Postmoltiplicando la terna per la trasformazione di rotazione si ha:

$$Nuova\_O'\_ = O'\_xyz \ \mathrm{Rot}(x, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che, come mostrato in fig. 12 rappresenta una rotazione di 90 gradi attorno all'asse x della terna O'_xyz.

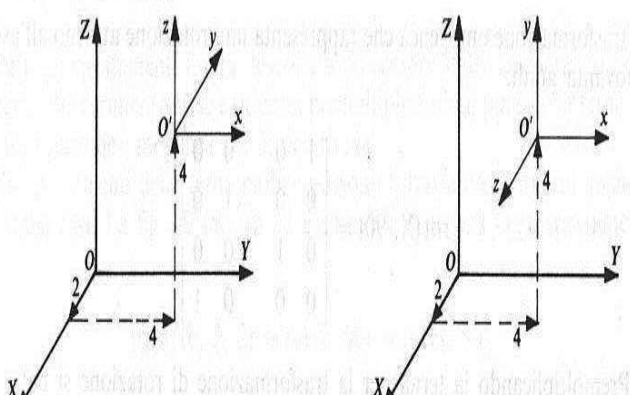


Fig. 12

CAPITOLO QUINTO

CINEMATICA DIRETTA

Introduzione

La posizione e l'orientamento di un oggetto manipolato da un robot dipendono evidentemente dalle caratteristiche geometriche della sua struttura e dalla configurazione dei suoi giunti.

Assai meno evidente è il procedimento con cui determinare la posizione e l'orientamento dell'oggetto manipolato conoscendo le caratteristiche geometriche della struttura e una data configurazione dei suoi giunti.

Tale procedimento è detto cinematica diretta e verrà sviluppato nel presente capitolo.

La prima parte, dedicata all'inquadramento qualitativo del problema, definisce il formalismo con cui verrà affrontata la cinematica diretta, risolve il problema in modo intuitivo per un robot a due gradi di libertà utilizzando le trasformazioni omogenee e propone una serie di considerazioni sull'estensione del metodo a robot a sei gradi di libertà.

La seconda, dedicata all'approccio quantitativo alla cinematica diretta, sviluppa un metodo di modellizzazione della struttura del robot basata sull'assegnazione di terne di riferimento cartesiane ai suoi elementi e sull'utilizzo di trasformazioni omogenee per descriverne le posizioni relative. Al termine vengono proposti una serie di esempi di complessità via via crescente per poter verificare i concetti appresi nelle parti precedenti.

5.1. Cinematica diretta

La cinematica diretta affronta il problema statico della ricerca delle relazioni che legano la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura del robot alle variabili di giunto. Tale relazione prende il nome di equazione cinematica in quanto governa il comportamento cinematico del robot (fig. 1).

La struttura dei robot industriali è sempre costituita da una catena cinematica aperta, cioè da una serie di elementi rigidi collegati l'uno all'altro da giunti. Per identificare correttamente e sinteticamente i componenti della struttura conviene associare a ciascuno di essi un numero seguendo un'opportuna convenzione (fig. 2): il primo elemento della struttura, cioè quello collegato a terra, sarà identificato come segmento zero e i successivi con una numerazione progressiva: 1, 2, ..., $n-1$, n dove n è il numero dei giunti. I giunti vengono

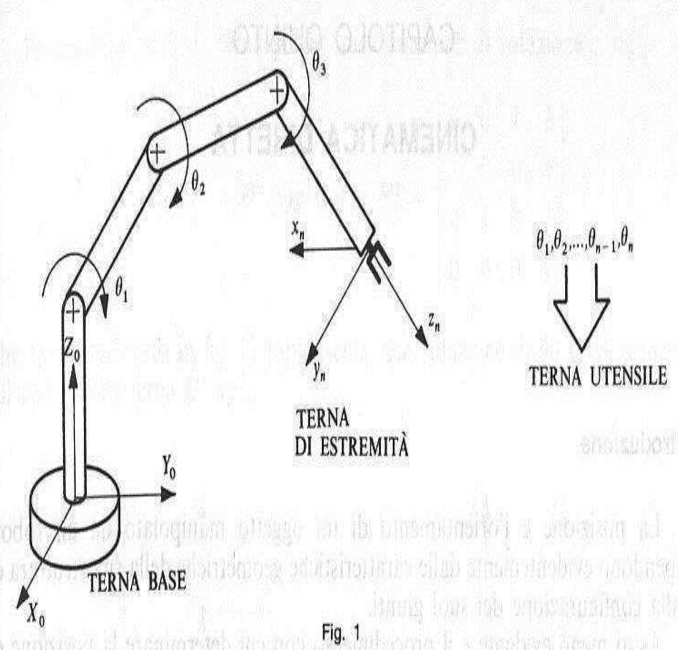


Fig. 1

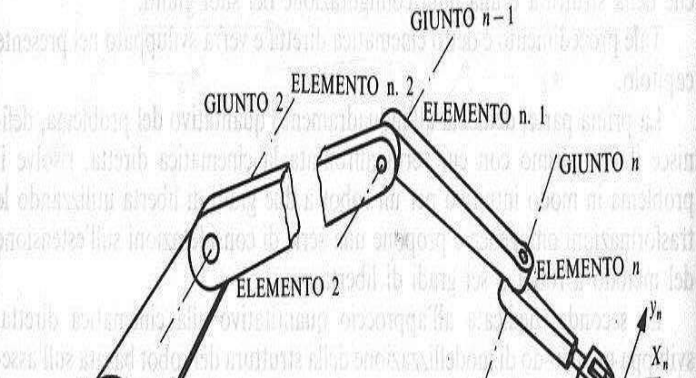


Fig. 2

numerati progressivamente, a partire da uno, nell'ordine in cui si incontrano muovendosi dalla base della struttura verso la sua estremità. Con questa convenzione, il generico giunto i sarà quello che unisce gli elementi $i-1$ e i della struttura.

La cinematica diretta può essere meglio definita introducendo $n+1$ sistemi di riferimento tali che: la terna $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$ sia quella base, la $O_1 - x_1 y_1 z_1$ sia solidale con il primo elemento della struttura, la $O_2 - x_2 y_2 z_2$ con il secondo... la $O_n - x_n y_n z_n$ con l'estremità della struttura.

L'equazione cinematica è l'insieme di relazioni che esprimono la posizione e l'orientamento della terna $O_n - x_n y_n z_n$ rispetto a quella di riferimento $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$, in funzione delle variabili di giunto.

La configurazione assunta dalla struttura del robot, e quindi la posizione e l'orientamento della terna di estremità, possono essere calcolate note che siano le relazioni della cinematica diretta e gli n valori delle variabili di giunto. Premesso questo si può pensare di definire uno spazio, detto spazio dei giunti, avente un numero di dimensioni pari a quello dei giunti, cioè n.

Un punto appartenente a tale spazio viene individuato da un insieme ordinato di n coordinate $(n_1, n_2, \ldots, n_n)$. Quindi ad ogni configurazione assunta dalla struttura del robot corrisponderà in tale spazio un punto le cui n coordinate saranno i valori delle variabili di giunto. L'inverso non è sempre vero in quanto i giunti hanno possibilità di movimento limitata e quindi non sarà possibile far corrispondere ad ogni punto dello spazio dei giunti una possibile configurazione della struttura del robot.

La cinematica diretta può quindi essere pensata come l'insieme di quelle relazioni che trasformano un punto dello spazio dei giunti (che esprime la configurazione della struttura del robot) nella posizione ed orientamento di una terna cartesiana (quella solidale con l'estremità della struttura).

5.2. Cinematica diretta per un robot a due gradi di libertà

Si consideri un robot a due gradi di libertà in cui gli assi di rotazione dei due giunti siano entrambi perpendicolari al foglio in modo tale che ogni suo movimento avvenga in tale piano (fig. 3).

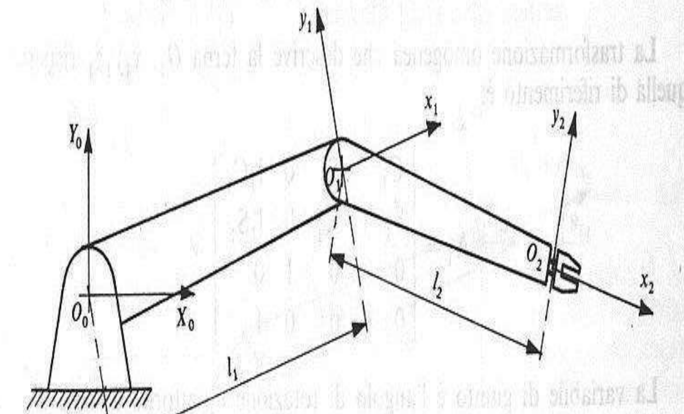


Fig. 3

Essendo due i giunti, si dovranno definire tre terne, la prima di riferimento, la seconda solidale al primo segmento della struttura e l'ultima al secondo. Essendo a priori del tutto arbitraria sia la posizione in cui sistemare l'origine che l'orientamento da dare agli assi di riferimento, conviene posizionare le terne in modo tale da semplificare il problema.

Una buona soluzione per la terna di riferimento $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$ è quella di fare coincidere l'origine con l'intersezione tra l'asse di rotazione del primo giunto e il piano in cui si muove il robot. Per quanto riguarda l'orientazione è conveniente che l'asse Z_0 coincida con quello di rotazione del primo giunto.

L'origine della terna $O_1-x_1y_1z_1$ può essere sistemata tra l'intersezione dell'asse di rotazione del secondo giunto ed il piano di movimento del robot, l'asse z_1 coincidente con quello di rotazione del secondo giunto mentre l'asse x_1 può essere vantaggiosamente orientato in modo da essere il prolungamento del primo braccio.

L'origine dell'ultima terna, $O_2-x_2y_2z_2$, viene in genere posizionata in un punto dell'ultimo elemento della struttura particolarmente interessante, ad esempio quello in cui avviene la chiusura delle due dita. Per quanto riguarda gli assi, una buona soluzione è di disporre z_2 parallelo a Z_0 e z_1 e x_2 come il prolungamento del secondo braccio.

Nel seguito si utilizzeranno le matrici di trasformazione 4×4 introdotte nel capitolo precedente anche se, essendo tutti i movimenti appartenenti al piano X_0Y_0 della terna di riferimento, sarebbe in teoria possibile utilizzare delle matrici 3×3 che trascurino la terza dimensione. Tali matrici si ottengono da quelle che verranno utilizzate togliendo la terza colonna e la terza riga.

La scelta di utilizzare comunque le più complesse matrici 4×4 è giustificata dalla volontà di rendere l'esempio più aderente alla trattazione generale del problema che verrà sviluppata nel seguito.

Nell'intento di semplificare la rappresentazione delle funzioni trigonometriche seno e coseno, di cui si farà un uso intenso, si adotteranno le seguenti convenzioni:

$$\operatorname{sen}(\theta_n)=S_n \qquad \cos(\theta_n)=C_n$$
$$\operatorname{sen}(\theta_m+\theta_n)=S_{mn} \qquad \cos(\theta_m+\theta_n)=C_{mn}$$

La trasformazione omogenea che descrive la terna $O_1-x_1y_1z_1$ rispetto a quella di riferimento è:

$$A_1=\begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La variabile di giunto è l'angolo di rotazione θ_1 attorno all'asse Z_0 del sistema di riferimento base. Questa prima osservazione permette di scrivere immediatamente la sottomatrice di rotazione, già ricavata nel precedente capitolo come $\mathrm{rot}(z,\theta)$.

Rimangono da determinare gli elementi della quarta colonna, che sono poi le coordinate di 0_1. Tale punto è vincolato a muoversi attorno a 0_0 ad una distanza fissa pari alla lunghezza del primo elemento della struttura del robot (distanza tra i due assi di rotazione). Quindi è possibile esprimere le sue coordinate X ed Y ricorrendo alla trigonometria:

$$X=l_1C_1 \qquad Y=l_1S_1$$

La coordinata Z di O_1 non pone alcun problema in quanto è sempre nulla. Determinate le prime tre righe della matrice non resta che completarla con la quarta per ottenere la matrice sopra riportata.

La trasformazione omogenea che descrive la terna $O_2-x_2y_2z_2$ rispetto alla $O_1-x_1y_1z_1$ è:

$$A_2=\begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2*C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2*S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il procedimento per ottenere questa matrice è analogo a quello utilizzato per determinare A_1.

L'equazione cinematica per questo robot a due gradi di libertà sarà:

$$T=A_1A_2=\begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12}+l_1C_1 \\ S^1{}_2 & C_{12} & 0 & l_2S_{12}+l_1S^1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'esattezza dei risultati può essere verificata calcolando la posizione dell'origine O_2 della seconda terna e l'angolo di cui risulta ruotata rispetto a quella di riferimento utilizzando la trigonometria.

Le coordinate x ed y del punto O_2 si ottengono proiettando sull'asse delle ascisse e delle ordinate le lunghezze dei due bracci (fig. 4):

$$x=l_2C_{12}+l_1C_1 \qquad \text{elemento [1,4] della matrice}$$
$$y=l_2S^1{}_2+l_1S_1 \qquad \text{elemento [2,4] della matrice}$$

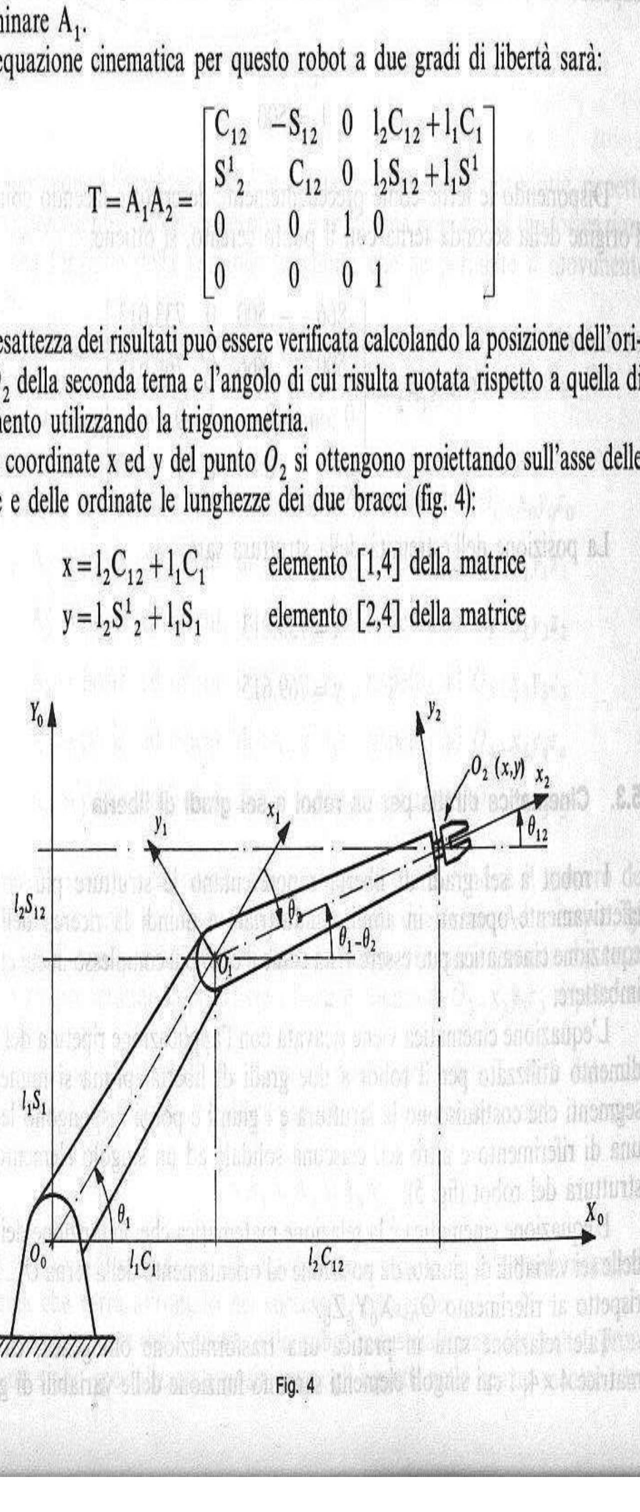


Fig. 4

La terna di estremità risulta ruotata attorno all'asse Z dell'angolo θ_{12} rispetto al riferimento, come risulta dalla sottomatrice di rotazione 3×3.

Esempio:

Dato il robot di fig. 4, calcolare la posizione dell'estremità della struttura quando:

$$\theta_1 = 60^\circ$$
$$\theta_2 = -30^\circ$$

sapendo che:

$$l_1 = 600$$
$$l_2 = 500$$

Disponendo le terne come precedentemente descritto e facendo coincidere l'origine della seconda terna con il punto cercato, si ottiene:

$$T = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} .866 & -.500 & 0 & 733.013 \\ .500 & .866 & 0 & 769.615 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posizione dell'estremità della struttura sarà:

$$x = 733.013$$
$$y = 769.615$$

5.3. Cinematica diretta per un robot a sei gradi di libertà

I robot a sei gradi di libertà rappresentano le strutture più complete effettivamente operanti in ambito industriale e quindi la ricerca della loro equazione cinematica può essere vista come il caso più complesso in cui ci si può imbattere.

L'equazione cinematica viene ricavata con l'applicazione ripetuta del procedimento utilizzato per il robot a due gradi di libertà: prima si numerano i segmenti che costituiscono la struttura e i giunti e poi si dispongono le terne, una di riferimento e altre sei, ciascuna solidale ad un singolo elemento della struttura del robot (fig. 5).

L'equazione cinematica è la relazione matematica che, in funzione dei valori delle sei variabili di giunto, dà posizione ed orientamento della terna $O_6-x_6y_6z_6$ rispetto al riferimento $O_0-X_0Y_0Z_0$.

Tale relazione sarà in pratica una trasformazione omogenea, cioè una matrice 4×4, i cui singoli elementi saranno funzione delle variabili di giunto.

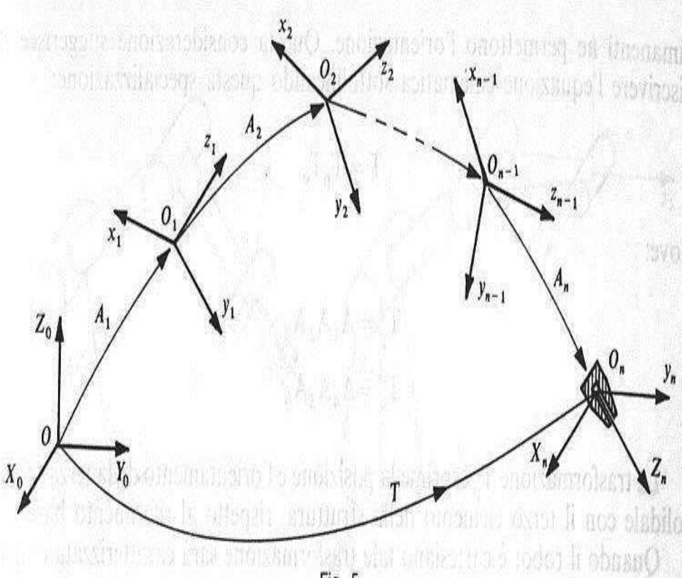


Fig. 5

La posizione e l'orientamento di una qualsiasi delle terne introdotte, rispetto alla sua precedente, può essere espressa tramite una opportuna trasformazione omogenea funzione della variabile di giunto che ne permette il movimento relativo.

Quindi l'equazione cinematica può essere ottenuta come il prodotto delle sei trasformazioni omogenee che descrivono le relazioni tra le terne (fig. 5).

Le sei trasformazioni di interesse sono:

$A_1 \rightarrow$ posiz. ed orient. di $O_1-X_1Y_1Z_1$ rispetto ad $O_0-x_0y_0z_0$

$A_2 \rightarrow$ posiz. ed orient. di $O_2-x_2y_2z_2$ rispetto ad $O_1-x_1y_1z_1$

$A_3 \rightarrow$ posiz. ed orient. di $O_3-x_3y_3z_3$ rispetto ad $O_2-x_2y_2z_2$

$A_4 \rightarrow$ posiz. ed orient. di $O_4-x_4y_4z_4$ rispetto ad $O_3-x_3y_3z_3$

$A_5 \rightarrow$ posiz. ed orient. di $O_5-x_5y_5z_5$ rispetto ad $O_4-x_4y_4z_4$

$A_6 \rightarrow$ posiz. ed orient. di $O_6-x_6y_6z_6$ rispetto ad $O_5-x_5y_5z_5$

dove con A si indica la matrice corrispondente e con l'indice il numero del giunto che permette il movimento relativo delle due terne. Ad esempio, gli elementi della matrice A_3 saranno funzione della posizione assunta dal terzo giunto ed esprimeranno la posizione e l'orientamento di $O_3-x_3y_3z_3$ rispetto ad $O_2-x_2y_2z_2$.

L'equazione cinematica, che d'ora in poi chiameremo T, sarà data dal prodotto delle sei matrici che descrivono le relazioni tra le terne:

$$T = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

Tutto è quindi ricondotto alla determinazione delle singole trasformazioni, problema che verrà affrontato nel successivo paragrafo.

La maggior parte delle strutture dei robot industriali prevedono che i primi tre giunti siano specializzati a posizionare gli oggetti nello spazio mentre i tre rimanenti ne permettono l'orientazione. Questa considerazione suggerisce di riscrivere l'equazione cinematica sottolineando questa specializzazione:

$$T = T_p T_o$$

dove:

$$T_p = A_1 A_2 A_3$$

$$T_o = A_4 A_5 A_6$$

La trasformazione T_p esprime la posizione e l'orientamento della terza terna, solidale con il terzo elemento della struttura, rispetto al riferimento base.

Quando il robot è cartesiano tale trasformazione sarà caratterizzata dall'avere la componente rotatoria costante in quanto i primi tre assi del robot sono prismatici e quindi non modificano l'orientamento della terza terna rispetto al riferimento (fig. 6). Quando invece almeno uno dei primi tre giunti è rotoidale, anche la componente rotatoria della matrice T_p sarà funzione delle variabili di giunto (fig. 7).

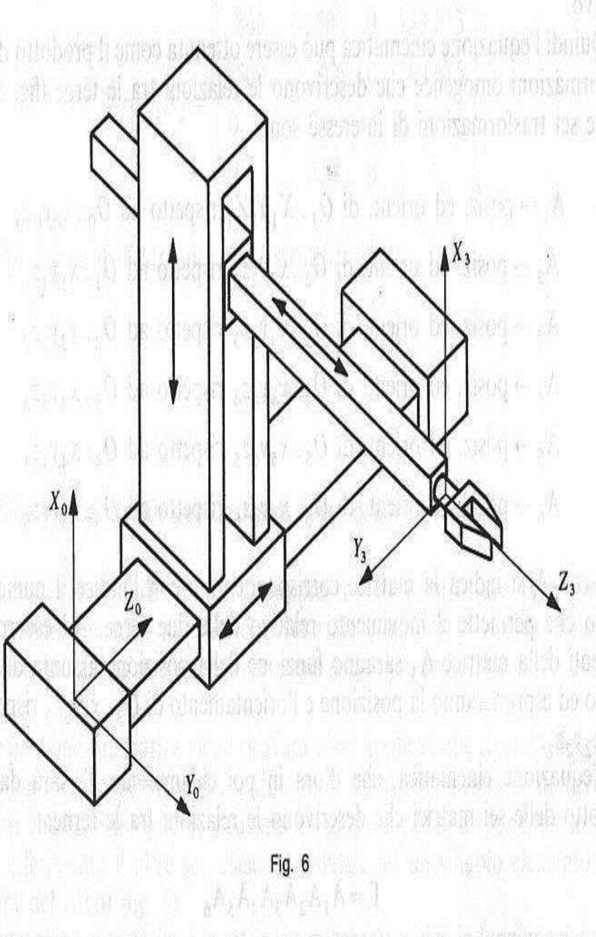


Fig. 6

La trasformazione T_o esprime la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura rispetto alla terza. Gli ultimi tre giunti delle strutture dei robot sono praticamente sempre rotoidali per cui la trasformazione T_o conterrà sempre una componente rotatoria funzione delle variabili di giunto.

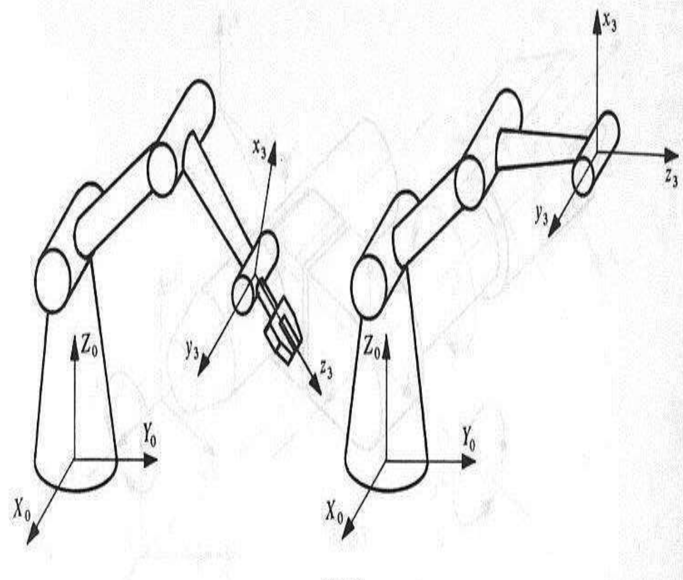


Fig. 7

La componente traslatoria può al contrario essere nulla. Questo accade quando i giunti sono disposti in modo che i tre assi di rotazione si incontrano in un unico punto (si parla di polso sferico e la condizione è verificata nella maggior parte dei robot industriali) che viene fatto coincidere con l'origine delle terne, dalla terza alla sesta (fig. 8*a*). La componente di traslazione sarà in questo caso nulla perché la posizione dell'origine della sesta terna, coincidente con quella della terza, non può essere modificata dal movimento degli ultimi tre giunti appartenendo ai loro assi di rotazione.

Nella pratica questa situazione si incontra raramente in quanto la sesta terna viene sempre posizionata in un punto significativo della struttura (fig. 8*b*); ad esempio in corrispondenza della flangia di attacco degli utensili o coincidente con la loro estremità operativa.

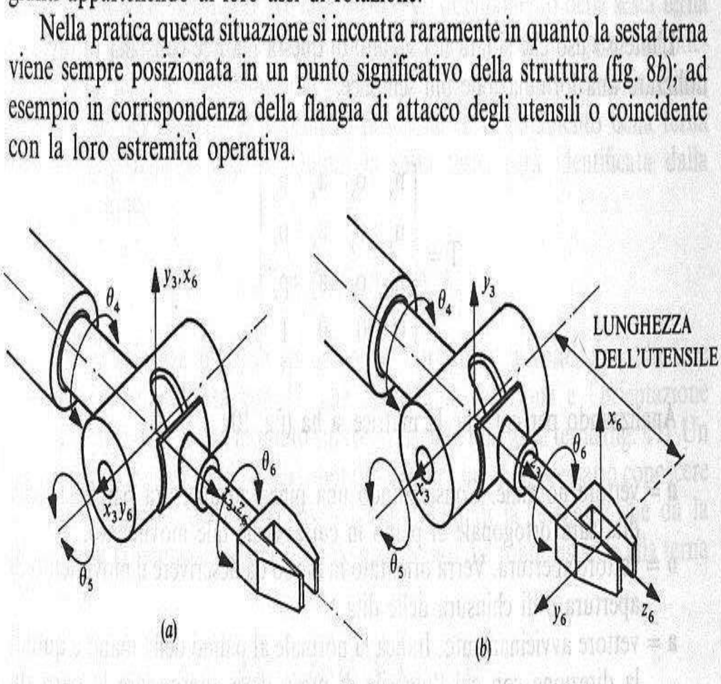


Fig. 8

Quando il polso non è sferico la T_o conterrà sempre una componente traslatoria risultato del movimento rotatorio dei giunti (fig. 9).

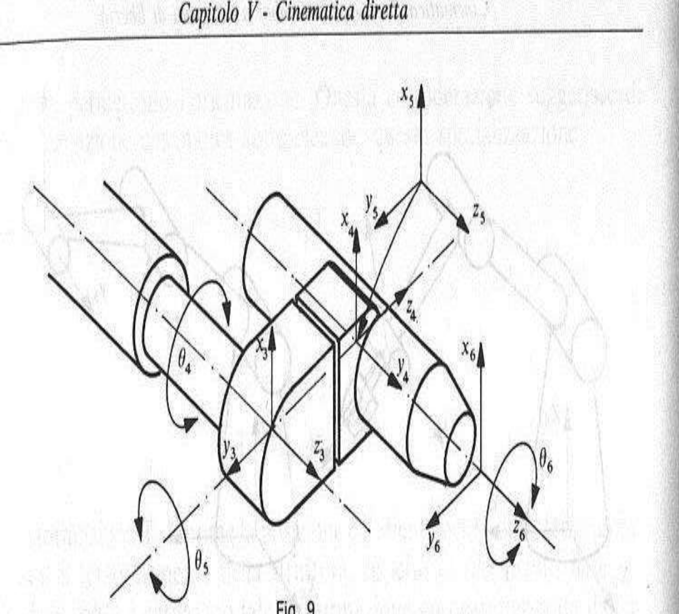


Fig. 9

La matrice T esprime la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto a quella di riferimento e quindi avrà la seguente forma:

$$T = \begin{bmatrix} i_{x6} & j_{x6} & k_{x6} & O_{6X} \\ i_{y6} & j_{y6} & k_{y6} & O_{6Y} \\ i_{z6} & j_{z6} & k_{z6} & O_{6Z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'intenso uso che si farà nel seguito di questa matrice consiglia tuttavia di utilizzare una formulazione più semplice:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analizzando per colonne la matrice si ha (fig. 10):

n = vettore normale. Considerando una pinza ad apertura parallela delle dita sarà ortogonale al piano in cui avviene tale movimento.

o = vettore apertura. Verrà orientato in modo da descrivere il movimento di apertura e di chiusura delle dita.

a = vettore avvicinamento. Indica la normale al palmo della mano e quindi la direzione con cui l'utensile di presa deve approcciare le parti da manipolare.

p = vettore posizione. Esprime la posizione dell'origine della sesta terna rispetto a quella di riferimento. In generale l'origine viene posizionata nel punto centrale della pinza quando le due dita sono completamente chiuse.

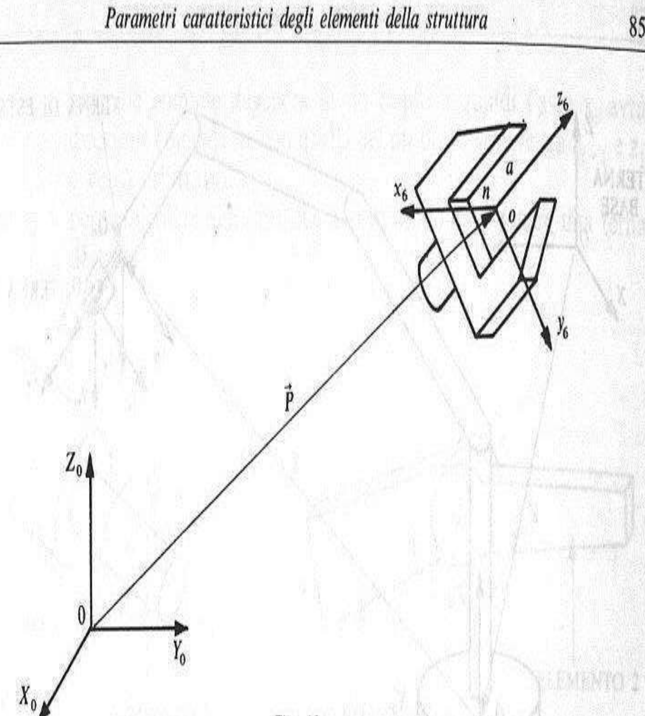


Fig. 10

Nella pratica risulta spesso conveniente adottare come terna di riferimento un sistema cartesiano diverso da $O_0 - X_0Y_0Z_0$. Questa eventualità si presenta ad esempio quando si deve gestire un'isola robotizzata in cui operino contemporaneamente più macchine. In tali situazioni è evidente il vantaggio di riferire le posizioni di tutti gli oggetti e le operazioni ad essi relative ad un unico sistema di riferimento.

In questi casi, per descrivere la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto al nuovo riferimento costituito dalla terna B (base), bisognerà considerare una ulteriore trasformazione omogenea (fig. 11). Tale trasformazione, indicata nel seguito con Z, esprimerà posizione ed orientamento della terna $O_0 - X_0Y_0Z_0$ rispetto alla B. Quindi la sesta terna sarà identificata dalla trasformazione:

$$ZT = ZA_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

Sempre esigenze pratiche spingono ad introdurre, a volte, una ulteriore trasformazione, indicata con U, che descrive la posizione e l'orientazione dell'utensile o della pinza montato sul robot rispetto alla sesta terna (fig. 11). Un esempio di tale esigenza si ha nei robot di saldatura in cui è necessario conoscere il punto terminale della torcia di saldatura. Quindi la relazione che dà la posizione e l'orientamento dell'utensile manipolato dal robot rispetto alla terna base sarà:

$$ZTU = ZA_1A_2A_3A_4A_5A_6U$$

5.4. Parametri caratteristici degli elementi della struttura

Le trasformazioni omogenee A_i descrivono la rototraslazione della generica terna i-esima rispetto alla $i-1$-esima. La loro ricerca è semplificata dall'utilizzo

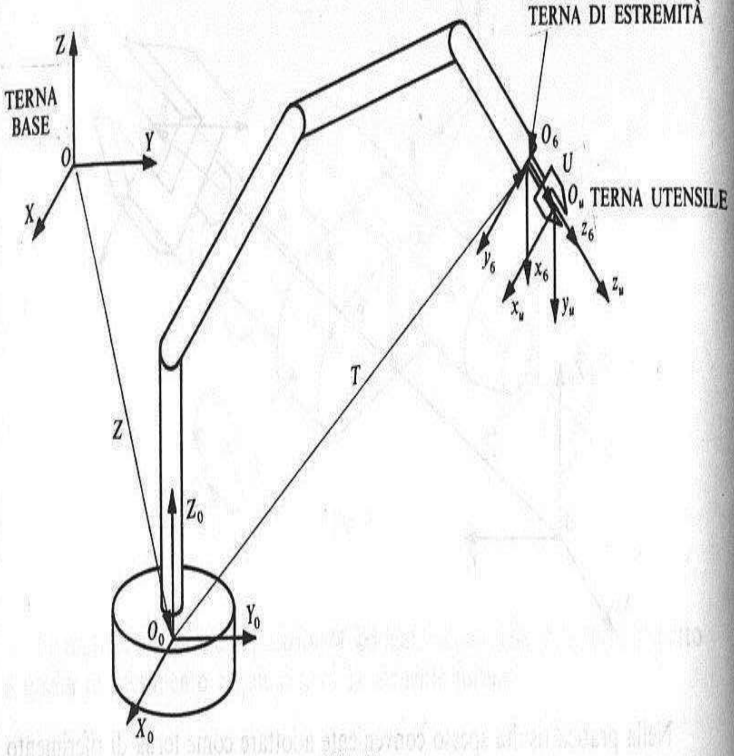


Fig. 11

della rappresentazione di Denavit e Hartenberg. Tale rappresentazione consiste in una matrice di trasformazione omogenea che permette di stabilire in modo sistematico la posizione e l'orientamento dei sistemi di riferimento solidali con i singoli elementi della struttura del robot.

Prima di utilizzare questa matrice è tuttavia utile ripercorrere la strada che ha portato alla sua formulazione.

Il primo passo è l'introduzione di alcue regole per la disposizione delle terne di riferimento.

Si considerino due elementi generici della struttura (*i – 1* e *i*) e il giunto che li collega (*i*) che, in ambito industriale, potrà essere di tipo rotoidale (di torsione fig. 12*a* o di flessione fig. 12*b*) o prismatico (fig. 13).

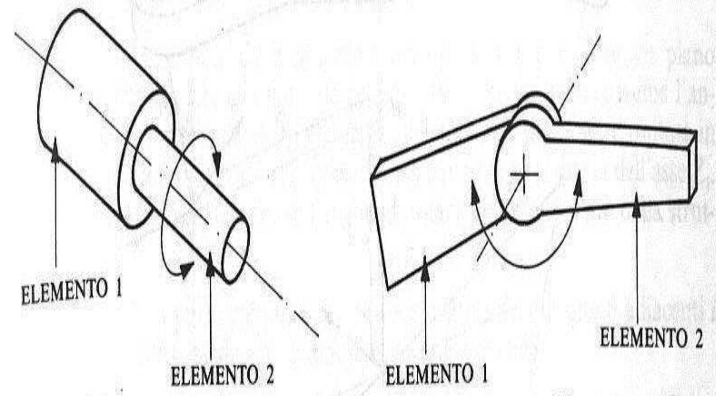
Ogni sistema di coordinate può essere ben definito utilizzando le seguenti regole (fig. 14):

origine - all'intersezione tra l'asse di rotazione del giunto $i+1$ e la normale comune agli assi dei giunti i e $i+1$.
Si noti che la terna *i*-esima è quindi in corrispondenza del giunto $i+1$-esimo.
Quando i due assi di rotazione dei giunti i e $i+1$ sono concorrenti l'origine andrà posizionata nel punto di incontro. Quando invece sono paralleli si sceglierà, tra le infinite normali comuni, quella che passa per la prima origine ben definita che si incontra avanzando nella catena cinematica.

asse z_i - coincidente con l'asse di rotazione del giunto $i+1$.

asse x_i - lungo il prolungamento della normale comune ed orientato in direzione opposta all'asse $i-1$.
Quando gli assi di rotazione dei giunti i e $i-1$ sono concorrenti la normale comune degenera in un punto e quindi l'asse x_i avrà direzione coincidente con quella del prodotto vettore tra z_{i-1} e z_1 e verso arbitrario.

asse y_i - perpendicolare agli altri due assi in modo da ottenere una terna destra.



(*a*) (*b*)

Fig. 12

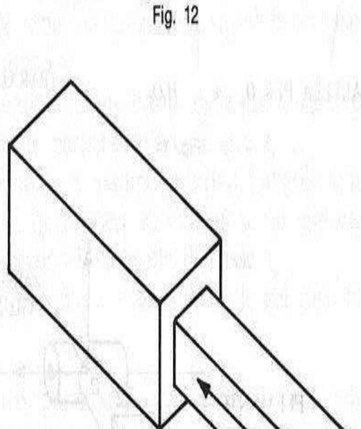


Fig. 13

Le regole sopra esposte sono facilmente estendibili ai giunti prismatici pur di sostituire all'asse di rotazione la direzione di traslazione. Tra le infinite rette aventi tale direzione si opterà per quella passante per la prima origine ben definita che si incontra avanzando nella catena cinematica (fig. 15).

La prima e l'ultima terna non possono essere completamente definite utilizzando le regole viste in quanto si trovano alle estremità della struttura.

Per quanto riguarda la terna base (la prima) si conviene di posizionare l'origine in un opportuno punto appartenente all'asse di rotazione del primo giunto e di far coincidere quest'ultimo con l'asse Z_0. La disposizione degli assi X_0 e Y_0 è invece arbitraria.

Per la terna di estremità risulta conveniente posizionare l'origine in un opportuno punto dell'organo terminale e di orientare gli assi in modo che sia semplice descrivere rispetto ad essi le operazioni di lavoro (fig. 10).

Si considerino ora i due generici elementi della struttura di un robot riportati in fig. 14 con le relative terne.

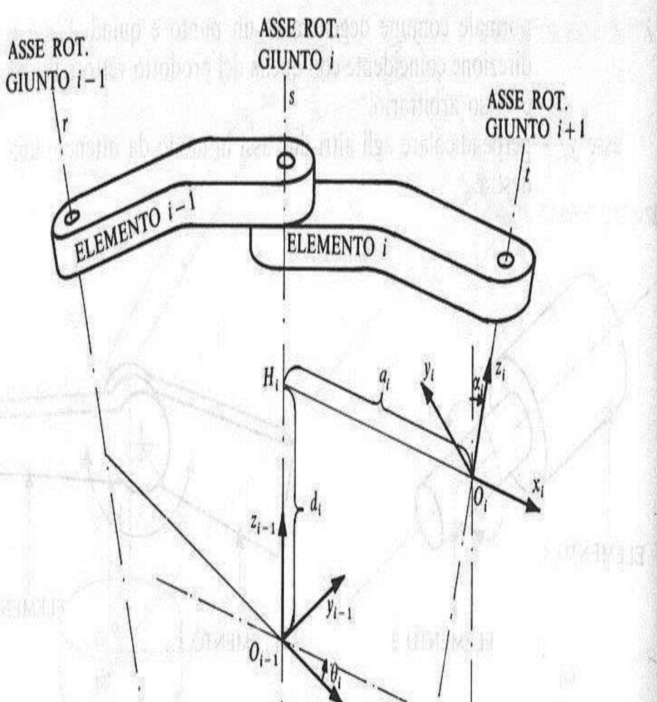


Fig. 14

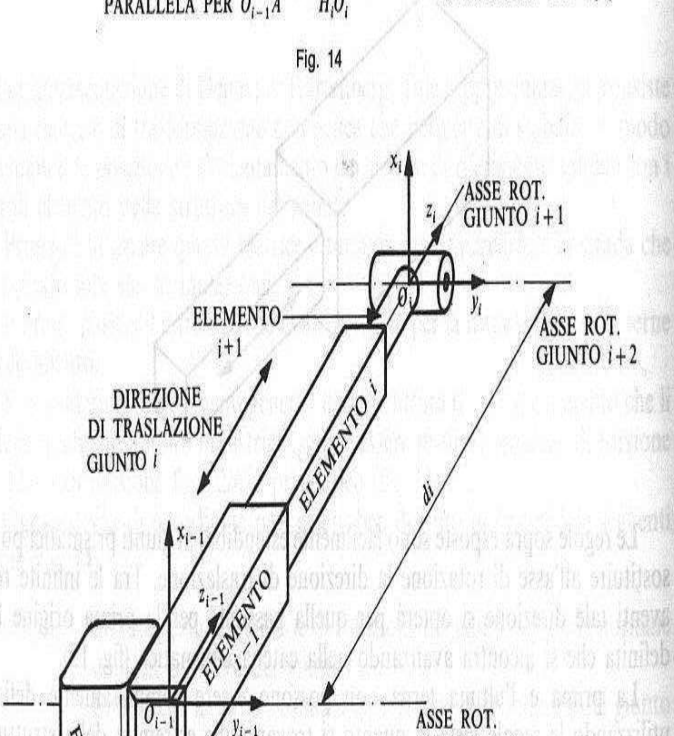


Fig. 15

La rappresentazione di Denavit e Hartenberg utilizza quattro parametri per descrivere la posizione e l'orientamento della i-esima terna rispetto alla $i-1$-esima.

La prima coppia descrive la geometria dell'i-esimo elemento della struttura ed è costituita pertanto da due costanti.

Tali costanti sono:

a_i - distanza dell'asse z_i da z_{i-1}. Tale distanza è la lunghezza della normale comune, cioè di quel segmento compreso tra i due assi e normale ad entrambi. Questa costante esprime la lunghezza dell'elemento della struttura.

α_i - angolo formato dalle proiezioni dei due assi z_i e z_{i-1} su un piano perpendicolare alla normale comune. Per convenzione si assume l'angolo positivo quando la proiezione dell'asse z_{i-1} deve essere ruotata in senso antiorario attorno all'asse x_i per sovrapporla a quella dell'asse Z_i. Questa costante esprime l'angolo di rotazione dell'elemento della struttura.

La seconda coppia determina la posizione relativa dei due giunti adiacenti i ed $i+1$ ed è formata da una costante e da una variabile.

d_i - distanza tra le due intersezioni che gli assi x_{i-1} ed x_i hanno con l'asse z_{i-1}. Tale parametro risulta essere variabile nel caso in cui il giunto i sia di tipo prismatico;

θ_i - angolo formato dalla proiezione delle due normali comuni (assi x_{i-1} ed x_i) su un piano perpendicolare all'asse z_{i-1}.
Per convenzione si assume positivo l'angolo quando la proiezione dell'asse x_{i-1} deve essere ruotata in senso antiorario attorno all'asse z_{i-1} per sovrapporla a quella dell'asse x_i.
Tale parametro risulta essere variabile nel caso in cui il giunto i sia rotoidale.

Con questi quattro parametri si è in grado di rappresentare la posizione e l'orientamento della terna i-esima rispetto alla terna $i-1$-esima. Per semplificare la procedura che porta a scrivere la trasformazione omogenea relativa è utile introdurre la terna intermedia $H_i-x'y'z'$ (fig. 16). Tale terna avrà l'origine nel punto di intersezione tra l'asse z_{i-1} e x_i, l'asse x' diretto come x_i e l'asse z' come z_{i-1}. Utilizzando le due costanti a_i ed α_i che descrivono la geometria dell'i-esimo elemento della struttura è possibile scrivere la trasformazione omogenea che permette di passare dalla terna $O_i-x_iy_iz_i$ alla $H_i-x'y'z'$. Tale trasformazione sarà il risultato di una traslazione di a_i lungo l'asse x' e di una rotazione di α_i attorno all'asse x':

$$H_i = \mathrm{trasl}(a_i, 0, 0)\ \mathrm{rot}(x', \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\mathrm{sen}\,\alpha_i & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\,\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tramite i due parametri che descrivono la posizione relativa dei due giunti $i-1$ e i è possibile scrivere la trasformazione omogenea che permette di passare dalla terna $H_i-x'y'z'$ alla $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Tale trasformazione è composta dalla traslazione d_i lungo l'asse Z_{i-1} e dalla rotazione θ_i attorno allo stesso asse.

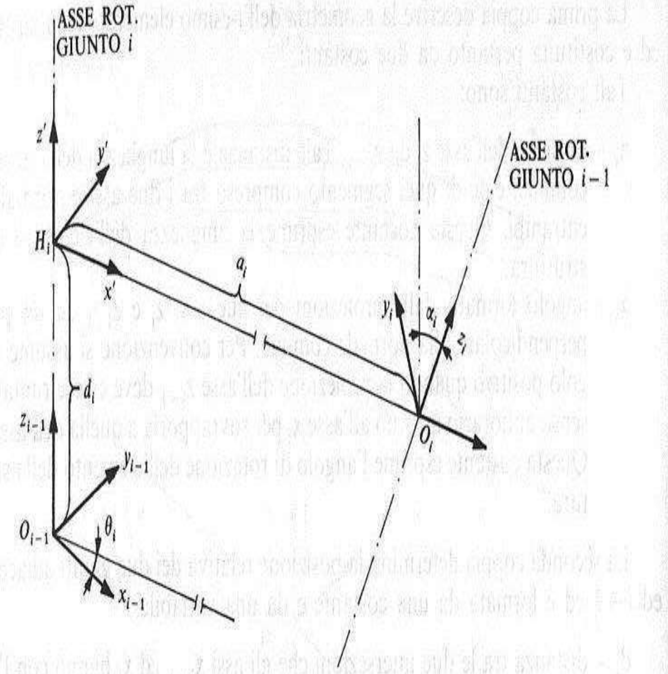


Fig. 16

$$H_i' = \text{trasl}(0, 0, d_i)\,\text{rot}(z, \theta_i) = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & 0 \\ S_i & C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione omogenea di Denavit e Hartenberg è data dal prodotto delle due matrici H_i ed H_i':

$$H_i' H_i = A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C_i & -S_i \cos\alpha_i & S_i \,\text{sen}\,\alpha_i & a_i C_i \\ S_i & C_i \cos\alpha_i & -C_i \,\text{sen}\,\alpha_i & a_i S_i \\ 0 & \text{sen}\,\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per i giunti rotoidali la variabile di giunto è l'angolo θ_i mentre per quelli prismatici è la lunghezza d_i.

Inoltre, quando il giunto i-esimo è prismatico, la costante a_i si annulla.

5.5. Esempi di cinematica diretta

Le fasi che permettono di ricavare l'equazione cinematica di un robot, indipendentemente dalla complessità della sua struttura, possono essere così riassunte:

— definire una terna base di riferimento e assegnare ad ogni elemento della struttura una terna secondo le regole precedentemente esposte. Pur seguendo il formalismo di Denavit e Hartenberg le terne possono essere disposte in molti modi diversi per cui uno stesso problema può essere risolto con più procedimenti equivalenti al fine del risultato finale;

— ricavare i parametri cinematici caratteristici per i giunti e per gli elementi della struttura;

— ricavare le trasformazioni omogenee A_i che mettono in relazione la terna i-esima con la $i-1$-esima;

— ottenere l'equazione cinematica moltiplicandole tra loro.

5.5.1. Robot a due gradi di libertà

Si consideri il robot a due gradi di libertà descritto nel par. 5.2 e riportato in fig. 4 e se ne determini l'equazione cinematica.

TERNE DI RIFERIMENTO

$O_0-X_0Y_0Z_0$ - O_0: intersezione tra Z_0 e il piano in cui si muove il robot.
X_0, Y_0: direzioni arbitrarie.
Z_0: coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto.

$O_1-x_1y_1z_1$ - O_1: intersezione tra z_1 e il piano in cui si muove il robot.
x_1: prolungamento della normale comune agli assi Z_0 e z_1 passante per O_0.
y_1: completa la terna destra.
z_1: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

$O_2-x_2y_2z_2$ - O_2: punto di chiusura della pinza del robot.
x_2: prolungamento del segmento O_1O_2.
y_2: completa la terna destra.
z_2: parallelo a Z_0 e z_1.

PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto	θ_i	d_i	α_i	a_i	Matr.
1	θ_1	0	0	l_1	A_1
2	θ_2	0	0	l_2	A_2

MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

Sostituendo nella trasformazione di Denait e Hartenberg i parametri cinematici e le variabili di giunto si ricavano le matrici A_1 e A_2 riportate nel par. 5.2.

EQUAZIONE CINEMATICA

$$n_x = C_{12}$$
$$n_y = S_{12}$$
$$n_z = 0$$

$$o_x = -S_{12}$$
$$o_y = C_{12}$$
$$o_z = 0$$

$$a_x = 0$$
$$a_y = 0$$
$$a_z = 1$$

$$p_x = l_2C_{12} + l_1C_1$$
$$p_y = l_2S_{12} + l_1S_1$$
$$p_z = 0$$

5.5.2. Robot cilindrico a tre gradi di libertà

Si consideri il robot cilindrico di fig. 17 e se ne determini l'equazione cinematica.

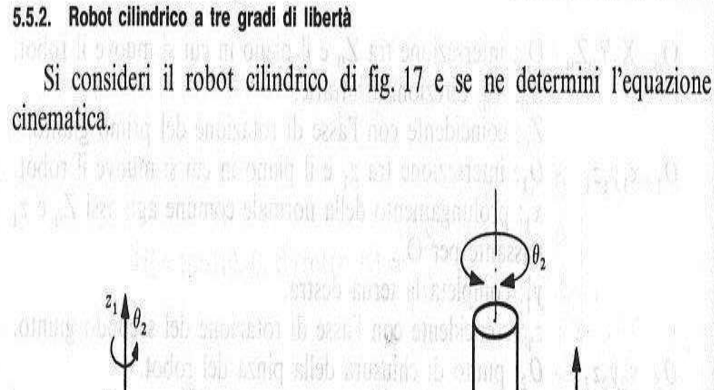


Fig. 17

TERNE DI RIFERIMENTO

$O_0-X_0Y_0Z_0$ - 0_0: un punto dell'asse di traslazione del primo giunto coincidente con quello di rotazione del secondo.
X_0, Y_0: direzioni arbitrarie.

Z_0: coincidente con l'asse parallelo alla direzione di traslazione del primo giunto passante per O_0.

$O_1-x_1y_1z_1$ - O_1: intersezione tra z_1 e la normale comune con la retta parallela alla direzione di traslazione del terzo giunto passante per O_3.
x_1, y_1: coincidenti con X_0, Y_0 quando $d_1 = 0$.
z_1: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

$O_2-x_2y_2z_2$ - O_2 intersezione tra z_2 e la normale comune a z_1.
x_2: normale al piano individuato da z_1 e z_2.
y_2: completa la terna destra.
z_2: coincidente con la retta parallela alla direzione di traslazione del terzo giunto passante per O_3.

$O_3-x_3y_3z_3$ - O_3: punto di chiusura della pinza del robot.
x_3: coincidente con il vettore normale della pinza.
y_3: coincidente con il vettore apertura.
z_3: coincidente con il vettore avvicinamento.

PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto	θ_i	d_i	α_i	a_i	Matr.
1	0	d_1	0	0	A_1
2	θ_2	0	−90	a_2	A_2
3	0	d_3	0	0	A_3

MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EQUAZIONE CINEMATICA

$$n_x = C_2$$
$$n_y = S_2$$
$$n_z = 0$$

$$o_x = 0$$
$$o_y = 0$$
$$o_z = -1$$

$$a_x = -S_2$$
$$a_y = C_2$$
$$a_z = 0$$

$$p_x = -d_3S_2 + a_2C_2$$
$$p_y = d_3C_2 + a_2S_2$$
$$p_z = d_1$$

Esempio

Dato il robot di fig. 17, calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$$d_1 = 500 \text{ mm}$$
$$\theta_2 = 30°$$
$$d_3 = 400 \text{ mm}$$

sapendo che:

$$a_2 = 100 \text{ mm}$$

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto al riferimento:

$$T = A_1A_2A_3 = \begin{bmatrix} .866 & 0 & -.500 & -113.4 \\ .500 & 0 & .866 & 396.4 \\ 0 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato disegnando la configurazione della struttura corrispondente ai dati del problema.

5.5.3 Robot antropomorfo a tre gradi di libertà

Si consideri il robot antropomorfo di fig. 18 e se ne determini l'equazione cinematica.

TERNE DI RIFERIMENTO

$O_0 - X_0Y_0Z_0$ - 0_0: intersezione tra Z_0 e Z_1.
X_0, Y_0: direzioni arbitrarie.
Z_0: coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto.

$O_1 - x_1y_1z_1$ - O_1: coincidente con O_0.
x_1: normale al piano individuato da Z_0 e z_1.
y_1: completa la terna destra.
z_1: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

$O_2 - x_2y_2z_2$ - O_2: intersezione tra z_2 e la normale comune a z_1 passante per O_1.
x_2: prolungamento della normale comune.
y_2: completa la terna destra.
z_2: coincidente con l'asse di rotazione del terzo giunto.

$O_3 - x_3y_3z_3$ - O_3: coincidente con O_2.
x_3: coincidente con il vettore normale della pinza.
y_3: coincidente con il vettore apertura.
z_3: coincidente con il vettore avvicinamento.

Intuitivamente si sarebbe tentati di sistemare l'origine di questa terna in corrispondenza del punto di chiusura della pinza. Questa sistemazione non è tuttavia compatibile con la metodologia di Denavit e Hartenberg in quanto i quattro parametri non sarebbero sufficienti per descrivere la posizione della terza terna rispetto alla terna precedente. In particolare, per portare a coincidere le due origini, sarebbe necessario traslare O_3 lungo l'asse z_3, movimento non permesso dal formalismo adottato.

La posizione della pinza (P in fig. 18), detta l_2 la distanza tra P ed O_3 può essere calcolata come segue:

$$P_x = p_x + l_2a_x$$
$$P_y = p_y + l_2a_y$$
$$P_z = p_z + l_2a_z$$

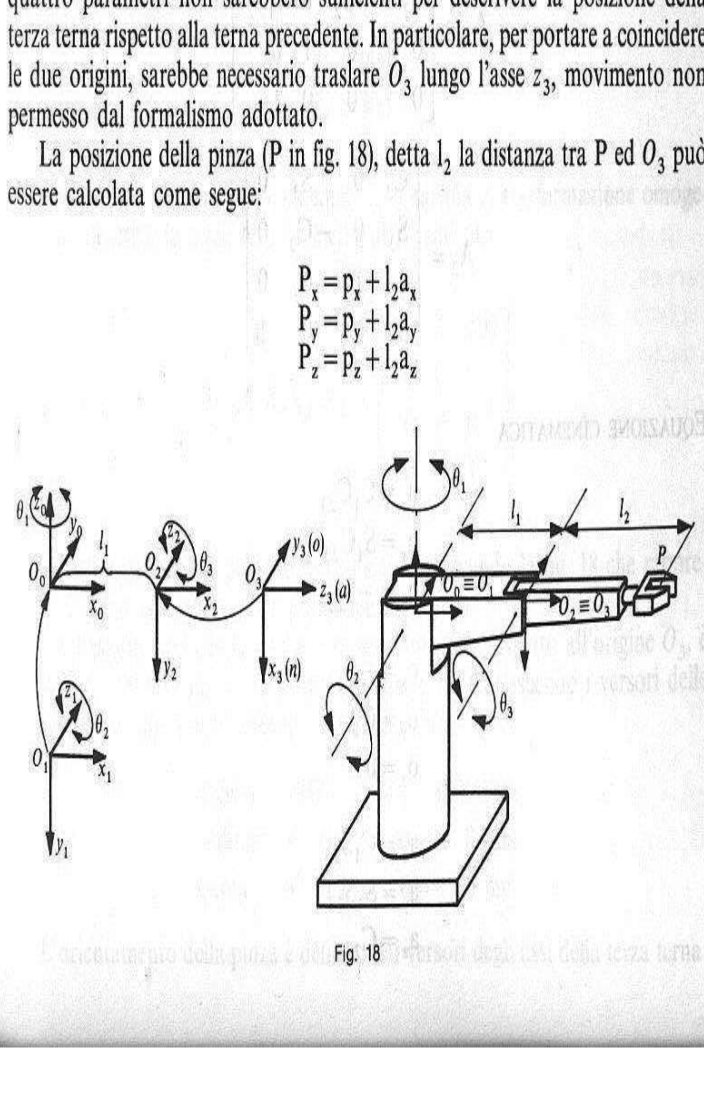


Fig. 18

Infatti P si trova sul prolungamento in direzione positiva dell'asse z_3, di cui si conoscono i coseni direttori a_x, a_y, a_z.

L'orientamento è invece determinato dalla conoscenza di quello della terza terna.

Parametri cinematici e variabili di giunto

Giunto	θ_i	d_i	α_i	a_i	Matr.
1	θ_1	0	−90	0	A_1
2	θ_2	0	0	l_1	A_2
3	θ_2	0	90	0	A_3

Matrici di trasformazione C-H

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_1C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_1S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equazione cinematica

$$n_x = C_1C_{23}$$
$$n_y = S_1C_{23}$$
$$n_z = -S_{23}$$

$$o_x = -S_1$$
$$o_y = C_1$$
$$o_z = 0$$

$$a_x = C_1S_{23}$$
$$a_y = S_1S_{23}$$
$$a_z = C_{23}$$

$$p_x = l_1C_1C_2$$
$$p_y = l_1S_1C_2$$
$$p_z = -l_1S_2$$

La posizione della pinza è data da:

$$P_x = l_1C_1C_2 + l_2C_1S_{23}$$
$$P_y = l_1S_1C_2 + l_2S_1S_{23}$$
$$P_z = -l_1S_2 + l_2C_{23}$$

Esempio

Dato il robot di fig. 18, calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$$\theta_1 = 0°$$
$$\theta_2 = 0$$
$$\theta_3 = 90°$$

sapendo che:

$$l_1 = 600$$
$$l_2 = 500$$

Sostituendo nell'equazione cinematica, si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terza terna rispetto al riferimento:

$$T = A_1A_2A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato osservando la fig. 18 che rappresenta il robot con questa configurazione dei giunti.

La posizione del centro pinza sarà un punto che, rispetto all'origine O_3, è traslato di 500 mm nel verso positivo dell'asse z_3. Conoscendo i versori delle coordinate di tale punto possono essere calcolate:

$$\text{ascissa} \rightarrow 600 + 1 * 500 = 1100 \text{ mm}$$
$$\text{ordinata} \rightarrow 0 + 0 * 0 = 0 \text{ mm}$$
$$\text{quota} \rightarrow 0 + 0 * 0 = 0 \text{ mm}$$

L'orientamento della pinza è definito dai versori degli assi della terza terna.

5.5.4. Polso sferico

Si consideri il polso sferico di fig. 19 e se ne determini l'equazione cinematica.

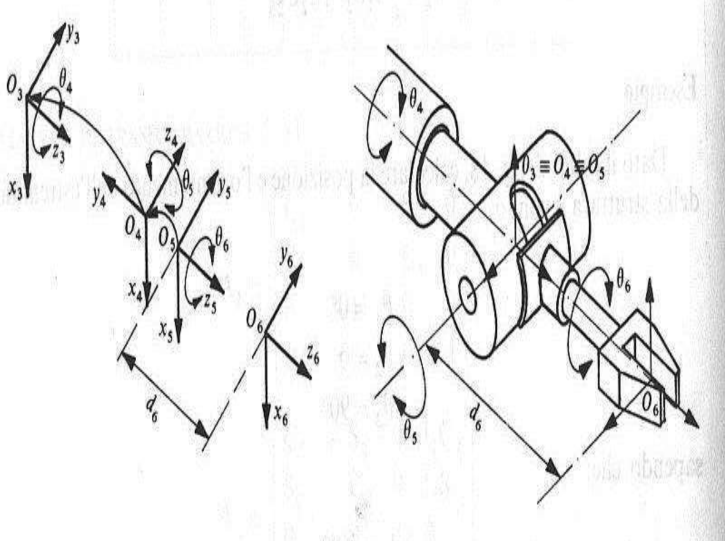


Fig. 19

TERNE DI RIFERIMENTO

Il polso viene normalmente collocato a valle dei tre giunti principali per permettere al robot di orientare correttamente gli oggetti. Per questo si considererà come terna di riferimento la O_3–$x_3y_3z_3$ mentre le successive avranno indice crescente, così come le variabili di giunto che saranno indicate con θ_4, θ_5, θ_6.

O_3–$x_3y_3z_3$ - O_3: intersezione degli assi di rotazione dei giunti.
x_3, y_3: direzioni arbitrarie.
z_3: coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto del polso.

O_4–$x_4y_4z_4$ - O_4: coincidente con O_3.
x_4: normale al piano individuato da z_3 e z_4.
y_4: completa la terna destra.
z_4: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto del polso.

O_5–$x_5y_5z_5$ - O_5: coincidente con O_3.
x_5: normale al piano individuato da z_4 e z_5.
y_5: completa la terna destra.
z_5: coincidente con l'asse di rotazione del terzo giunto del polso.

O_6–$x_6y_6z_6$ - O_6: punto di chiusura della pinza del robot.
x_6: coincidente con il vettore normale della pinza.
y_6: coincidente con il vettore apertura.
z_6: coincidente con il vettore avvicinamento.

PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto polso	θ_i	d_i	α_i	a_i	Matr.
1	θ_4	0	−90	0	A_4
2	θ_5	0	90	0	A_5
3	θ_6	d_6	0	0	A_6

MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EQUAZIONE CINEMATICA

$$n_x = C_4C_5C_6 - S_4S_6$$
$$n_y = S_4C_5C_6 + C_4S_6$$
$$n_z = -S_5C_6$$

$$o_x = -C_4C_5S_6 - S_4C_6$$
$$o_y = -S_4C_5S_6 + C_4C_6$$
$$o_z = S_5S_6$$

$$a_x = C_4S_5$$
$$a_y = S_4S_5$$
$$a_z = C_5$$

$$p_x = d_6C_4S_5$$
$$p_y = d_6S_4S_5$$
$$p_z = d_6C_5$$

Esempio

Dato il polso di fig. 19, calcolare la posizione e l'orientamento della sua terna di estremita quando:

$$\theta_4 = 0^\circ$$
$$\theta_5 = 0^\circ$$
$$\theta_6 = 0^\circ$$

sapendo che:

$$d_6 = 150 \text{ mm}$$

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto a quella di riferimento:

$$T = A_4A_5A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato immediatamente facendo riferimento alla fig. 19.

5.5.5. Robot a sei gradi di libertà

Questo esempio è da ritenersi facoltativo ai fini del completamento del programma didattico e va considerato come uno strumento di approfondimento.

Il calcolo della cinematica diretta per un robot a sei gradi di libertà permette di padroneggiare praticamente tutte le strutture dei robot industriali.

Tale calcolo presenta delle complicazioni, rispetto agli esempi finora sviluppati, solo di natura quantitativa e, come tali, facilmente superabili, pur di porre la dovuta attenzione nella sua esecuzione.

In precedenza si è sottolineato come i sei giunti di un robot possano essere distinti in un primo gruppo di tre che servono a posizionare gli oggetti nello spazio seguiti dagli altri che si incaricano della loro orientazione.

Per questo si sono sviluppati degli esempi di strutture a tre gradi di libertà specializzate nel posizionamento (robot cilindrico e articolato) e nell'orientamento (polso sferico).

Unendo in cascata una struttura di posizionamento ed una di orientamento si realizza un robot completo a sei gradi di libertà.

Utilizzando la struttura cilindrica sarà sufficiente sovrapporre le due terne $O_3 - x_3y_3z_3$, quella del robot e quella del polso. Le relazioni della cinematica diretta potranno essere ottenute moltiplicando tra loro quelle di posizionamento e di orientazione.

Utilizzando la struttura antropomorfa si incontra qualche difficoltà ulteriore perché, oltre a sovrapporre le due terne $O_3 - x_3y_3z_3$, bisognerà traslare la quarta lungo l'asse z_3 fino a portare O_4 a coincidere con P.

Per meglio spiegare questa operazione si svilupperà in dettaglio la cinematica diretta per un robot articolato a sei gradi di libertà.

TERNE DI RIFERIMENTO

La disposizione delle terne di riferimento può essere realizzata ricordando i par. 5.5.3 e 5.5.4. mentre la separazione che va introdotta tra la terza e la quarta terna del polso può essere compresa facendo riferimento alla fig. 20.

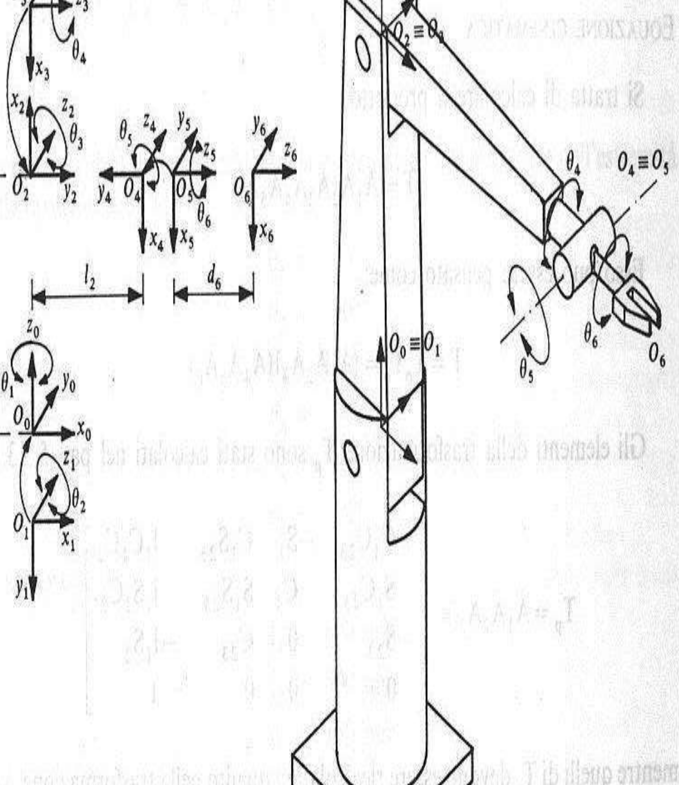


Fig. 20

PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto	θ_i	d_i	α_i	a_i	Matr.
1	θ_1	0	−90	0	A_1
2	θ_2	0	0	l_1	A_2
3	θ_2	0	90	0	A_3
4	θ_4	l_2	−90	0	A_4
5	θ_5	0	90	0	A_5
6	θ_6	d_6	0	0	A_6

MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

Le matrici di trasformazione sono quelle riportate nei par. 5.5.3 e 5.5.4. L'unico cambiamento riguarda la trasformazione A_4 che ora dovrà contenere anche la componente traslatoria prima introdotta:

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EQUAZIONE CINEMATICA

Si tratta di calcolare il prodotto:

$$T = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

Esso può essere pensato come:

$$T = T_pT_o = (A_1A_2A_3)(A_4A_5A_6)$$

Gli elementi della trasformazione T_p sono stati calcolati nel par. 5.5.3:

$$T_p = A_1A_2A_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -S_1 & C_1S_{23} & l_1C_1C_2 \\ S_1C_{23} & C_1 & S_1S_{23} & l_1S_1C_2 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -l_1S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mentre quelli di T_o devono essere ricalcolati in quanto nella trasformazione A_4 è stata introdotta una traslazione. In particolare la componente di orientazione rimarrà quella calcolata nel par. 5.5.4, mentre varierà quella di traslazione:

$$T_o = A_4A_5A_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & d_6C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & d_6S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & d_6C_5 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eseguendo il prodotto tra le due matrici si ottiene l'equazione cinematica per il robot a sei gradi di libertà:

$$n_x = C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$$
$$n_y = S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6)$$
$$n_z = -S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_{23}S_5C_6$$

$$o_x = C_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6)$$
$$o_y = S_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6)$$
$$o_z = S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6$$

$$a_x = C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5$$
$$a_y = S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5$$
$$a_z = C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5$$

$$p_x = C_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + l_2S_{23} + l_1C_2] - d_6S_1S_4S_5$$
$$p_y = S_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + l_2S_{23} + l_1C_2] + d_6C_1S_4S_5$$
$$p_z = d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + C_{23}l_2 - S_2l_1$$

Esempio

Dato il robot di fig. 20 calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$$\theta_1 = 0^\circ$$
$$\theta_2 = -90^\circ$$
$$\theta_3 = 180^\circ$$
$$\theta_4 = 0^\circ$$
$$\theta_5 = 0^\circ$$
$$\theta_6 = 0^\circ$$

sapendo che:

$$l_1 = 600 \text{ mm}$$
$$l_2 = 500 \text{ mm}$$
$$d_6 = 150 \text{ mm}$$

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto al riferimento:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 650 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato osservando la fig. 20 che rappresenta il robot con questa configurazione dei giunti.

CAPITOLO SESTO

CINEMATICA INVERSA

Introduzione

La posizione e l'orientamento di un oggetto manipolato da un robot dipendono dalle caratteristiche geometriche della sua struttura e dalla configurazione dei suoi giunti.

Assai meno evidente è il procedimento, noto sotto il nome di cinematica inversa, con cui determinare quale configurazione deve assumere la struttura affinché l'oggetto manipolato assuma la posizione ed l'orientamento desiderati.

Dopo un inquadramento qualitativo della cinematica inversa si risolve il problema per un robot a due gradi di libertà e si introduce la funzione trigonometrica inversa ATAN2(x, y).

Si affronta quindi teoricamente la cinematica inversa per una struttura a sei gradi di libertà per terminare con una serie di esempi di complessità graduata con cui verificare le conoscenze apprese.

Il capitolo si conclude con una introduzione alle metodologie di controllo delle traiettorie del robot.

6.1 Cinematica inversa

La cinematica inversa affronta il problema statico della ricerca delle relazioni per il calcolo delle variabili di giunto, date la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura dei robot e i parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti (fig. 1).

Dati una certa posizione e un certo orientamento della terna di estremità della struttura, si tratta di calcolare tutti i possibili insiemi di variabili di giunto che permettono di ottenerli.

I parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti vengono definiti durante la modellizzazione della struttura e, per ogni grado di libertà del robot, si avranno tre costanti e una variabile. La posizione e l'orientamento della estremità della struttura dipendono dal valore che le variabili di giunto assumono di volta in volta.

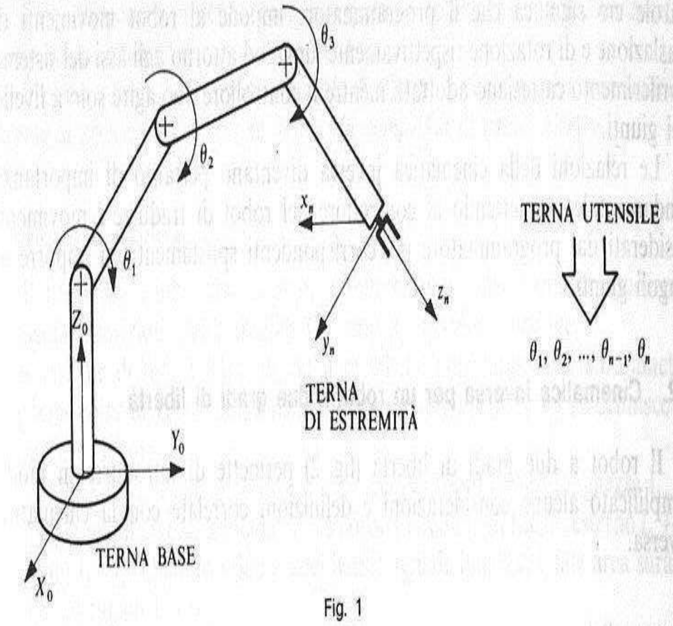


Fig. 1

Nella pratica, la cinematica inversa utilizza come dati di partenza i valori degli elementi della matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ricava i valori delle variabili di giunto corrispondenti:

$$\begin{array}{lll} T \rightarrow & (q_1, q_2 \; ..., \; q_{n-1}, q_n) & \leftarrow \text{soluzione 1} \\ & (q_1, q_2 \; ..., \; q_{n-1}, q_n) & \leftarrow \text{soluzione 2} \\ & ... \quad ... \quad ... & \\ & (q_1, q_2, \; ..., \; q_{n-1}, q_n) & \leftarrow \text{soluzione k} \end{array}$$

Con q_i si intende la generica variabile che sarà un angolo (θ_i) od una traslazione (d_i) in funzione del tipo di giunto corrispondente.

Nel par. 5.1 si è visto come la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura del robot possano essere espressi sia nello spazio cartesiano (tramite la matrice T) sia in quello dei giunti (tramite le variabili di giunto). La cinematica diretta trasforma un punto dello spazio dei giunti nella corrispondente posizione ed orientamento della terna di estremità; quella inversa al contrario, data la posizione e l'orientamento della terna di estremità, determina tutti i punti corrispondenti nello spazio dei giunti.

Nelle applicazioni pratiche la cinematica inversa è di gran lunga più importante di quella diretta.

Il programmatore ragiona infatti nello spazio tridimensionale cartesiano, mentre il controllo elettronico del robot opera in quello dei giunti. In altre