamento dell'uscita del circuito, quando sull'ingresso sia applicato un segnale periodico non sinusoidale. Lo studio del comportamento del circuito, mediante il Teorema di Fourier si può effettuare analizzando il comportamento del circuito in regime sinusoidale, per ogni componente armonica e applicando il Principio della Sovrapposizione degli Effetti.

È vero che le componenti armoniche sono infinite, ma in realtà, se ne considerano solo alcune per ricostruire l'andamento dell'uscita **fedele** alla reale risposta del circuito. In fig. 3 è mostrato l'effetto dell'applicazione del Teorema di Fourier sullo studio di un circuito.

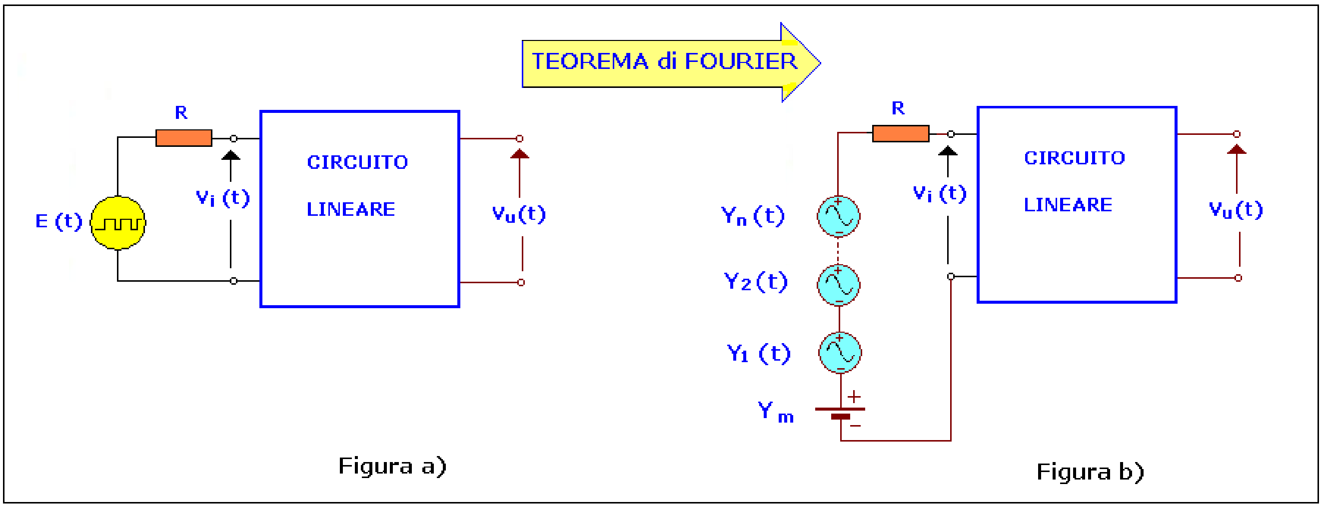

FIGURA 3 - Applicazione circuitale del Teorema di Fourier.

Somma armonica con termini seno e coseno.

Dall'Elettrotecnica, è noto che un **fasore** è un numero complesso e quindi è rappresentabile con un vettore rotante nel piano complesso (o di Gauss) ed è equivalente ad una funzione sinusoidale con una pulsazione ben definita, come la tensione o la corrente elettrica.

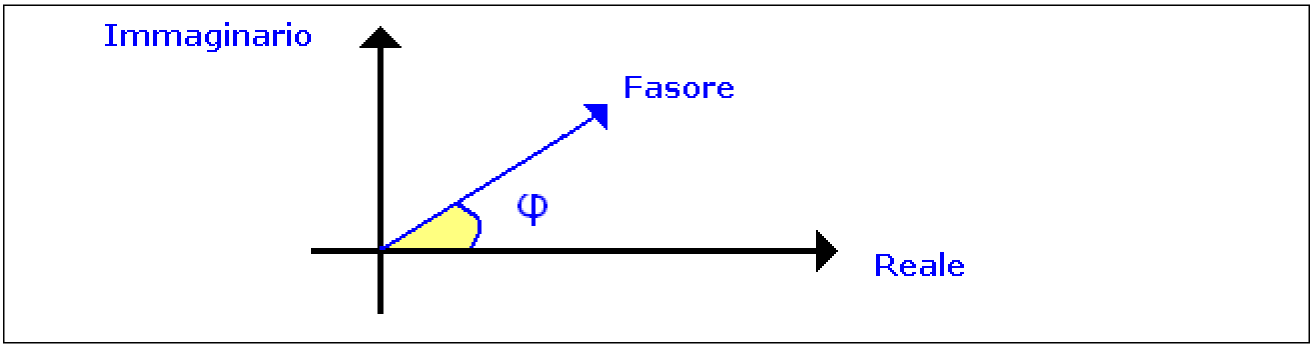

FIGURA 4 - Fasore nel piano di Gauss fermo ad un generico istante t.

Si consideri il termine generico di una somma armonica $\mathbf{Y_{nM}\ sin(n\omega t+\varphi_n)}$. Si può pensare tale armonica associata ad un fasore di modulo $\mathbf{Y_{nM}}$ e fase $\boldsymbol{\varphi_n}$.

Il fasore di Fig. 4 si può considerare come somma dei due fasori: $\mathbf{A_n}$ con fase 0° e $\mathbf{B_n}$ con fase 90°, che sono rispettivamente le sue due proiezioni sugli assi Reale e Immaginario, come mostrato in Fig.5.

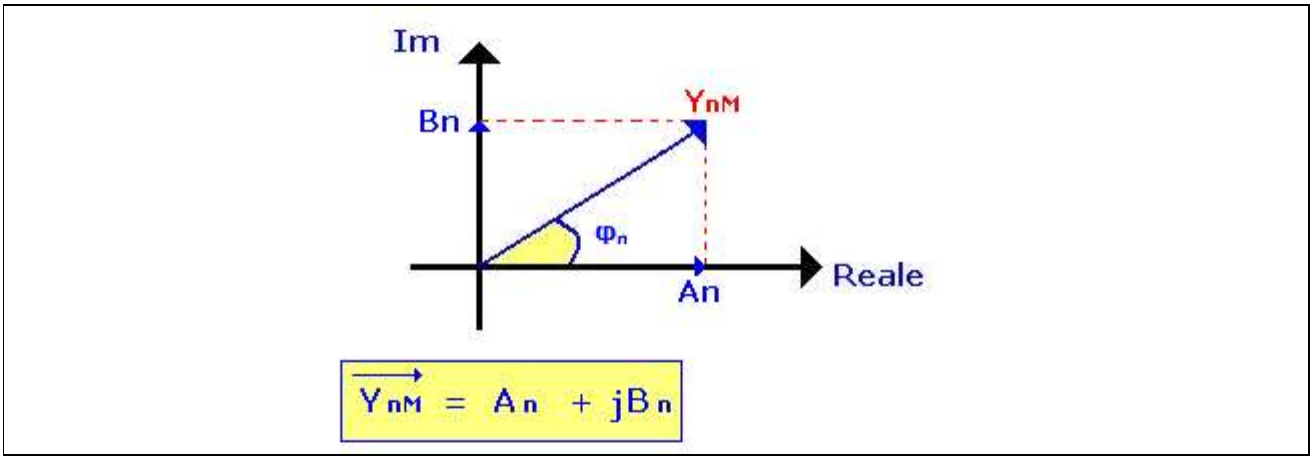

FIGURA 5 - Fasore e sue componenti nel piano di Gauss.

In forma trigonometrica, An e Bn si possono scrivere come:

$$A_n = Y_{nM} \cos(\varphi_n) \qquad\qquad B_n = Y_{nM} \sin(\varphi_n)$$

$$Y_{nM} = Y_{nM} \cos(\varphi_n) + j\, Y_{nM} \sin(\varphi_n)$$

Nel dominio del tempo, se si conto, non solo della fase iniziale, φ_n, ma anche dell'avanzamento in funzione del tempo, ωt, l'espressione del fasore Y_{nM} in forma trigonometrica e in funzione delle sue componenti A_n e B_n è:

$$Y_{nM} \sin(n\omega t + \varphi_n) = Y_{nM} \cos(n\omega t + \varphi_n) + j\, Y_{nM} \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Allo stesso risultato si perveniva applicando la regola trigonometrica del seno della somma di due angoli:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Infatti, nel caso della prima armonica, che ha **n = 1**, si ha:

$$Y_{1M} \sin(\omega t + \varphi_1) = Y_{1M} \cos(\omega t) \sin(\varphi_1) + Y_{1M} \sin(\omega t) \cos(\varphi_1)$$

Ponendo: $A_{1M} = Y_{1M} \sin(\varphi_1)$ **e** $B_{1M} = Y_{1M} \cos(\varphi_1)$ si ottiene

$$Y_{1M} \sin(\omega t + \varphi_1) = A_{1M} \cos(\omega t) + B_{1M} \sin(\omega t)$$

Ripetendo la stessa operazione per le altre armoniche, la serie di Fourier si può scrivere nella seguente forma:

$$\begin{aligned} y(t) = Ym + {} & A_{1M} \cos(\omega t) + B_{1M} \sin(\omega t) + A_{2M} \cos(2\omega t) + \\ & B_{2M} \sin(2\omega t) + A_{3M} \cos(3\omega t) + B_{3M} \sin(3\omega t) + A_{4M} \cos(4\omega t) + \\ & B_{4M} \sin(4\omega t) + \dots + \end{aligned}$$

Raggruppando tutti i termini in seno e tutti quelli in coseno, si ottiene la seguente forma:

$y(t) = Ym + A_{1M} \cos(\omega t) + A_{2M} \cos(2\omega t) + A_{3M} \cos(3\omega t) + A_{4M} \cos(4\omega t) + \ldots$

$+ B_{1M} \sin(\omega t) + B_{2M} \sin(2\omega t) + B_{3M} \sin(3\omega t) + B_{4M} \sin(4\omega t) + \ldots$

Da cui:

$$y(t) = Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nM} \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nM} \sin(n\omega t)$$

$$= Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{nM} \cos(n\omega t) + B_{nM} \sin(n\omega t) \right]$$

FIGURA 6 - Sviluppo in serie di Fourier in forma trigonometrica.

I termini **A_{nM}** e **B_{nM}** sono chiamati anche **coefficienti Fourier.**

L'espressione sopra si legge: y(t) è uguale al valore medio più la somma di n termini, del tipo **$A_{nM} \cos(n\omega t) + B_{nM} \sin(n\omega t)$** quando n assume tutti i valori interi che vanno da 1 all'∞.

Dell'armonica fondamentale si è già detto. Le armoniche che hanno un valore di frequenza multiplo della fondamentale secondo valori pari di n e precisamente con n =2,4,6,8,10,… sono chiamate **armoniche pari**. Le armoniche, le cui frequenze sono un multiplo intero dispari della fondamentale sono dette **armoniche dispari**, con n = 3,5,7,9,11,… .

Quando si è in presenza di armoniche, in genere, le componenti dispari sono dominanti, mentre quelle pari, se esistono, sono molto più piccole.

Le armoniche pari, hanno un impatto completamente diverso a quello delle armoniche dispari, in quanto creano una componente continua nelle apparecchiature magnetiche (motori trasformatori, ecc…).

Le norme IEEE519 (Pratiche Consigliate e Regolamentazioni per il Controllo delle Armoniche nei Sistemi di Alimentazione Elettrica) specificano un limite massimo di 25% di armoniche pari e vietano l'uso di convertitori a mezza onda per evitare condizioni di offset in continua che possano diventare pericolosi.

Funzioni pari e funzioni dispari. Semplificazione della serie di Fourier per effetto delle simmetrie.

1- Funzione Pari

Una funzione y = f(t) si dice pari se calcolando f(-t) risulta :

$$f(t) = f(-t)$$ per ogni t del dominio.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle y. Ad esempio

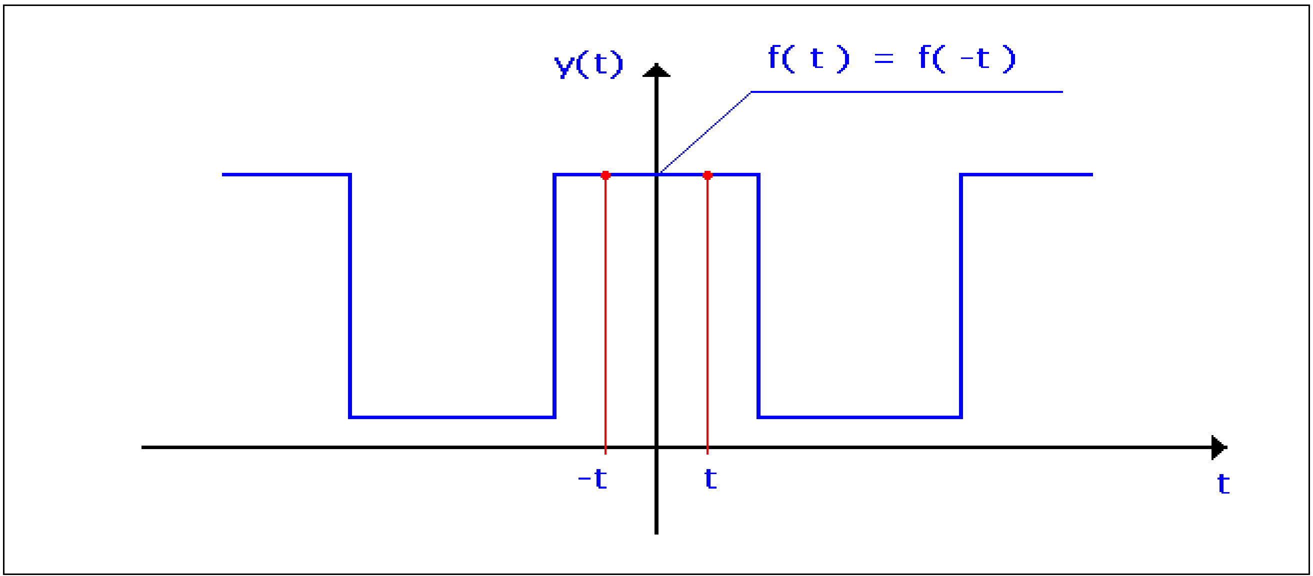

FIGURA 7 - Esempio di funzione pari. Si osservi la simmetria rispetto all'asse delle y.

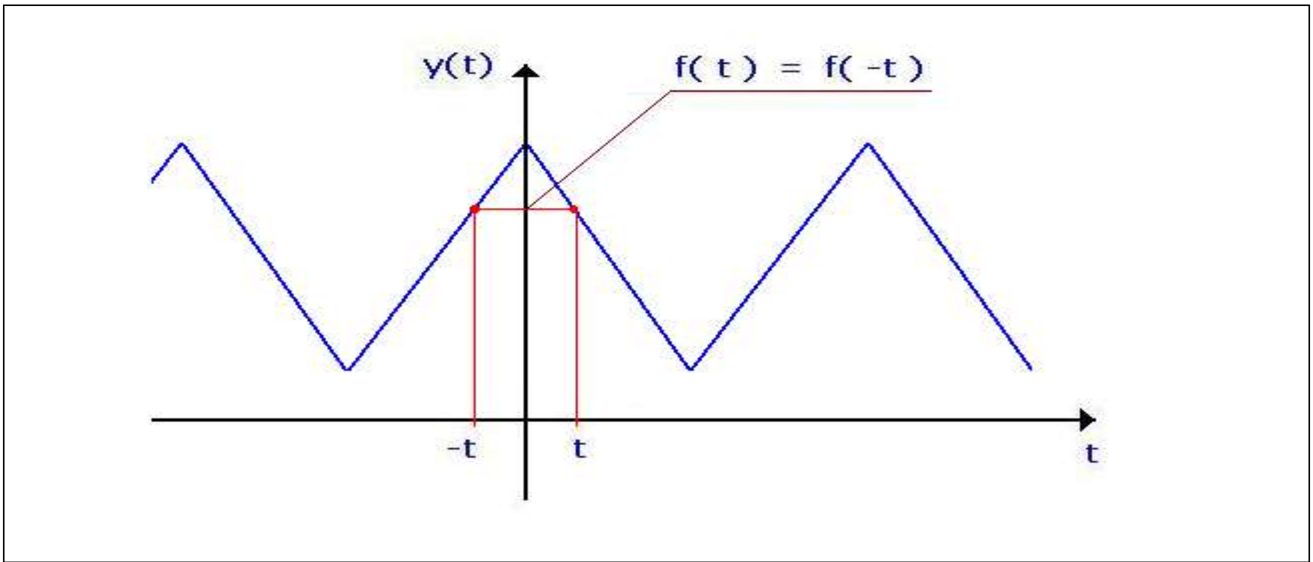

FIGURA 8 - Altro esempio di funzione pari.

Nello sviluppo in serie di Fourier di **funzioni pari**, si avranno solo **armoniche di tipo cosinusoidali**, perché tutte le armoniche seno sono nulle, perché $\mathbf{B_{nM} = 0}$ per qualsiasi valore intero di n.

Lo sviluppo in serie di Fourier per effetto di questa simmetria si semplifica in:

$$y(t) = Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nM} \cos(n\omega t)$$

FIGURA 9 - Sviluppo in serie di Fourier per una funzione pari.

2- Funzione Dispari

Una funzione y = f(t) si dice dispari se calcolando f(-t) risulta :

f(t) = - f(-t) per ogni t del dominio.

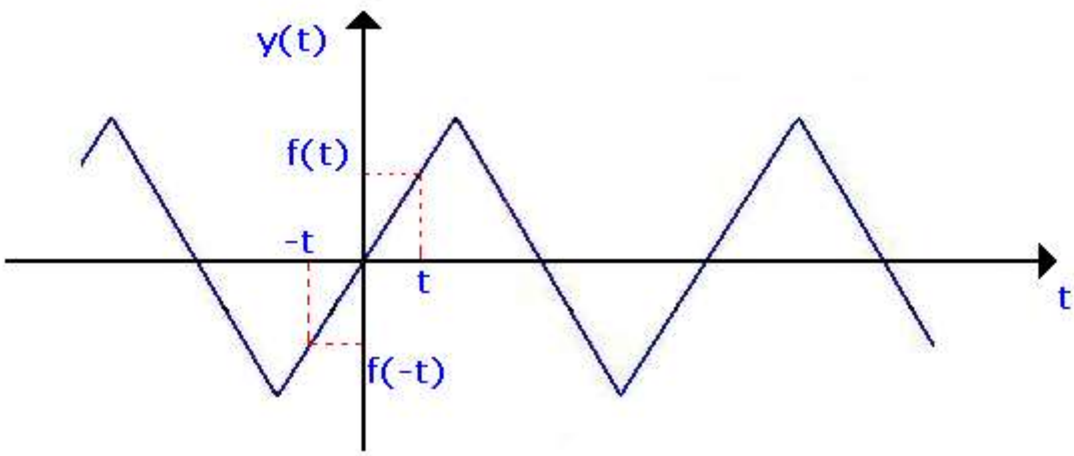

FIGURA 10 - Esempio di funzione dispari. Si osservi la simmetria rispetto all’origine degli assi.

Nel relativo sviluppo in serie di Fourier di **funzioni dispari** saranno presenti solo **armoniche di tipo sinusoidali**, perché tutte le armoniche coseno sono nulle, come conseguenza del fatto che $\mathbf{A_{nM} = 0}$ per qualsiasi valore intero di n. Lo sviluppo in serie di Fourier per effetto di questa simmetria si semplifica in:

$$y(t) = Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nM} \sin(n\omega t)$$

FIGURA 11 - Sviluppo in serie di Fourier per una funzione dispari.

Un altro esempio di funzione dispari è mostrato in Fig. 12

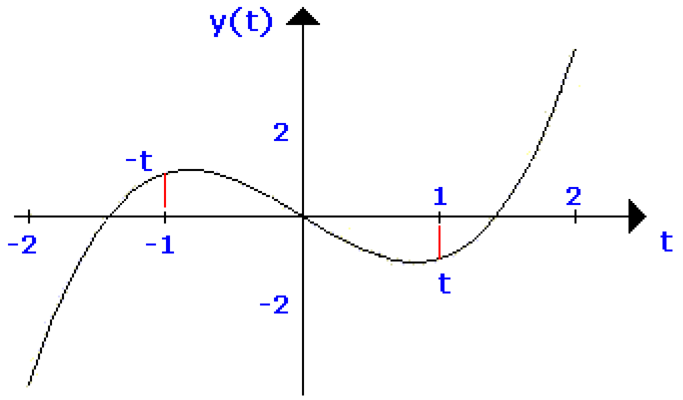

FIGURA 12 - Altro esempio di funzione dispari.

3- Funzione periodica Alternata

Una funzione periodica y = f(t) si definisce alternata quando ha **valor medio nullo**. Non necessariamente, però, una funzione periodica è alternata; infatti, perché ciò avvenga occorre che il suo valor medio sia nullo.

Da questa definizione deriva che queste funzioni alternano valori positivi e valori negativi e per soddisfare la condizione che il valor medio sia nullo, l'area racchiusa dal semiperiodo positivo con l'asse orizzontale sia uguale a quella racchiusa dal semiperiodo negativo con l'asse orizzontale.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{nM} \cos(n\omega t) + B_{nM} \sin(n\omega t) \right]$$

FIGURA 13 – Sviluppo in serie di una funzione alternata.

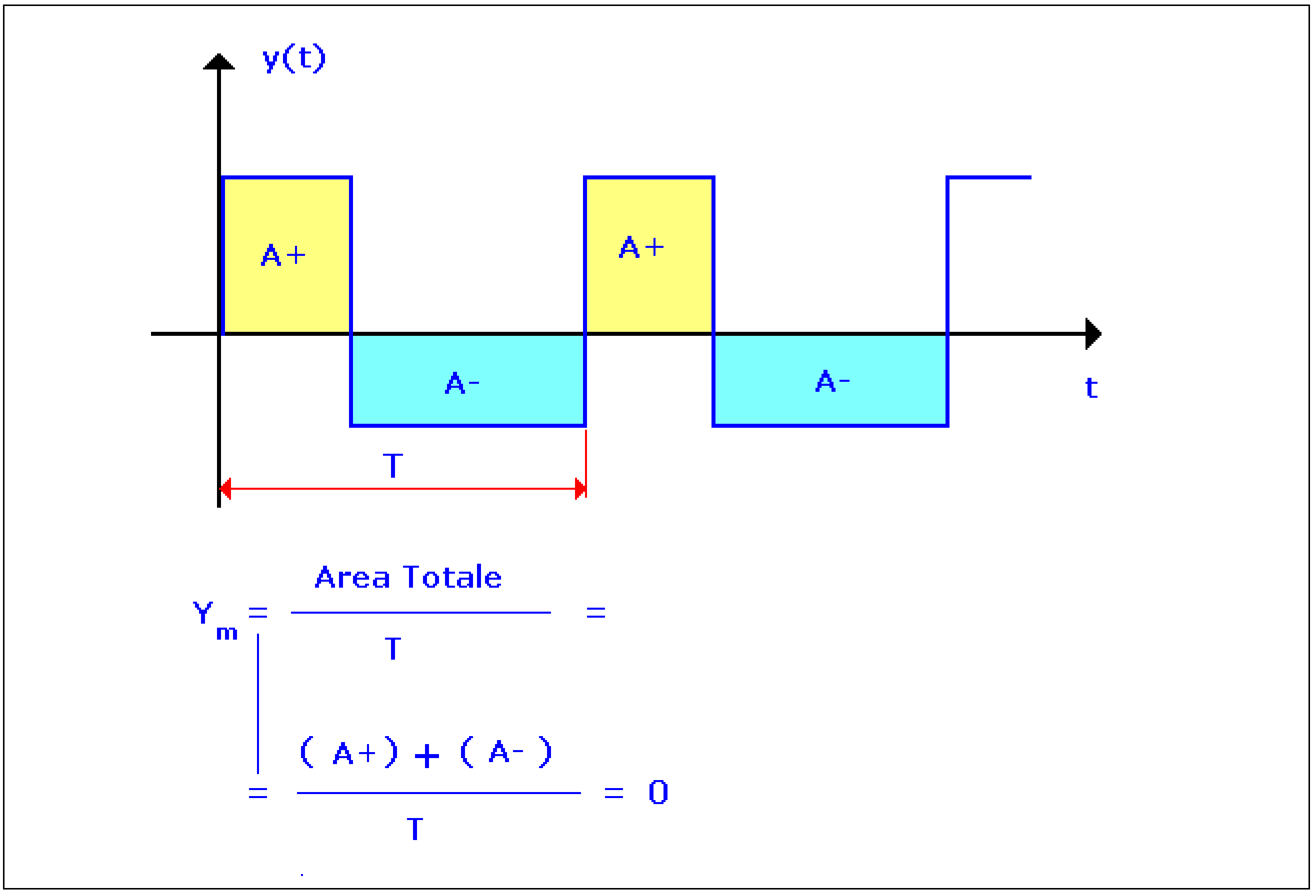

FIGURA 14 – Andamento temporale di una funzione alternata.

Una **funzione pari** è sviluppabile in soli serie di coseni, $\mathbf{B_{nM} = 0}$.

Una **funzione dispari** è sviluppabile in soli serie di seni, $\mathbf{A_{nM} = 0}$.

Sviluppo in serie di Fourier di un'onda quadra

L'andamento di un'onda quadra in funzione del tempo è mostrata in figura:

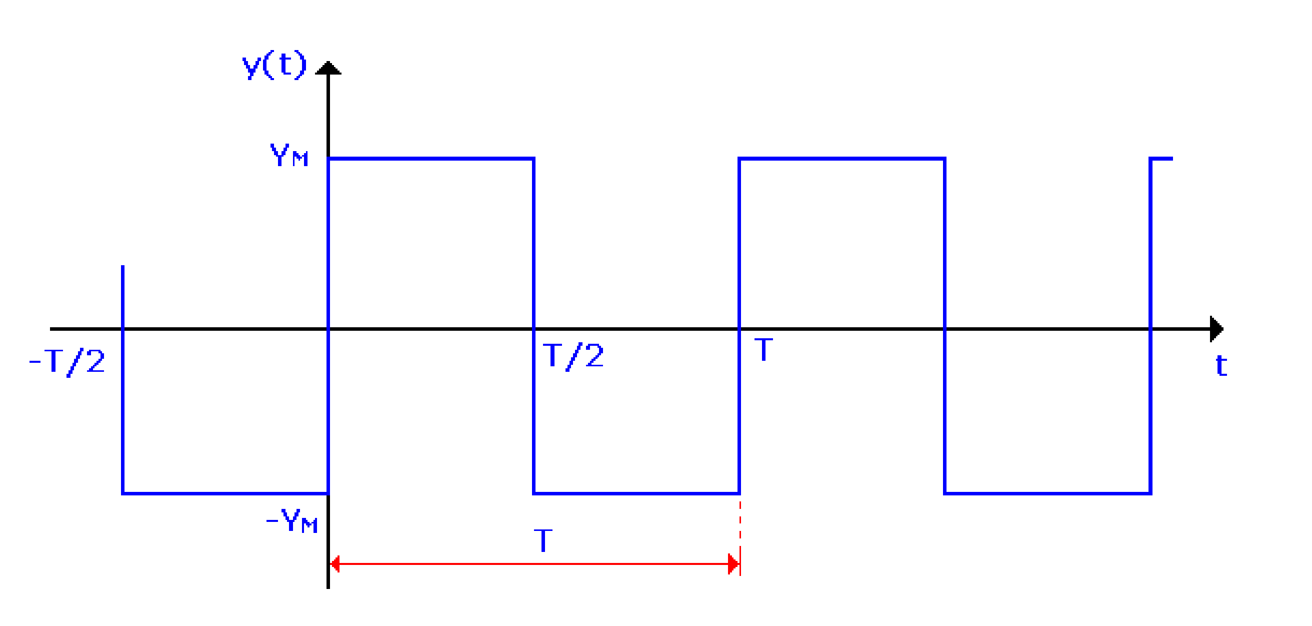

FIGURA 15 – Andamento temporale di un'onda quadra.

La funzione di Fig. 15 è una funzione alternata dispari, perché simmetrica rispetto all'origine degli assi; quindi, sia il coefficiente $\mathbf{Y_m}$, il valor medio, sia i coefficienti $\mathbf{A_{nM}}$ dei termini in coseno saranno nulli nello sviluppo in serie di Fourier. Ne segue che saranno presenti solo le armoniche sinusoidali dispari:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nM} \sin(n\omega t) \qquad \text{con} \quad n = 1,3,5,7,\ldots$$

FIGURA 16 – Espressione dello sviluppo in serie di Fourier di un'onda quadra.

Il coefficiente di Fourier si calcola risolvendo un integrale definito in un intero periodo e precisamente da −T/2 a +T/2. Il risultato di questo calcolo è mostrato di seguito.

$$B_{nM} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

$$= \frac{4 \cdot Y_M}{n \cdot \pi} \qquad \text{con n = 1,3,5,7}$$

FIGURA 17 – Espressione del coefficiente di Fourier per un'onda quadra alternata.

Sostituendo il valore del coefficiente nell'espressione della serie, si ottiene:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nM} \sin(n\omega t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot Y_M}{n \cdot \pi} \sin(n\omega t) \qquad \text{con} \quad n = 1,3,5,7,\ldots$$

FIGURA 18 – Sviluppo in serie di Fourier per un'onda quadra alternata.

Lo sviluppo in serie completo per l'onda quadra alternata è mostrato di seguito

$$y(t) = \frac{4\, Y_M}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \ldots + \right)$$

FIGURA 19 – Sviluppo in serie di Fourier per un'onda quadra alternata.

Esercizio

Sviluppare in serie di Fourier un'onda quadra alternata avente frequenza f= 1K Hz e Y_M = 5 V.

Soluzione

La soluzione dell'esercizio richiede di:

a) disegnare la forma d'onda;
b) calcolare il valor medio Y_m;
c) calcolare i coefficienti di Fourier;
d) disegnare lo spettro delle ampiezze delle armoniche in funzione del numero delle armoniche;
e) disegnare le forme d'onda delle armoniche.

Di seguito verranno sviluppati nell'ordine i vari punti.

1) Forma d'onda.

L'andamento della funzione è semplice da disegnare:

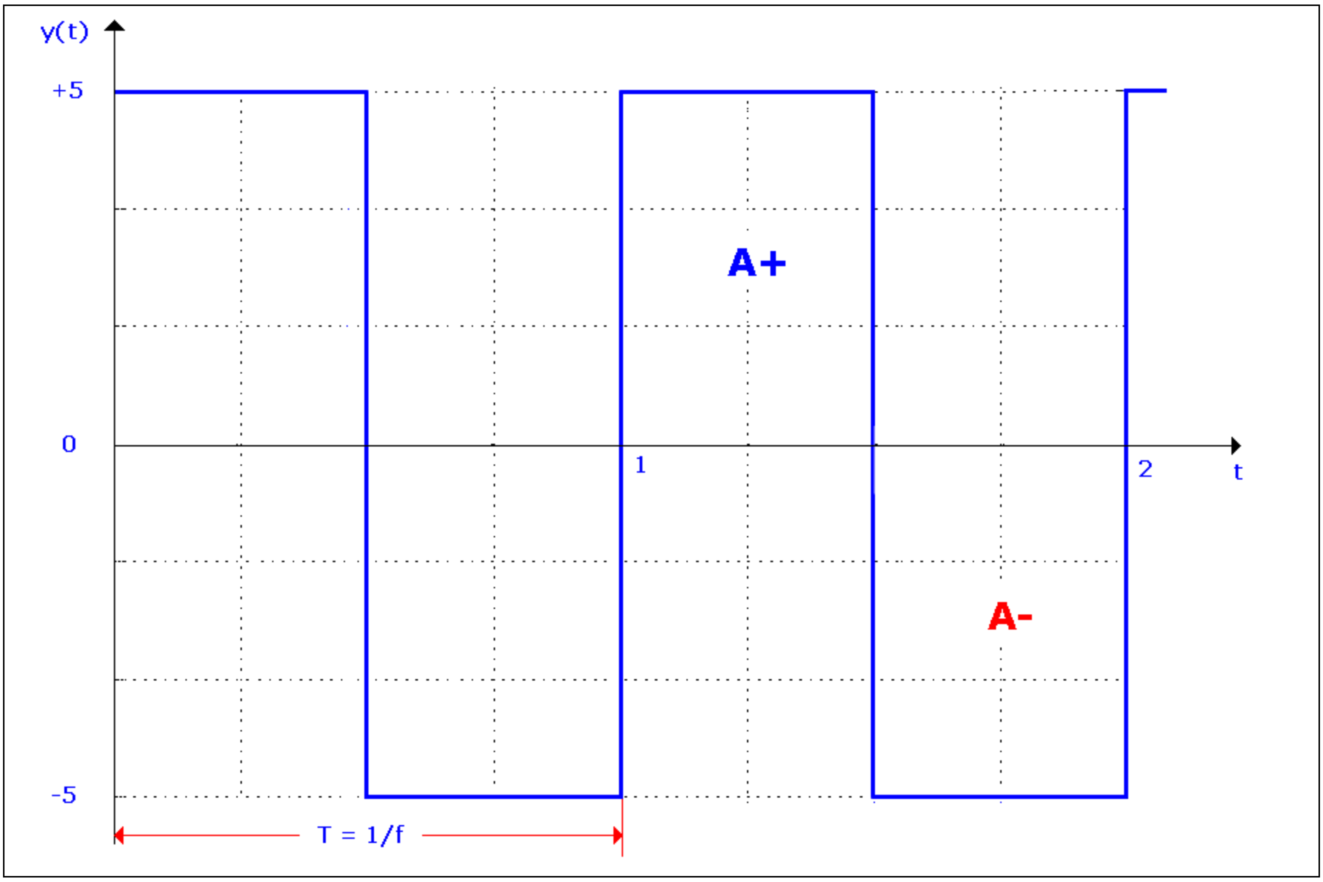

FIGURA 20 – Forma d'onda di un'onda quadra alternata.

2) Valore medio

Il valor medio si calcola con la seguente relazione:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, dt$$

FIGURA 21 – Espressione per il calcolo del valor medio.

Il valor medio si calcola moltiplicando l'inverso del periodo per l'area calcolata con l'integrale definito nell'intervallo di tempo compreso in un periodo (da 0 a T). L'integrale definito è uno strumento matematico che consente di calcolare aree, in particolare, di funzioni il cui andamento non sia geometricamente noto. L'area da calcolare è la parte di piano sottesa dalla forma d'onda e l'asse del tempo in un periodo.

Nel caso dell'onda quadra alternata, il cui andamento è geometricamente noto, per determinare il valor medio non è necessario ricorrere all'integrale per calcolare l'area sottesa dalla funzione d'onda in un periodo; infatti, in un periodo vengono descritti due rettangoli (quadrati): uno sopra l'asse dei tempi ed uno sotto tale asse. L'area totale $\mathbf{A_T}$ in un periodo, quindi si ottiene sommando algebricamente i valori dell'area positiva **A+** e dell'area negativa **A-** . Il valoro medio si calcola dividendo tale somma per il periodo T.

$$Y_m = \frac{A_T}{T} = \frac{A_+ + A_-}{T} = \frac{\frac{T}{2} * 5 + \frac{T}{2} * (-5)}{T} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{T}}{2} * (5 - 5)}{\cancel{T}} = 0 \ [V]$$

FIGURA 22 – Calcolo del valor medio.

Come già anticipato il valor medio di onda alternata è **NULLO**.

3) Coefficienti di Fourier

Per il calcolo dei coefficienti di Fourier si utilizza l'espressione di fig. 17. Questa espressione consente di calcolare tutti i coefficienti di Fourier sostituendo ad n i valori interi 1,4,5,7,9…, . Si tenga presente che i contributi delle armoniche con n molto elevato alla forma del segnale sono sempre meno significativi, man mano che n cresce. Per questo motivo ci si ferma, ad esempio, all'armonica di ordine 9.

Per n = 1 si ottiene $\quad Y_{1M} = \dfrac{4 * Y_M}{n * \pi} = \dfrac{4 * 5}{1 * \pi} = \dfrac{20}{3.14} = 6.37 \ [V]$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi * 1000 = 6283.18 \quad [rad/s]$

Per n = 3 si ottiene $\quad Y_{3M} = \dfrac{4 * Y_M}{n * \pi} = \dfrac{4 * 5}{3 * \pi} = 2.12 \ [V]$

$3\omega = 2\pi * 3f_0 = 6\pi * 1000 = 18.84 \ K \ [rad/s]$

Per n = 5 si ottiene $\quad Y_{5M} = \dfrac{4 * Y_M}{n * \pi} = \dfrac{4 * 5}{5 * \pi} = 1.27 \ [V]$

$5\omega = 2\pi * 5f_0 = 10\pi * 1000 = 31.42 \ K \ [rad/s]$

Per n = 7 si ottiene $\quad Y_{7M} = \dfrac{4 * Y_M}{n * \pi} = \dfrac{4 * 5}{7 * \pi} = 0.91 \ [V]$

$7\omega = 2\pi * 7f_0 = 14\pi * 1000 = 43.98 \ K \ [rad/s]$

Per n = 9 si ottiene $\quad Y_{9M} = \dfrac{4 * Y_M}{n * \pi} = \dfrac{4 * 5}{9 * \pi} = 0.71 \ [V]$

$9\omega = 2\pi * 9f_0 = 18\pi * 1000 = 56.55 \ K \ [rad/s]$

FIGURA 23 – Calcolo dei primi coefficienti di Fourier.

4) Spettro delle ampiezze delle armoniche

Lo spettro delle ampiezze delle armoniche, riporta l'ampiezza di ciascuna armonica, in corrispondenza del numero n per cui è stato il corrispondente termine di Fourier. In fig.24 l'ampiezza corrispondente al numero 1 (colore marrone) è detta ampiezza dell'armonica principale o fondamentale. Si noti come all'aumentare del numero n, l'ampiezza delle armoniche diventi sempre più piccola. Inoltre, si noti anche che le armoniche di ordine pari non sono presenti nello spettro delle ampiezze.

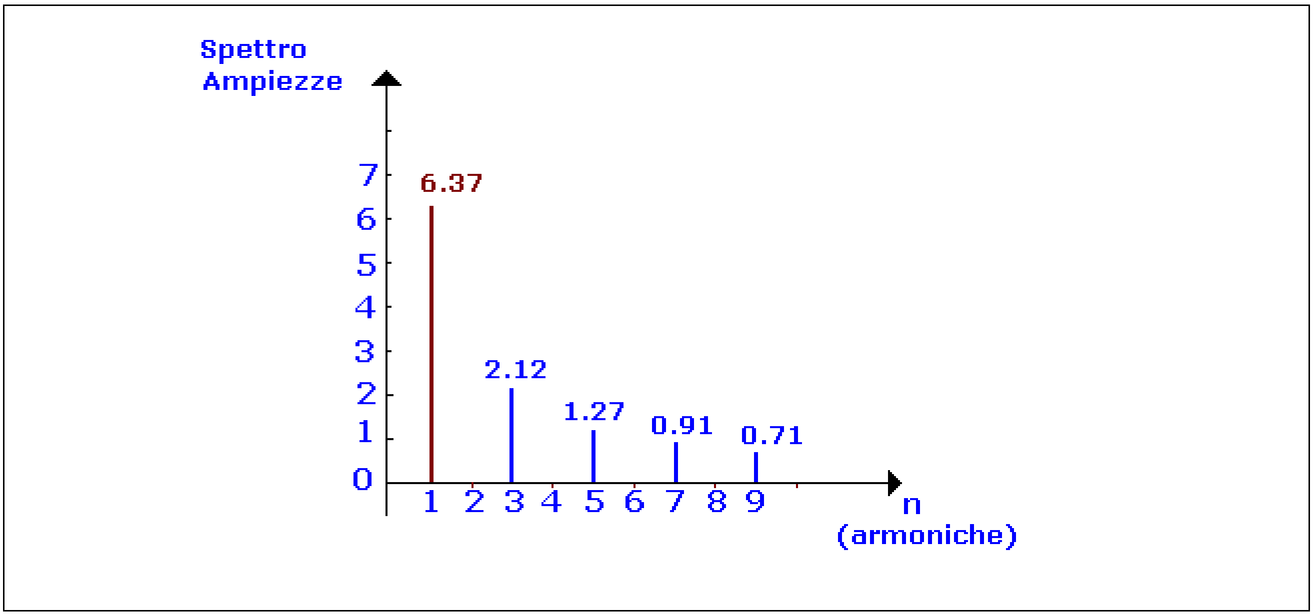

FIGURA 24 – Spettro delle ampiezze.

5) **Forme d'onda delle armoniche**

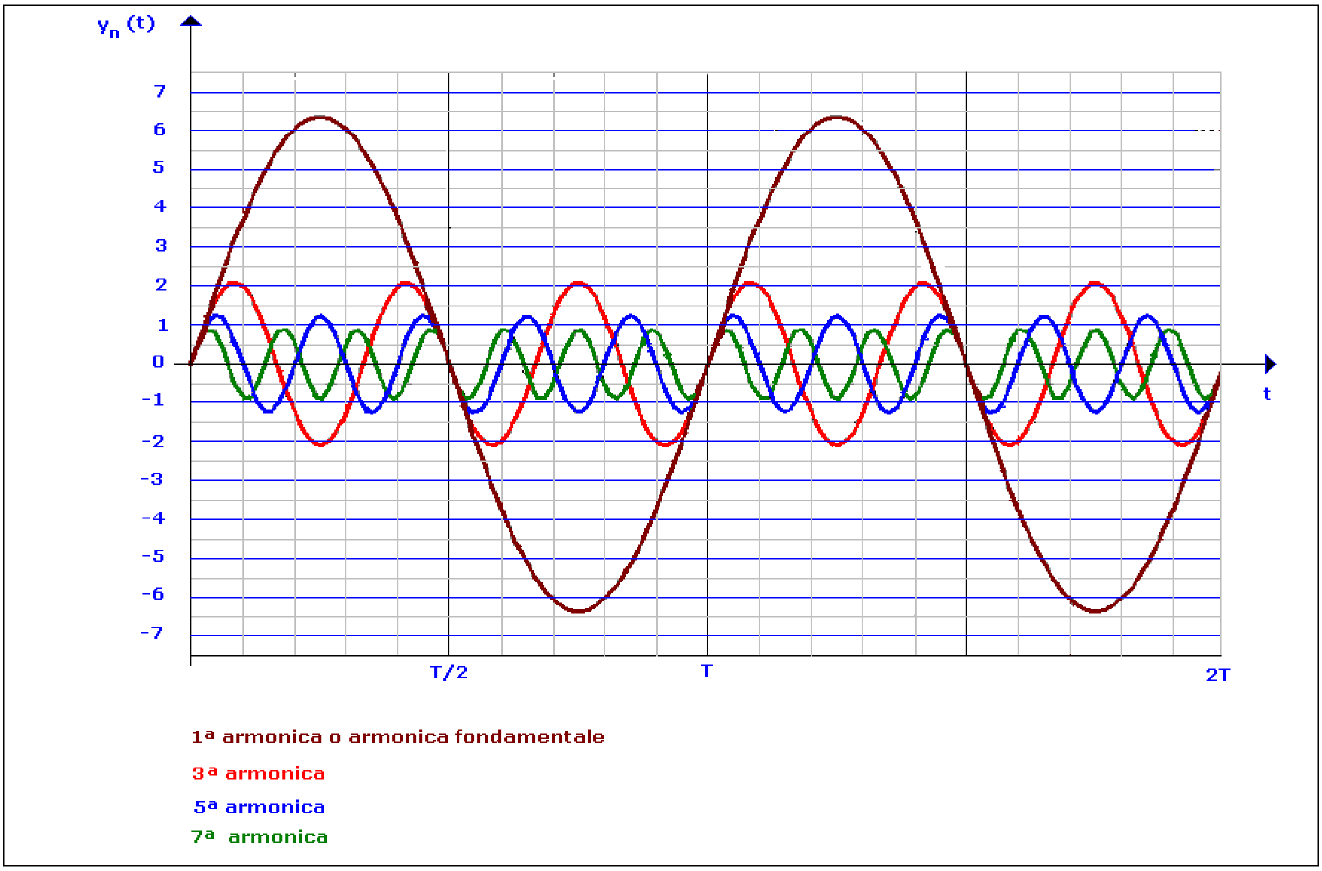

FIGURA 25 – Forma d'onda della 1ª, 3ª, 5ª, 7ª armonica.

La terza armonica oscilla completamente 3 volte in un periodo; la quinta armonica oscilla completamente 5 volte in un periodo e la settima armonica oscilla completamente 7 volte in un periodo.

Gli effetti delle armoniche sulla costruzione dell'onda quadra alternata è mostrata nel grafico di fig. 26.

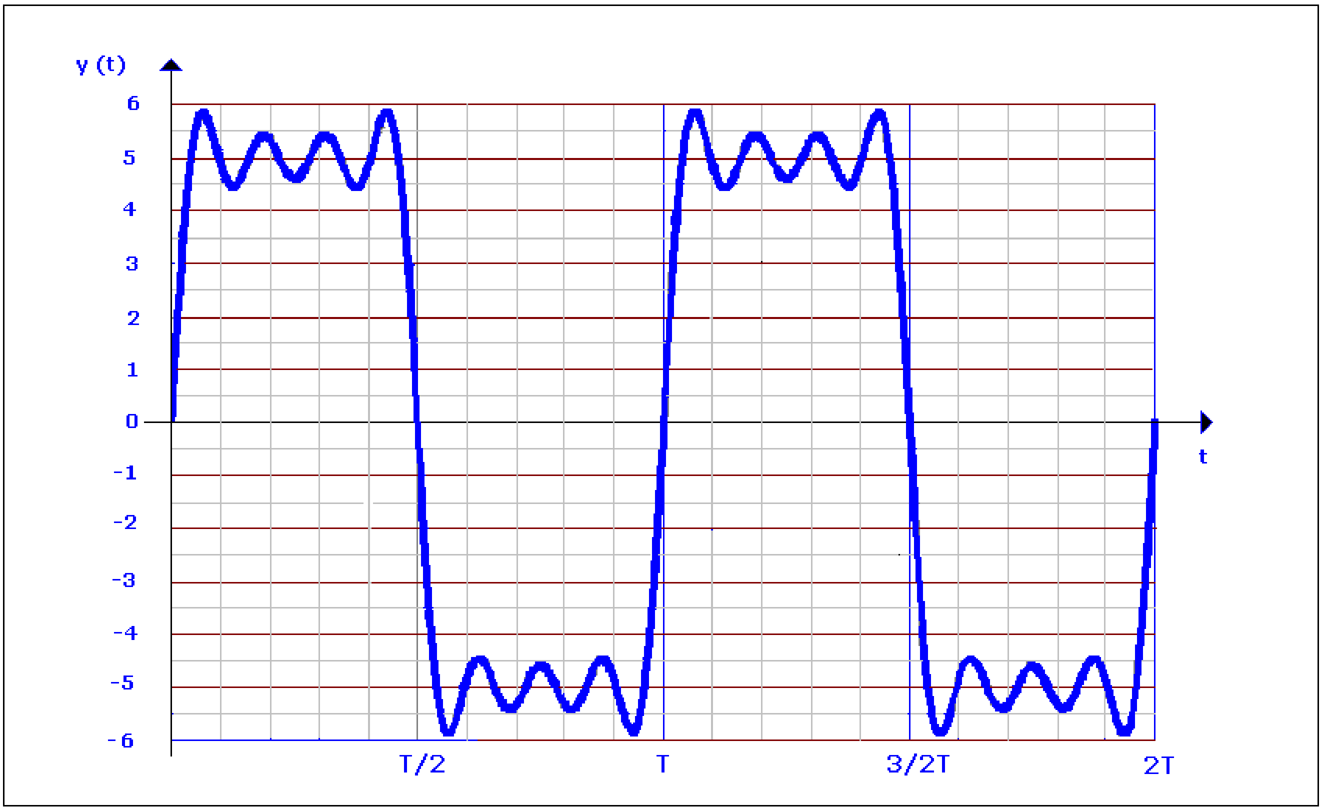

FIGURA 26 – Forma d'onda ottenuto dalla somma della 1ª, 3ª, 5ª, 7ª armonica.

6) **Verifica**

Lo sviluppo in serie della funzione data,troncata dopo l'armonica di ordine 9, consente di scrivere:

$$y(t) = 6.37 * \sin(6.28*10^3\, t) + 2.12*\sin(18.84*10^3 t) + 1.27*\sin(31.42*10^3 t) + $$
$$+ 0.91 * \sin\left(43.98 * 10^3 t\right) + 0.71 * \sin(56.55 * 10^3 t\ ) + \cdots$$

FIGURA 27 – Sviluppo in serie dell'onda quadra alternata troncato alla nona armonica.

E' possibile verificare se tale espressione rappresenta realmente un'onda quadra alternata, scegliendo alcuni istanti di tempo per il calcolo del valore della tensione y(t). Si ricordi che gli angoli sono espressi in radianti e non in gradi.

a) **Per t_1 = 0.2 m [s]**

$$y(t) = 6.37 * \sin(6.28*10^3 * 0.2 * 10^{-3}) + 2.12*\sin(18.84*10^3 * 0.2 * 10^{-3}) +$$
$$+ 1.27*\sin(31.42*10^3 * 0.2 * 10^{-3}) + 0.91 * \sin\left(43.98 * 10^3 * 0.2 * 10^{-3}\right) +$$
$$+ 0.71 * \sin(56.55 * 10^3 * 0.2 * 10^{-3}) =$$

$$y(t) = 6.37 * \sin(1.26) + 2.12*\sin(3.77) + 1.27*\sin(6.28) +$$
$$+ 0.91 * \sin(8.79) + 0.71 * \sin(11.31)$$

$$y(t) = 6.37 * 0.95 + 2.12*(-058) + 1.27*(-3.19*10^{-3}) + 0.91 * 0.59 + 0.71 * (-095)$$
$$= 4.68 \ [V]$$

FIGURA 28 – Calcolo dello sviluppo in serie dell'onda quadra alternata per t1 = 0.2 m [s].

Il valore atteso era di 5 V, mentre il valore ottenuto è di 4.68 V, che, tenendo conto del troncamento della serie dopo 5 termini, rappresenta un valore accettabile.

b) **Per t_2 = 0.7 m [s]**

$$y(t) = 6.37 * \sin(6.28*10^3 * 0.7 * 10^{-3}) + 2.12*\sin(18.84*10^3 * 0.7 * 10^{-3}) +$$
$$+ 1.27*\sin(31.42*10^3 * 0.7 * 10^{-3}) + 0.91 * \sin\left(43.98 * 10^3 * 0.7 * 10^{-3}\right) +$$
$$+ 0.71 * \sin(56.55 * 10^3 * 0.7 * 10^{-3})$$

$$y(t) = 6.37 * \sin(4.39) + 2.12*\sin(13.18) + 1.27*\sin(21.99) +$$
$$+ 0.91 * \sin(30.78) + 0.71 * \sin(39.58)$$

$$y(t) = 6.37 * (-0.94) + 2.12*0.57 + 1.27*(1.1*10^{-3}) + 0.91 * (-0.59) + 0.71 * (095) =$$
$$= -4.64 \ [V]$$

FIGURA 29 – Calcolo dello sviluppo in serie dell'onda quadra alternata per t1 = 0.7 m [s].

c) **Per t_3 = 1.3 m [s]**

$$y(t) = 6.37 * \sin(6.28*10^3 * 1.3 * 10^{-3}) + 2.12*\sin(18.84*10^3 * 1.3 * 10^{-3}) +$$
$$+ 1.27*\sin(31.42*10^3 * 1.3 * 10^{-3}) + 0.91 * \sin(43.98 * 10^3 * 1.3 * 10^{-3}) +$$
$$+ 0.71 * \sin(56.55 * 10^3 * 1.3 * 10^{-3})$$

$$y(t) = 6.37 * \sin(8.16) + 2.12*\sin(24.49) + 1.27*\sin(40.84) +$$
$$+ 0.91 * \sin(57.17) + 0.71 * \sin(73.51)$$

$$y(t) = 6.37 * (0.95) + 2.12*(-0.59) + 1.27*(7.0*10^{-4}) + 0.91 * (0.58) + 0.71 * (-095) =$$
$$= -4.65 \ [V]$$

FIGURA 30 – Calcolo dello sviluppo in serie dell'onda quadra alternata per t1 = 1.3 m [s].

d) **Per t_4 = 2.4 m [s]**

$$y(t) = 6.37 * \sin(6.28*10^3 * 2.4 * 10^{-3}) + 2.12*\sin(18.84*10^3 * 2.4 * 10^{-3}) +$$
$$+ 1.27*\sin(31.42*10^3 * 1.3 * 10^{-3}) + 0.91 * \sin(43.98 * 10^3 * 2.4 * 10^{-3}) +$$
$$+ 0.71 * \sin(56.55 * 10^3 * 2.4 * 10^{-3})$$

$$y(t) = 6.37 * \sin(15.07) + 2.12*\sin(45.21) + 1.27*\sin(75.40) +$$
$$+ 0.91 * \sin(105.55) + 0.71 * \sin(135.72)$$

$$y(t) = 6.37 * (0.55) + 2.12*(-0.94) + 1.27*(1.77*10^{-3}) + 0.91 * (-0.95) + 0.71 * (-059) =$$
$$= 4.46 \ [V]$$

FIGURA 31 – Calcolo dello sviluppo in serie dell'onda quadra alternata per t1 = 2.4 m [s].

Definizione di spettro dei segnali periodici

Spettro di un segnale periodico

Si dice **spettro di un segnale periodico** l'insieme dei due grafici delle ampiezze delle sue armoniche in funzione della frequenza e delle fasi delle sue armoniche in funzione della frequenza. Tipicamente la frequenza è specificata in unità naturali e non logaritmiche .

Spettro delle Ampiezze

Lo **spettro delle ampiezze** è un grafico in cui si riportano, per ciascuna frequenza delle sinusoidi, la corrispondente ampiezza, calcolata con le formule riportate nell'esempio. Ciascuna sinusoide è rappresentata da una riga di altezza pari all'ampiezza calcolata con le formule sopra citate. Tale spettro occupa solo la parte positiva dell'asse delle frequenze.

Lo spettro delle ampiezze di un segnale periodico si presenta come una serie di righe spettrali, di ampiezza corrispondente a quella di ciascuna armonica e collocate a frequenze tutte multiple di quella fondamentale e quindi distanziate tra loro proprio di questo valore di frequenza. Se esiste anche un valore continuo, esso si può tenere in considerazione con una riga di ampiezza non nulla collocata a frequenza nulla.

Spettro delle fasi

Lo **spettro delle fasi** è un grafico in cui si riportano per ciascuna frequenza delle sinusoidi la corrispondente fase. Ciascuna sinusoide è rappresentata da una riga di altezza pari all'ampiezza calcolata con le formule sopra citate.

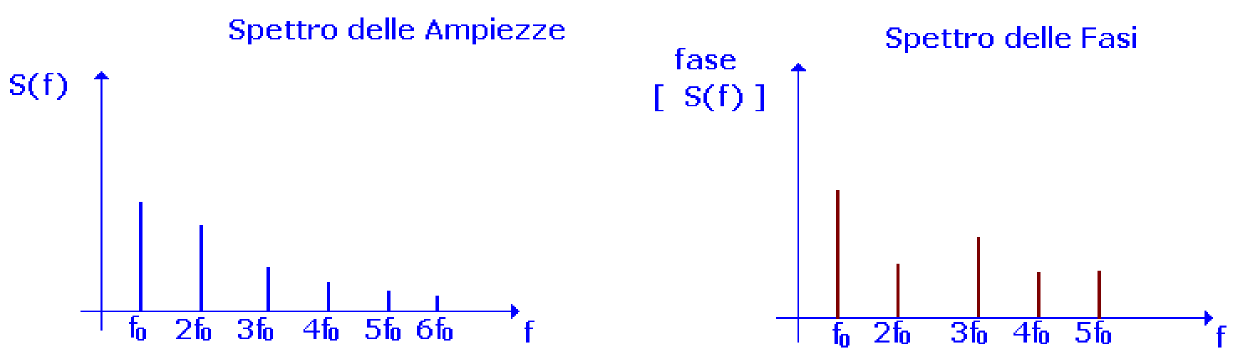

FIGURA 32 – Spettro delle Ampiezze e spettro delle Fasi.

Banda di un segnale periodico

Si dice banda di un segnale l'intervallo di frequenze sulle quali le ampiezze del suo spettro sono di valore significativo.