

## GENERALITÀ SUI ROBOT INDUSTRIALI

## 1.1. La struttura meccanica

La struttura meccanica dei robot è costituita da una sequenza di elementi meccanici connessi tra loro da giunti che ne consentono il moto relativo.

I singoli elementi possono essere connessi tra loro in serie (fig. 1a) od in parallelo (fig. 1b). La struttura è seriale quando i singoli elementi sono collegati l'uno all'altro come gli anelli di una catena; è parallela quando tutti gli elementi sono collegati sia a terra sia all'estremità tramite dei giunti rotoideali. L'approccio seriale garantisce una più ampia possibilità di movimento, mentre quello parallelo permette di ottenere una maggiore rigidezza. Osservando l'esempio di fig. 1 è infatti evidente che il robot di sinistra può spostare la sua estremità «Ea» in una porzione di piano maggiore di quella raggiungibile da «Eb», mentre quello di destra garantisce una maggiore rigidezza grazie alla struttura triangolare. Le strutture seriali, definite dalla meccanica applicata catene cinematiche aperte, attualmente, sono di gran lunga le più diffuse in ambito industriale.

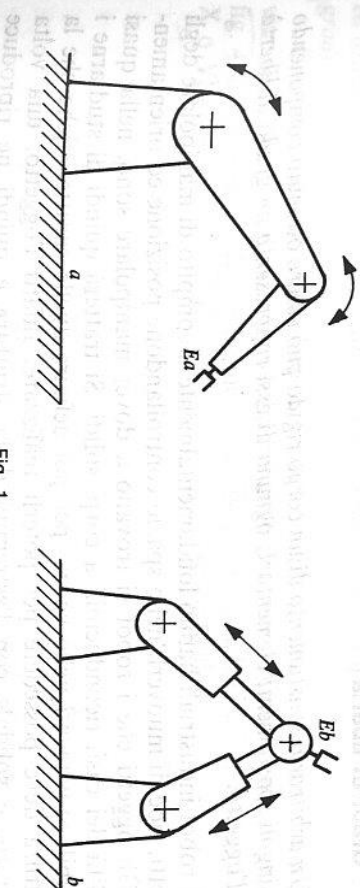


Fig. 1

Tra gli elementi che costituiscono la catena cinematica di un robot, il primo è quello collegato a terra e viene definito telaio, quando è fisso (fig. 2a) oppure base mobile, quando ha delle possibilità di movimento (fig. 2b).

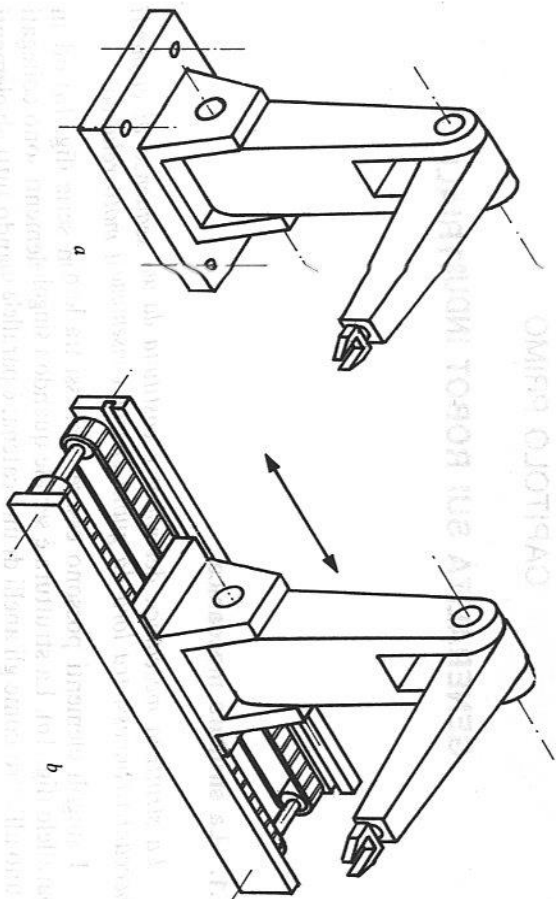


Fig. 2

L'ultimo elemento della catena è collegato solo al precedente in quanto l'altra sua estremità termina con un attacco a cui andranno collegati gli utensili specifici per l'applicazione alla quale il robot verrà destinato.

I giunti di collegamento tra i vari elementi meccanici sono classificati come rotatori o prismatici, in funzione del tipo di movimento relativo che permettono, rispettivamente rotatorio o traslatorio.

## 1.2. Gradi di libertà

*Un arbitrario spostamento di un corpo rigido può essere ottenuto componendo dei singoli spostamenti elementari; ognuno di essi rappresenta un grado di libertà per l'oggetto.*

I robot industriali hanno fondamentalmente il compito di manipolare degli oggetti, cioè di muoverli nello spazio controllandone posizione ed orientamento. Gli oggetti che i robot si trovano a dover manipolare sono, nella quasi totalità dei casi, riconducibili a corpi solidi. Si tratterà quindi di studiarne i possibili movimenti nello spazio per poi definire quelle caratteristiche che la struttura deve possedere per poterli realizzare. Infatti l'oggetto, una volta afferrato, è solidale con l'estremità della struttura e quindi ne riproduce fedelmente gli spostamenti.

### 1.2.1. Gradi di libertà d'un corpo rigido

*Un corpo rigido in, nello spazio, sei gradi di libertà corrispondenti ad altrettante possibilità di spostamento.*

Ciò significa che la sua posizione e il suo orientamento rispetto ad un

sistema di riferimento sono descritte da sei parametri. Per rendere più intuitiva questa affermazione si immagini di rendere solidale con l'oggetto rigido la terna cartesiana  $xyz$  (fig. 3). I sei parametri prima citati risultano di facile interpretazione: tre definiscono la posizione dell'origine della terna  $xyz$  mentre i rimanenti ne individuano l'orientazione. Gli spostamenti corrispondenti sono le traslazioni (parallelamente agli assi coordinati  $XYZ$ ) e tre rotazioni (attorno agli stessi assi).

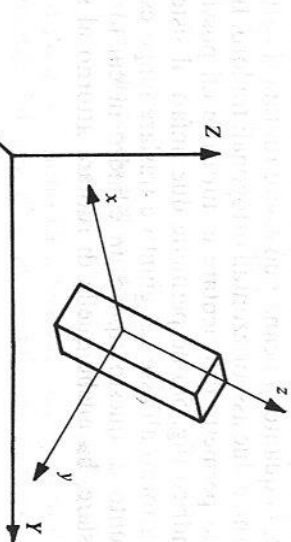


Fig. 3

Questo permette di affermare che la struttura di un robot, per poter muovere ed orientare arbitrariamente un corpo nello spazio, ha bisogno di un minimo di sei gradi di libertà.

Con analoghe considerazioni è facile concludere che un corpo rigido, se vincolato a muoversi in un piano, ha tre gradi di libertà. Infatti, come mostra la fig. 4, le sue possibilità di movimento si riducono a due traslazioni (lungo l'asse  $X$  o  $Y$ ) e ad una rotazione (attorno ad un asse verticale).

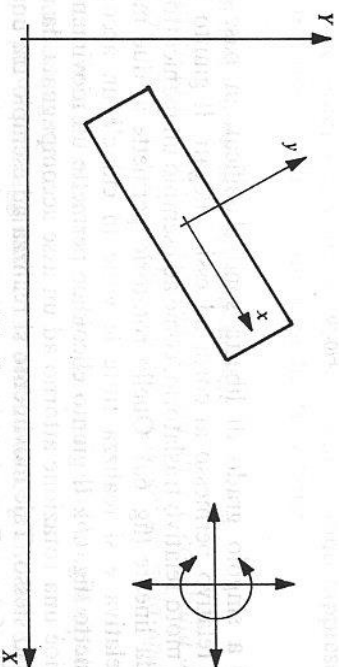


Fig. 4

### 1.2.2. Gradi di libertà di un giunto

*Un giunto ha tanti gradi di libertà quante sono le possibilità di movimento relative permesse ai corpi rigidi che collega.*

Nella realtà possono essere realizzati dei giunti che permettono fino a tre gradi di libertà.

Il giunto sferico permette ad esempio tre possibilità di spostamento relative ai due oggetti che collega. Un esempio molto semplice dell'utilizzo di questo giunto si ha nei porta penna orientabili (fig. 5a). In tal caso i gradi di libertà permessi sono tre, in quanto la penna può essere ruotata sia attorno ad un'asse verticale che attorno a due assi orizzontali ortogonali tra loro. In altre parole un solo giunto sferico permette di orientare in tutti i modi possibili un oggetto.

Il giunto cilindrico (fig. 5b) ne permette due; infatti il sistema a valle può soltanto ruotare attorno all'asse del giunto e traslare lungo esso. Un esempio pratico di un giunto di questo tipo è un cilindro in cui lo stelo, oltre alla possibilità di traslare, ha anche quella di ruotare attorno al suo asse.

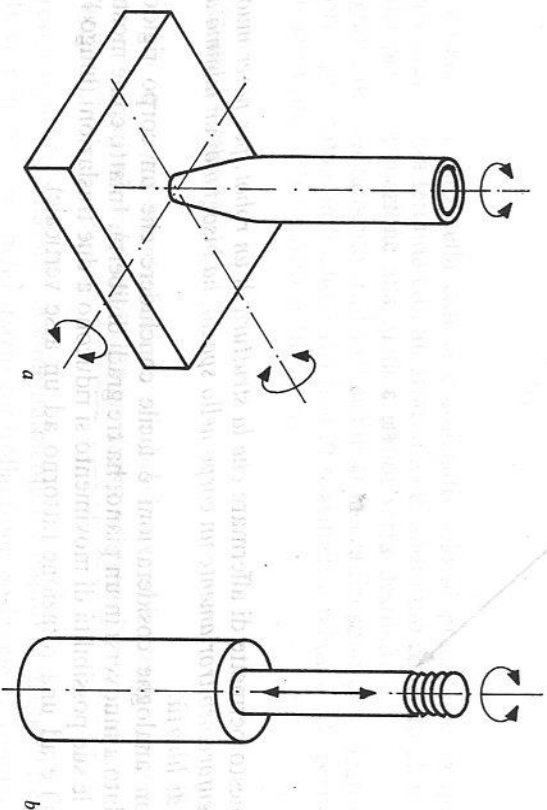


Fig. 5

I giunti a singolo grado di libertà sono classificati in base al tipo di movimento relativo permesso ai corpi ad essi collegati. Il giunto prismatico permette un moto relativo traslatorio, come ad esempio un manico che scorre su una guida lineare (fig. 6a). Quello rotatorio permette ai due membri una rotazione relativa e si realizza tutte le volte in cui c'è un accoppiamento penna/cuscinetto (fig. 6b). Il giunto elicoidale permette un movimento relativo elicoidale, cioè una rotazione attorno ad un'asse accompagnata da una traslazione lungo lo stesso. Tale movimento si realizza ad esempio tra una vite ed il suo dado (fig. 6c).

### 1.2.3. Gradi di libertà della struttura di un robot

I robot, come tutte le strutture meccaniche realizzate con parti rigide collegate fra loro da giunti, sono caratterizzati dal numero di gradi di libertà. Tale numero dipende dal tipo di giunti e dal loro numero.

*Le strutture dei robot sono realizzate utilizzando dei giunti di tipo prismatico o rotatorio.*

Questa affermazione è corretta solo se la si riferisce a quei giunti che sono accoppiati con un motore e quindi sono in grado di produrre un movimento. Infatti nei robot si possono trovare altri tipi di giunti, tipicamente sferici, ma puramente passivi. Il loro impiego si rende necessario quando si utilizzano strutture parallele, o all'interno di cinematismi per la trasmissione del moto. Il nostro interesse si soffermerà comunque sui primi, in quanto essi soltanto sono in grado di spostare e di orientare nello spazio l'estremità della struttura del robot. L'utilizzo esclusivo di giunti a singolo grado di libertà ci permette di affermare che:

*I robot hanno tanti gradi di libertà quanti sono i giunti contenuti nella loro struttura.*

I gradi di libertà possono essere calcolati anche come numero di parametri necessari per individuare la configurazione assunta dalla struttura. Nel caso dei robot tali parametri vengono anche detti variabili di giunto, in quanto esprimono la posizione assunta da ciascuno di essi e quindi sono rappresentati da un angolo di rotazione o da una distanza di traslazione.

### 1.2.4. Gradi di libertà dell'estremità della struttura

*La struttura di un robot deve permettere sei diverse possibilità di movimento alla sua estremità così da poterla spostare ed orientare nello spazio in modo arbitrario.*

Tanti sono infatti i gradi di libertà necessari per poter manipolare in modo completo un corpo rigido.

Lo scopo può essere raggiunto con l'utilizzo di sei giunti ben disposti, cioè in grado di generare dei movimenti indipendenti tra loro. Per meglio comprendere

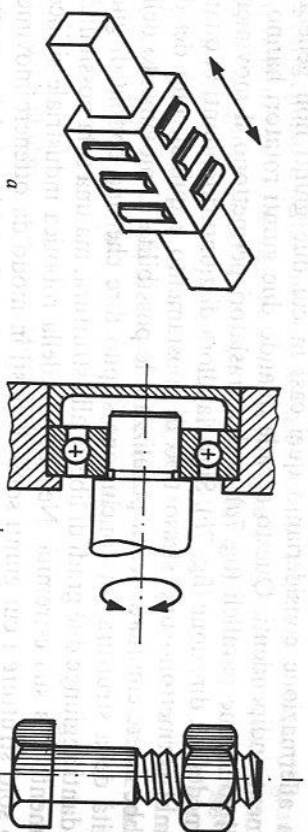


Fig. 6

questa affermazione consideriamo quei casi in cui due giunti non generano movimenti indipendenti. Questo accade quando due giunti rotatori hanno gli assi di rotazione paralleli (fig. 7a), o due traslatori permettono il movimento nella medesima direzione (fig. 7b). Si parla allora di giunti ridondanti in quanto entrambi permettono uno stesso tipo di spostamento e quindi, uno dei due potrebbe essere eliminato senza penalizzare le possibilità di movimento dell'estremità della struttura. In conclusione si può dire che una coppia di giunti ridondanti aggiunge due gradi di libertà alla struttura, ma una sola possibilità di movimento alla sua estremità. Nell'ambito della robotica industriale si incontrano solo strutture i cui giunti sono disposti in modo da ottenere movimenti indipendenti; per questo è lecito affermare che i gradi di libertà della struttura coincidono con quelli della sua estremità.

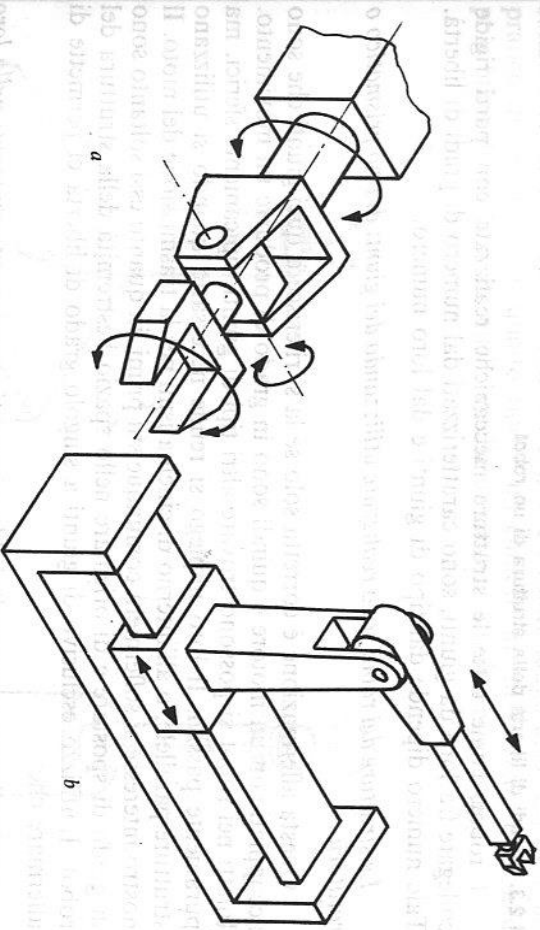


Fig. 7

*Un robot industriale a sei gradi di libertà può spostare ed orientare in modo arbitrario nello spazio l'estremità della sua struttura.*

Quando un robot ha meno di sei gradi di libertà gli vengono a mancare alcune possibilità di movimento. Dato che la capacità di spostare l'oggetto nello spazio è in genere ritenuta irrinunciabile, si eliminano alcune possibilità di orientazione. Quando il robot ha più di sei gradi di libertà si dice ridondante, in quanto ha a disposizione dei giunti supplementari per realizzare i suoi movimenti. Queste particolari strutture permettono di ottenere una desiderata posizione ed una determinata orientazione per un oggetto manipolato con infinite configurazioni diverse della struttura. L'utilizzo di robot ridondanti in ambito industriale è praticamente inesistente. Quando si parla di robot a sette gradi di libertà i costruttori fanno infatti riferimento al numero di assi (giunti) controllati e, di conseguenza, includono nel conteggio anche il movimento di

apertura/chiusura della pinza e/o la base mobile. Tuttavia si tratta di giunti che non vengono gestiti in contemporanea con quelli della struttura ma in momenti diversi. La pinza viene infatti chiusa per afferrare o rilasciare gli oggetti da manipolare ma non contribuisce alle possibilità di movimento della struttura. Anche la base mobile non può essere inclusa tra i gradi di libertà della struttura in quanto essa serve solo a spostare il robot in zone di lavoro diverse, ma non viene mai utilizzata durante il suo ciclo operativo.

**1.2.5. Gradi di libertà nelle applicazioni pratiche**

In molte applicazioni pratiche si utilizzano strutture con meno di sei gradi di libertà nell'intento di ridurre costi e complessità del robot.

Robot a quattro gradi di libertà sono utilizzati in quelle applicazioni di montaggio (fig. 8a) in cui l'unione delle parti si ottiene con una sequenza di inserzioni verticali. In tal caso infatti tre gradi di libertà (traslazione lungo gli assi X ed Y e rotazione attorno ad un asse verticale) servono per posizionare ed orientare gli oggetti nel piano, mentre il quarto (traslazione lungo l'asse verticale) esegue l'operazione di inserzione.

Robot a tre gradi di libertà possono sostituire in modo del tutto equivalente quelli a quattro ogni volta che i pezzi da montare sono cilindrici (perni, spine...). Infatti in questa situazione diventa del tutto superflua la possibilità di ruotare il pezzo attorno ad un asse verticale essendo questo simmetrico rispetto a tale asse (fig. 8b). Vale la pena di sottolineare che questa situazione si presenta abbastanza frequentemente durante operazioni di montaggio.

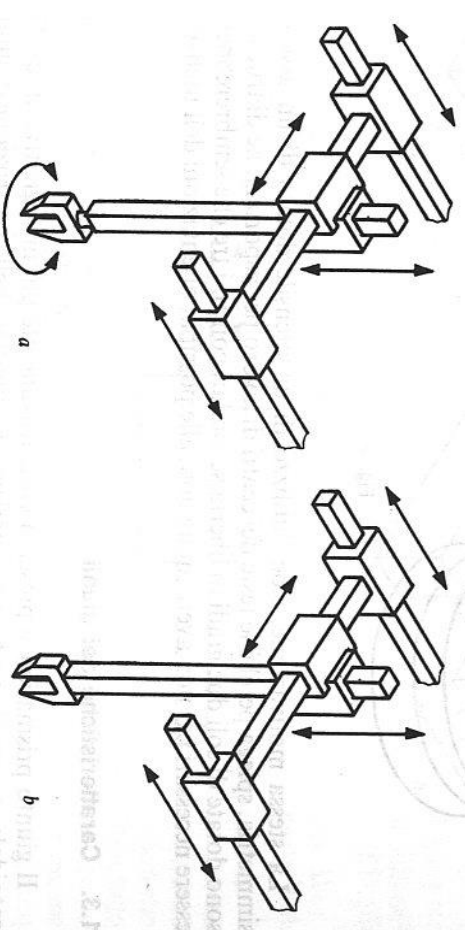


Fig. 8

Robot a cinque gradi di libertà possono sostituirsi a quelli a sei tutte le volte in cui si devono manipolare degli oggetti dotati di simmetria assiale. Tipicamente si tratterà di oggetti di forma cilindrica che rendono del tutto superfluo il fatto che il robot possieda la capacità di ruotarsi attorno al loro asse di simmetria (fig. 9).

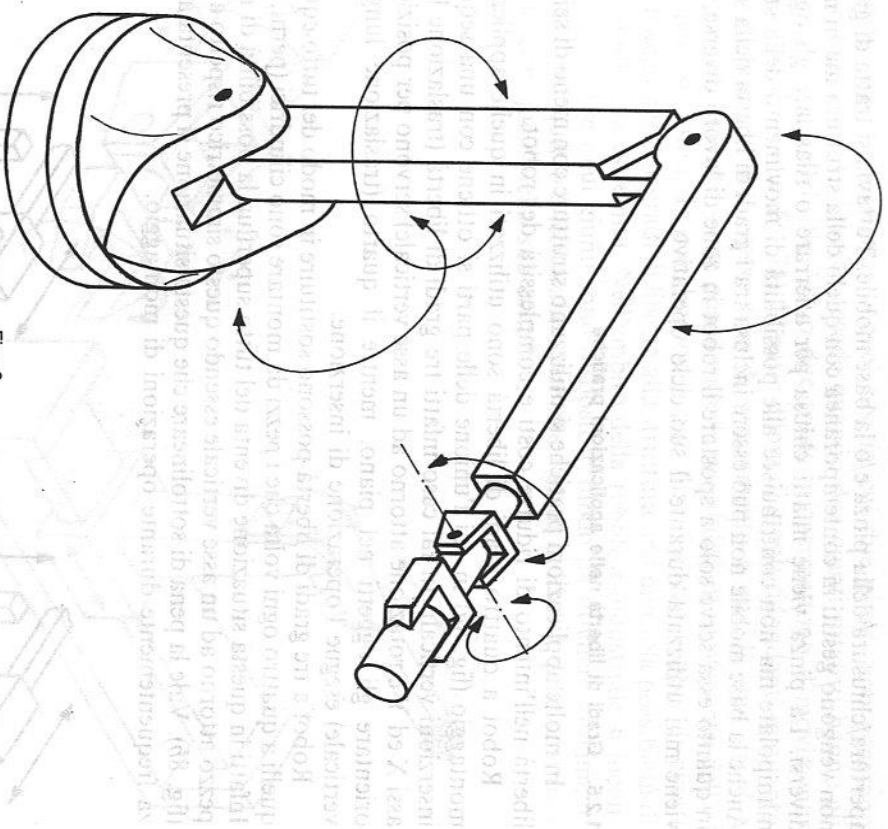


Fig. 9

La stessa motivazione, cioè l'utilizzo di un utensile dotato di un asse di simmetria, spiega perché le teste dei centri di lavoro per asportazione di truciolo sono dotate di soli due gradi di libertà secondari contro i tre che sembrerebbero essere necessari per non avere limitazioni alle possibili orientazioni dell'utensile.

### 1.3. Caratteristiche dei giunti

Il giunto prismatico si presenta costruttivamente più impegnativo di quello rotoidale ma, grazie anche alla esperienza accumulata nella costruzione di guide per macchine utensili, garantisce una maggiore precisione e rigidezza.

Il movimento relativo tra i due elementi che compongono un giunto viene sempre ottenuto, in robotica, con l'interposizione di corpi volventi (sfere o rulli) in modo da minimizzare le resistenze al moto dovute all'attrito. Tale scelta si rivela praticamente obbligata per due motivi fondamentali. In primo luogo i movimenti del robot sono caratterizzati da una sequenza di partenze e di arresti e quindi solo l'utilizzo di cuscinetti volventi può garantire un basso attrito.

Secondariamente va sottolineato che ai robot si richiede la capacità di eseguire rapidi movimenti senza ricorrere all'utilizzo di grosse forze motrici. Per questo nei robot non trovano pratico impiego né le guide a coda di rondine (molto diffuse per realizzare degli spostamenti lineari nelle macchine utensili) né i cuscinetti a strisciamento (utilizzati quando il moto rotatorio dell'albero è continuo).

Le articolazioni rotoidali vengono realizzate utilizzando la componentistica standard offerta dai costruttori di cuscinetti volventi. Nel caso di quelli prismatici si può scegliere se utilizzare delle guide a rulli (fig. 10a) o delle bussole a sfera (fig. 10b). Un importante punto a favore della soluzione rotoidale è la compattezza. Per rendersene conto basterà confrontare in fig. 11 lo spazio necessario ai due tipi di giunto per ottenere un uguale spostamento. Concettualmente nulla vieta di realizzare il giunto lineare con una struttura a telescopio per diminuire l'ingombro, ma tale approccio può solo raramente essere realizzato nella pratica per i costi e la complessità aggiuntiva che comporta.

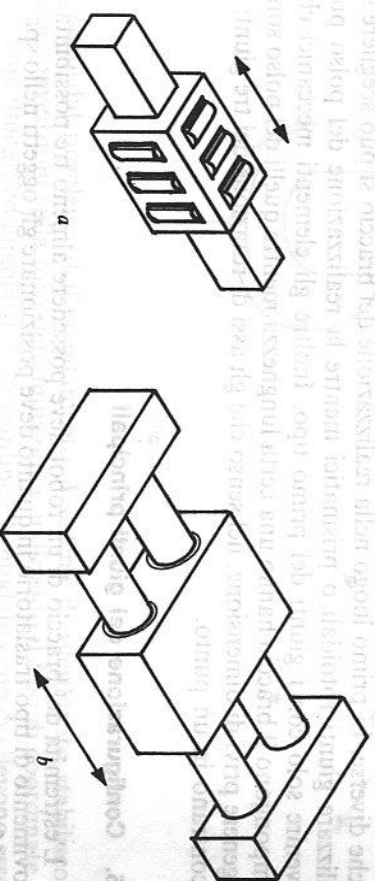


Fig. 10

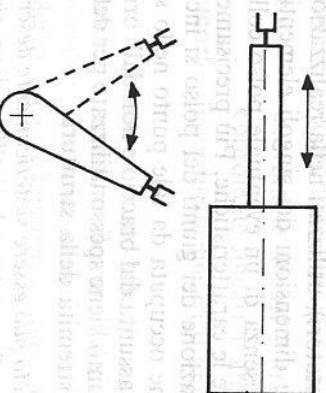


Fig. 11

Sensori ed attuatori utilizzati per il movimento delle articolazioni possono essere sia di tipo rotoidale che prismatico in quanto la meccanica mette a

disposizione molti modi per convertire un moto da rotatorio a lineare e viceversa.

#### 1.4. Giunti principali e secondari

L'estremità della struttura di un robot possiede in genere sei diverse possibilità di movimento: tre di traslazione per spostamenti nello spazio e tre di rotazione per l'orientamento.

Questa divisione dei gradi di libertà in due gruppi con finalità distinte si riflette generalmente nella struttura con una specializzazione dei giunti.

*I gradi di libertà principali si occupano di posizionare nello spazio gli oggetti manipolati dal robot, quelli secondari di orientarli.*

Quelli principali formano il braccio del robot mentre quelli secondari il polso. Braccio e polso, in conseguenza della loro funzione, presentano caratteristiche diverse. In primo luogo nella realizzazione del braccio si può scegliere se utilizzare giunti rotoideali o prismatici mentre la realizzazione del polso può avvenire solo con i giunti del primo tipo. Inoltre gli elementi meccanici che compongono il braccio hanno una certa lunghezza mentre quelli del polso sono in genere privi di dimensione, nel senso che gli assi di rotazione dei tre giunti si incontrano in un punto.

#### 1.5. Configurazione dei giunti principali

L'estremità del braccio di un robot deve possedere almeno tre possibilità di movimento di tipo traslatorio in quanto deve posizionare gli oggetti nello spazio (fig. 12).

*Il volume di lavoro è l'insieme di tutti i punti dello spazio raggiungibili dall'estremità del braccio.*

Il tipo di giunti, (lineari o rotatori), utilizzati nella realizzazione del braccio ne definisce la forma mentre le dimensioni dei singoli elementi meccanici ne determinano l'ampiezza. La presenza di un eventuale polso collegato alla sua estremità non ne altera in genere le caratteristiche. Più precisamente ciò accade ogni volta che i tre assi di rotazione dei giunti del polso si incontrano in un unico punto. Infatti la posizione occupata da tale punto nello spazio dipende solamente dalla configurazione assunta dal braccio e non dall'orientamento del polso. Per questo motivo tale punto viene spesso utilizzato per definire il volume di lavoro in sostituzione dell'estremità della struttura.

*La configurazione di un braccio può essere sinteticamente descritta utilizzando una notazione a tre lettere in cui «R» sottintende l'utilizzo di un giunto rotoideale e «P» quello di uno lineare. L'ordine riflette quello con cui si incontrano le articolazioni a partire dalla base.*

Un punto nello spazio viene individuato da tre coordinate, in quanto può essere considerato come un corpo rigido privo di dimensioni, e quindi non

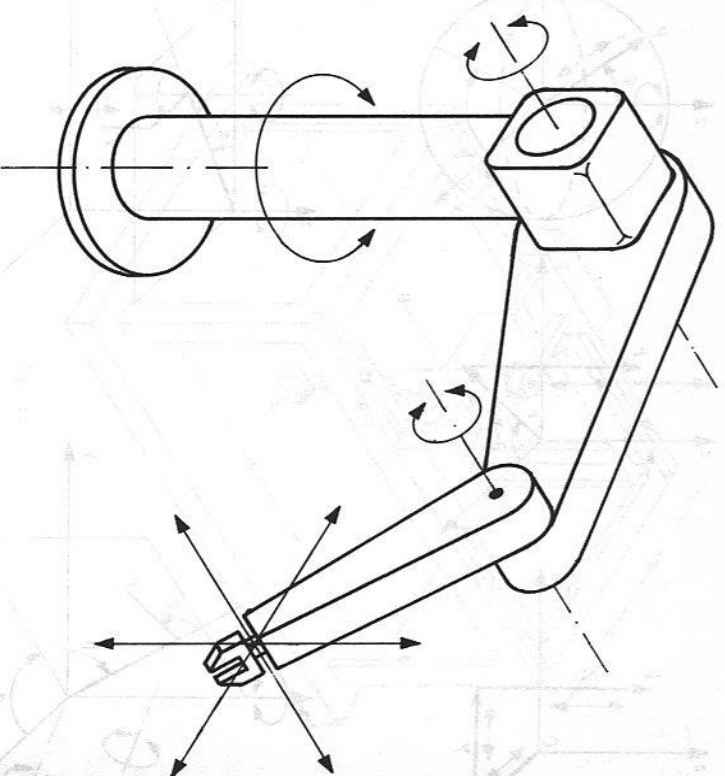


Fig. 12

toccato dal problema dell'orientamento. I sistemi di riferimento stabiliscono delle convenzioni sulla loro determinazione, indicando il tipo di coordinate da utilizzare (lineari od angolari), il loro ordine e le modalità con cui devono essere eseguite le misure.

Quelli utilizzati, descritti in dettaglio nel capitolo successivo, sono:

- coordinate lineari 3 angolari 0 - PPP (fig. 13a)
- coordinate lineari 2 angolari 1 - PRP (fig. 13b)
- coordinate lineari 1 angolari 2 - RRP (fig. 13c)
- antropomorfo - coordinate lineari 0 angolari 3 - RRR (fig. 14b)

Le strutture, realizzate in modo tale che ogni coordinata possa trovare un giunto corrispondente, prendono il nome del sistema di riferimento. Si avranno così bracci cartesiani (tre articolazioni lineari), cilindrici (due lineari e una rotazionale), sferici (una prismatica e due rotazionali) e antropomorfi (tre rotazionali).

Le strutture realizzate con l'utilizzo di almeno due giunti aventi gli assi di rotazione paralleli vengono dette articolate. Queste si dividono fra quelle che realizzano il movimento articolato in un piano verticale (antropomorfo: fig. 14a) e quelle che lo realizzano in un piano orizzontale (SCARA: fig. 14b).

Questa classificazione delle strutture dei bracci dei robot industriali richiede

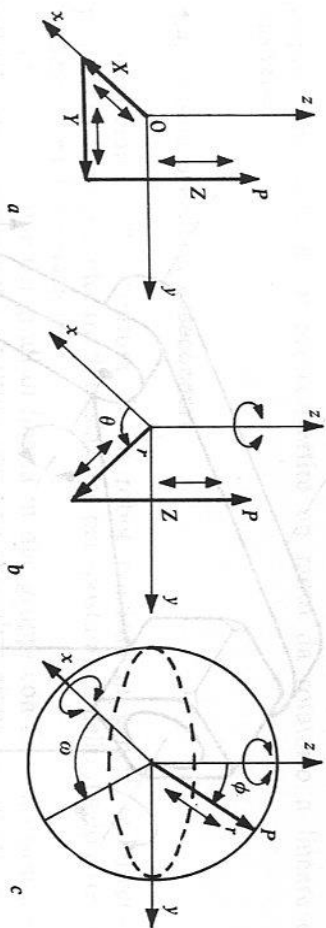


Fig. 13

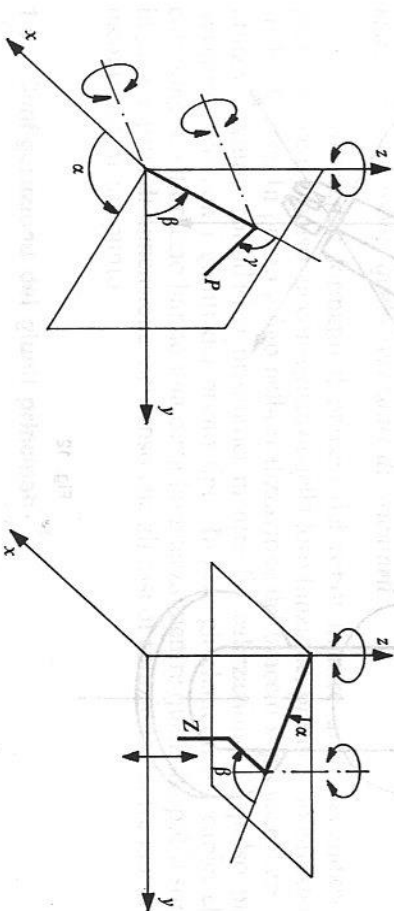


Fig. 14

quindi l'introduzione di almeno cinque categorie. Più semplice risulta la classificazione in base alle caratteristiche del volume di lavoro perché permette di ridurre a tre sole le categorie necessarie per comprenderli tutti, comprese alcune eccezioni prima non considerate.

*Infatti i possibili volumi di lavoro possono essere assimilati a tre solidi soltanto: il parallelepipedo, il cilindro e la sfera.*

È doveroso sottolineare che i volumi di lavoro effettivamente permessi dai bracci sono spesso molto complessi e per assimilarli a parallelepipedi, cilindri o sfere, sono necessarie delle approssimazioni.

Nel seguito si adotterà la classificazione basata sulla disposizione dei giunti in quanto permette di chiarire le caratteristiche di ogni singola struttura.

#### 1.5.1. Robot cartesiani - PPP

Questi robot realizzano i tre movimenti principali utilizzando tre accoppiamenti prismatici orientati secondo le assi ortogonali tra loro. Di conseguenza il volume di lavoro è un parallelepipedo le cui dimensioni sono fissate dalle corse dei singoli giunti. I robot cartesiani possono essere realizzati con una struttura a portale (fig. 15) o a montante (fig. 16).

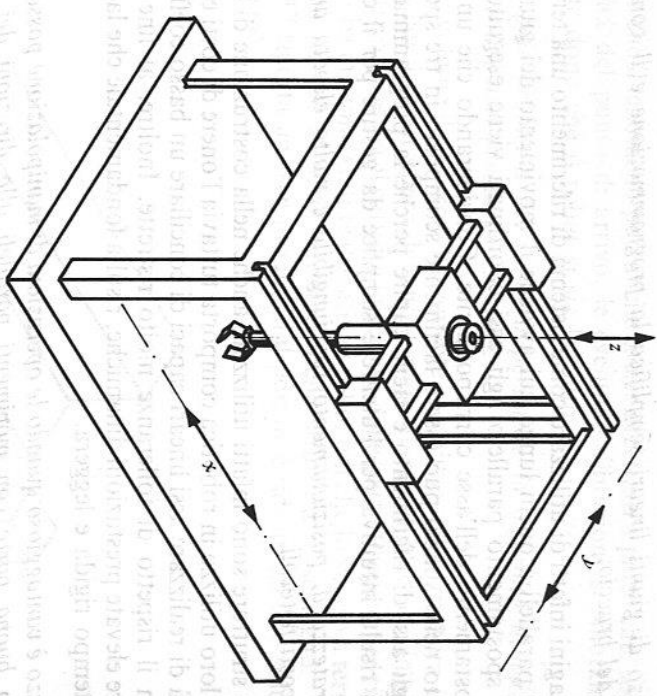


Fig. 15

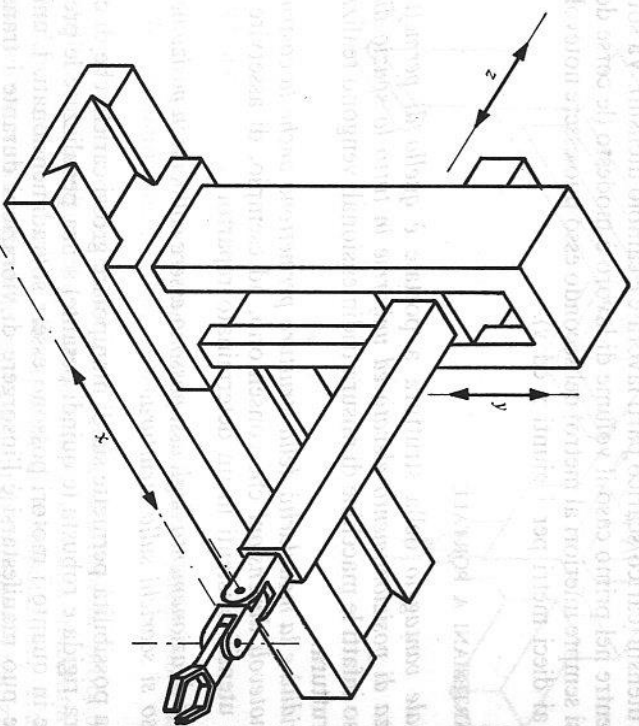


Fig. 16

*L'utilizzo di giunti lineari semplifica la programmazione e il controllo dei movimenti del braccio.*

Si immaginino infatti di utilizzare come sistema di riferimento una terna di assi ortogonali paralleli a quelli lungo cui avviene il movimento dei giunti. In tal caso ogni spostamento parallelo agli assi coordinati viene eseguito con un uguale spostamento dell'asse corrispondente. Considerando che un generico spostamento nello spazio può essere facilmente scomposto in tre spostamenti paralleli agli assi di riferimento è facile capire perché la programmazione dei movimenti risulti intuitiva per l'utente e semplice da gestire per il controllo.

*L'accuratezza di posizionamento raggiungibile è molto elevata anche se a prezzo di costi notevoli.*

Queste strutture sono infatti utilizzate anche nella costruzione di macchine utensili. Il loro utilizzo in robotica comporta tuttavia l'onere di costi elevati per la necessità di realizzare assi lineari capaci di conciliare un basso coefficiente di attrito con il rispetto di tolleranze molto ristrette. Inoltre, al fine di poter raggiungere elevate prestazioni dinamiche, risulta fondamentale che la struttura sia al contempo rigida e leggera.

*L'utilizzo è vantaggioso quando le operazioni di manipolazione possono essere eseguite in buona parte con movimenti paralleli alla direzione dei suoi assi principali.*

Nella pratica i robot cartesiani sono utilizzati per operazioni di assemblaggio che richiedono posizionamenti molto precisi oppure per l'asservimento di macchine utensili (carico/scarico parti lavorate e cambio utensili). Va sottolineato che, mentre nel primo caso il volume di lavoro è modesto (le corse dei giunti sono quasi sempre inferiori al metro) nel secondo esso può essere notevole (corse superiori ai dieci metri per i giunti x ed y).

#### ROBOT CARTESIANI A PORTALE

*Il principale vantaggio della struttura a portale è quello di permettere una accuratezza di posizionamento elevata ed uniforme in tutto lo spazio di lavoro. Non a caso infatti le macchine di misura tridimensionali vengono realizzate con questa struttura.*

*La rigidità e la modularità della struttura permettono anche la costruzione di robot di notevoli dimensioni che consentono, ad esempio, di asservire tutte le macchine utensili esistenti in un determinato reparto.*

*I motori di azionamento degli assi possono essere collocati in posizione tali che il loro peso si scarichi sulla struttura.*

Questa possibilità permette sia di manipolare grossi carichi che di costruire la struttura rigida e robusta (e quindi pesante) senza penalizzare le prestazioni dinamiche in quanto i motori possono essere sovradimensionati. L'unico problema che può manifestarsi è l'insorgere di vibrazioni durante i transitori di partenza e di fermata a livello dell'asse Z, l'unico non supportato ad entrambe le estremità, soprattutto se il peso del carico manipolato è notevole. Va tuttavia

sottolineato che il fenomeno può anche essere accettato a patto che, soprattutto in prossimità del punto di arrivo, le eventuali vibrazioni si smorzino molto rapidamente dopo che il robot si sia fermato.

*Il principale problema dei robot a portale è la difficoltà di integrazione all'interno di impianti produttivi esistenti.*

Infatti il volume di lavoro è fisicamente racchiuso dalla struttura e quindi i prodotti su cui il robot opera devono entrare al suo interno; ciò implica delle apposite attrezzature per il carico e lo scarico delle parti. Proprio per rispondere a questo problema sono stati realizzati dei robot tali che lo spazio a terra da essi occupato sia ridotto al puro ingombro della struttura di sostegno.

La fig. 17 riporta un esempio in cui il portale è ridotto ad uno solo dei due assi orizzontali.

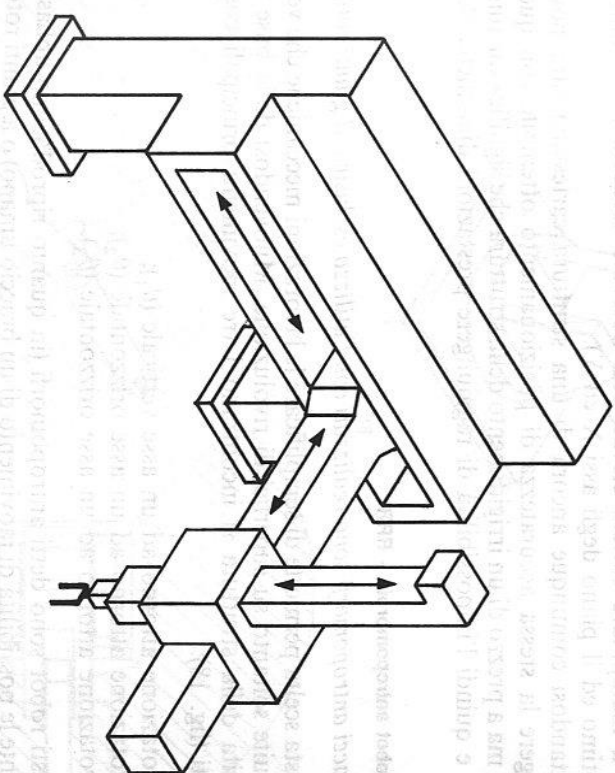


Fig. 17

#### ROBOT CARTESIANI A MONTANTE

*L'utilizzo di questa struttura semplifica notevolmente l'integrazione del robot nel layout dell'impianto, anche se preesistente.*

La scelta di realizzare dei robot con questa struttura fu probabilmente suggerita dall'idea di sostituire l'operatore umano con una macchina che ne riproducesse, per quanto possibile, le capacità di manipolazione. L'analogia risulta evidente osservando una delle tante stazioni di montaggio realizzate con questo tipo di robot. Essi vengono installati ai bordi dell'area di lavoro e possono essere assimilati a degli uomini che, ai lati del bancone di lavoro,

e eseguono operazioni di assemblaggio. Ciò facilita le possibilità di integrazione del robot all'interno dell'impianto produttivo in quanto non va ad intaccare la continuità del sistema di movimentazione; ne deriva tuttavia l'impossibilità di aggirare degli ostacoli presenti nel piano di lavoro, qualora questi siano compresi tra la pinza di manipolazione ed il montante della struttura.

*La struttura a montante presenta una minore rigidità rispetto a quella a portale.*

Infatti gli assi di scorrimento lineare sono supportati in un singolo punto, mentre nei robot a portale le guide prismatiche per il movimento nel piano sono sostenute ad entrambi gli estremi. Per questo motivo il loro volume di lavoro è quasi sempre modesto ed il loro utilizzo limitato ad operazioni di assemblaggio leggero. Particolare cura dovrà essere posta nella realizzazione dell'asse Z (il terzo) in quanto sul suo supporto potranno agire momenti notevoli, qualora si vadano a manipolare carichi elevati con notevole sbarraccio (la distanza tra quest'ultimo ed il piano degli assi X ed Y).

Trattandosi comunque ancora di una struttura cartesiana sarà possibile raggiungere la stessa accuratezza di posizionamento ottenibile con quella a portale, ma a prezzo di un irrigidimento della struttura che significa un aumento di peso e quindi l'impossibilità di raggiungere prestazioni dinamiche elevate.

### 1.5.2. Robot antropomorfo - RRR

*I bracci antropomorfi sono realizzati con l'utilizzo esclusivo di giunti rotoïdali.*

Questa scelta permette di semplificare le lavorazioni meccaniche che verranno eseguite soltanto su superfici di rivoluzione. Muovendosi dalla base verso l'estremità della struttura si incontrano i tre movimenti principali così organizzati (fig. 18):

- rotazione attorno ad un asse verticale ( $\theta_1$ );
- rotazione attorno ad un asse orizzontale ( $\theta_2$ );
- rotazione attorno ad un asse orizzontale ( $\theta_3$ ).

Questi robot sono detti antropomorfi (in quanto riproducono abbastanza fedelmente le possibilità di movimento di un braccio umano) o a giunti rotoïdali verticali (in quanto il secondo e il terzo grado di libertà, detti rispettivamente spalla e gomito, muovono il braccio del robot all'interno di un piano verticale)

*Il volume di lavoro può essere considerato, in prima approssimazione, come una porzione di sfera.*

La sua configurazione reale è in realtà complessa essendo molto influenzata dalle effettive possibilità di movimento dei giunti (fig. 19).

*La struttura articolata è molto diffusa in quanto compatta e versatile.*

Infatti i robot articolati, a parità di dimensioni, riescono a coprire un più ampio volume di lavoro rispetto alle altre strutture. La versatilità è giustificata sia dalla capacità di raggiungere uno stesso punto del campo di lavoro con diverse configurazioni della struttura sia da quella di poter manipolare facilmen-

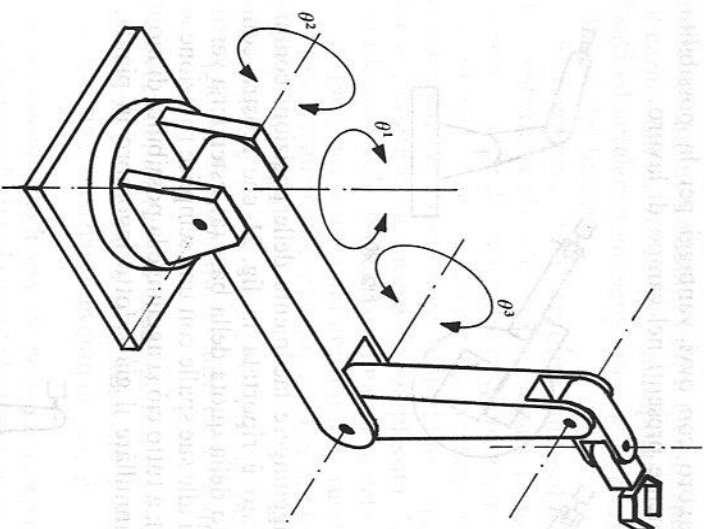


Fig. 18

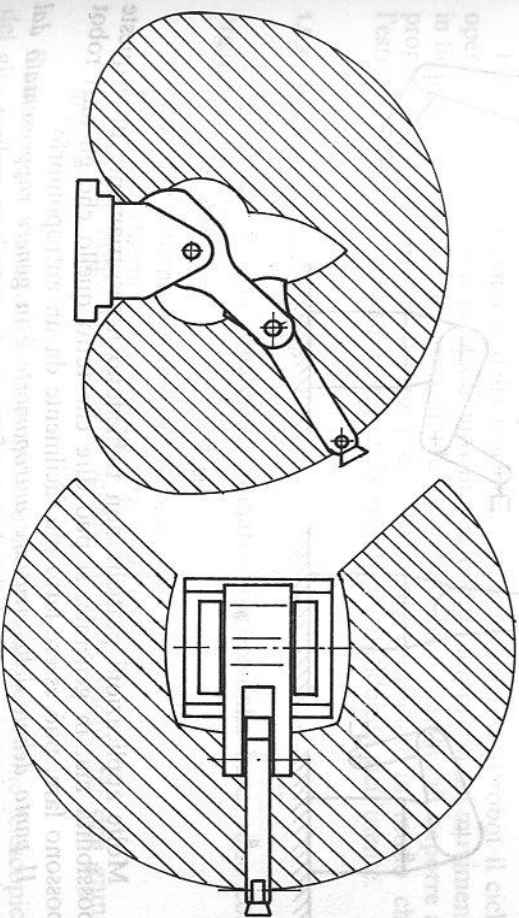


Fig. 19

te dei pezzi che si trovano sotto, sopra o dietro il basamento. La fig. 20 mostra le quattro diverse possibilità che questi robot hanno per raggiungere i punti del

loro volume di lavoro con ovvi vantaggi per la possibilità di evitare degli ostacoli eventualmente presenti nel campo di lavoro.

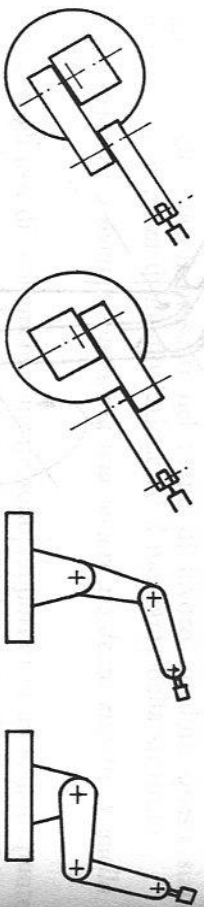


Fig. 20

L'abilità di raggiungere facilmente delle posizioni comunque collocate rispetto al basamento è riportata in fig. 21 che mostra come il robot possa scendere al di sotto della quota della base (a), estendersi verso l'alto (b) e infine prelevare dei pezzi alle sue spalle con una semplice rotazione attorno al secondo grado di libertà (c); a tutto ciò si aggiunge la possibilità di montarlo a soffitto (d) che permette di annullare il già ridotto ingombro in pianta.

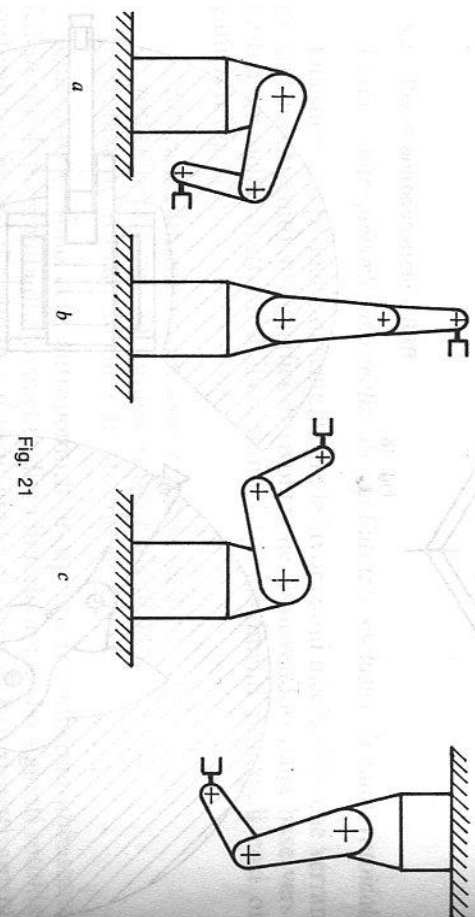


Fig. 21

Molte applicazioni pratiche non richiedono necessariamente tutte queste possibilità ma, in generale, si può dire che tutto quello che gli altri robot possono fare, può essere fatto più facilmente da un antropomorfo.

*Il punto debole delle strutture antropomorfe è in genere rappresentato dal costo, superiore a quello delle altre configurazioni, cartesiane escluse.*

La motivazione va ricercata in una serie di problemi che l'utilizzo di questa struttura comporta. Innanzitutto *la struttura è totalmente a sbalzo e quindi va accuratamente progettata per ridurre al minimo pesi e flessioni.* Il peso, soprattutto se concentrato verso l'estremità del braccio, può rappresentare un reale problema in alcune configurazioni particolari, come quella in cui il robot è completamente esteso in orizzontale. Infatti in tale posizione sia il momento

flettente che le inerzie assumono i massimi valori. Questo spiega perché, spesso, l'indicazione del carico che il robot può manipolare e le sue prestazioni cinematiche (velocità ed accelerazioni) vengono date in riferimento ad una ben definita configurazione del braccio.

Per ridurre i pesi gravanti sulla struttura una soluzione generalmente adottata da tutti i costruttori è quella di posizionare i motori sulla base del robot, immediatamente a valle del primo giunto di rotazione. Questa soluzione ha il vantaggio di alleggerire notevolmente la struttura, ma necessita di un sistema di trasmissione che porti il moto dai motori fino ai giunti utilizzatori; la trasmissione, oltre a causare un aumento di complessità del sistema, porterà spesso ad una degradazione delle prestazioni dinamiche del robot. Tale penalizzazione dinamica è spiegabile con la diminuzione di rigidità del sistema di trasmissione del moto conseguente all'introduzione dei suddetti cinematicismi tra il motore ed il giunto utilizzatore.

Allo scopo di contenere le flessioni, funzioni sia del carico che della configurazione, si irrigidisce la struttura, avendo cura di appesantirla il meno possibile.

Inoltre *i giochi meccanici dovranno essere ridotti il più possibile* in quanto il volume di lavoro coperto è tale che la struttura viene sollecitata in direzioni opposte con il risultato di evidenziarne eventuali giochi.

*Il controllo del movimento degli assi si presenta complesso se si desidera garantire che le traiettorie reali riproducano fedelmente quelle impostate teoricamente.*

Infatti il programmatore della macchina, quando descrive al robot il ciclo operativo inteso come sequenza di movimenti, lo farà sempre con dei movimenti in linea retta. Compito del controllo del robot sarà quindi quello di imporre ai propri giunti la corretta sequenza di movimenti coordinati in modo che l'estremità della sua struttura realizzi la traiettoria desiderata dell'utente.

### 1.5.3. Robot sferici (polar) - RRP

I tre gradi di libertà principali, ordinati a partire dalla base, sono così organizzati (fig. 22):

- rotazione attorno ad un asse verticale ( $\omega$ );
- rotazione attorno ad un asse orizzontale ( $\phi$ );
- traslazione lungo la direzione definita dalla posizione dei due giunti angolari ( $r$ );

Il movimento traslatorio è in pratica realizzato dall'estensione telescopica del giunto lineare e viene detto sfilo.

La struttura viene definita sferica in quanto il volume di lavoro è un settore di sfera (fig. 23). I due giunti rotatori descrivono infatti due archi perpendicolari fra loro mentre quello lineare determina il raggio della superficie sferica da essi descritta, variabile tra un minimo (sfilo contratto) e un massimo (sfilo esteso). Se l'intersezione dei suoi due assi rotatori coincide con l'origine del sistema di riferimento, si nota come i primi due assi rotatori servano ad individuare la

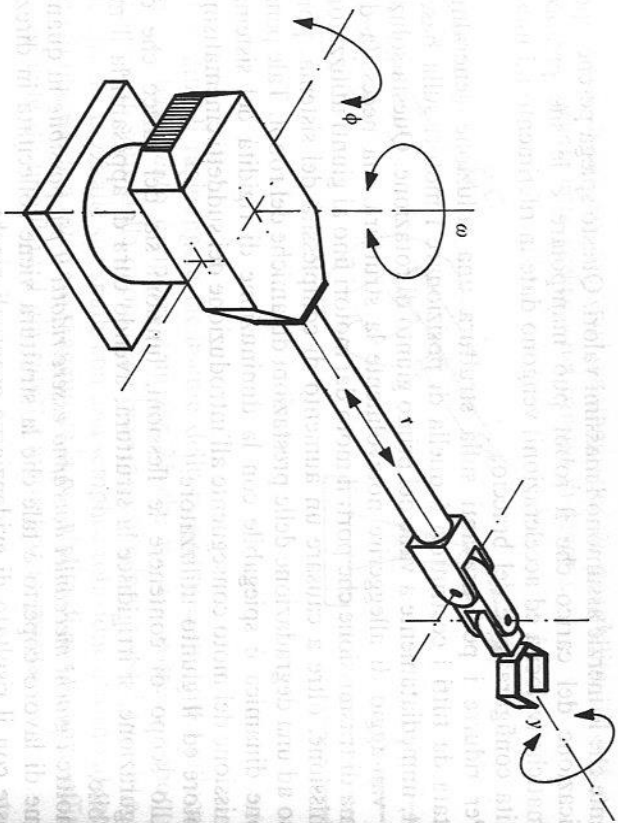


Fig. 22

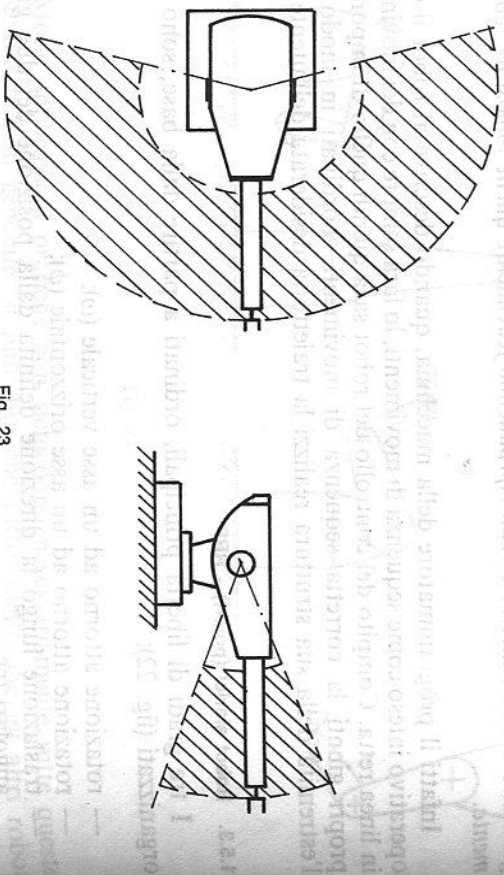


Fig. 23

direzione del punto obiettivo, mentre il terzo permette di raggiungerlo effettivamente.

*I robot sferici hanno il vantaggio di poter essere facilmente introdotti nei processi produttivi.*

Infatti il grosso della struttura, a cui compete l'orientamento del robot, può

essere collocato in una posizione abbastanza lontana dal punto in cui esso deve operare, che viene raggiunto utilizzando lo sfilo.

*La struttura si presenta semplice e di realizzazione economica se non si desidera un'accuratezza di posizionamento elevata.*

La presenza dello sfilo non comporta costi aggiuntivi particolarmente rilevanti qualora si accettino tolleranze di lavorazione non eccessivamente ristrette.

I robot sferici, pur mantenendo tuttora una certa diffusione, soprattutto tra quelli utilizzati in applicazioni pesanti, hanno avuto la loro massima fortuna agli inizi della robotica industriale. I primi robot industriali, prodotti negli anni sessanta dalla americana Unimation, vennero infatti costruiti con questa struttura. Il declino si spiega col fatto che *la struttura sferica si presta molto bene all'utilizzo di attuatori idraulici che oggi vengono sempre più soppiantati dall'utilizzo di azionamenti elettrici.*

*L'utilizzo di robot sferici è limitato quasi esclusivamente ad applicazioni gravose come la saldatura a punti o la manipolazione pesante in cui non è richiesta una accuratezza di posizionamento elevata.*

#### 1.5.4. Robot cilindrico - RPP

I tre gradi di libertà principali, ordinati a partire dalla base, sono così organizzati (fig. 24):

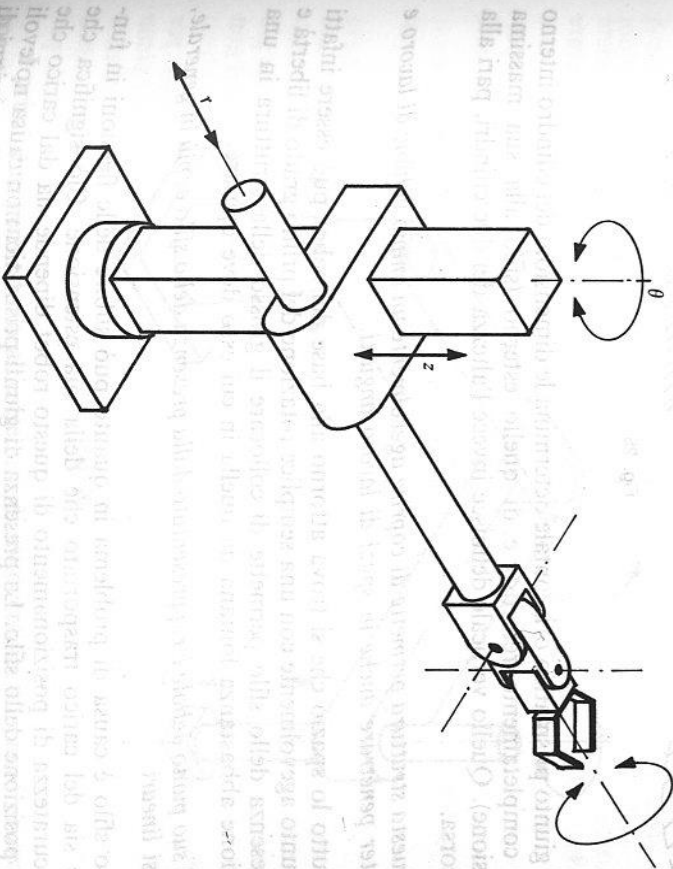


Fig. 24

- rotazione attorno ad un asse verticale ( $\theta$ );
- traslazione lungo l'asse di rotazione del giunto precedente ( $z$ );
- traslazione nella direzione definita dalla rotazione del primo giunto ottenuta con uno sfilo ( $r$ ).

Questa struttura viene definita cilindrica in quanto il volume di lavoro è facilmente individuabile come quello racchiuso tra due cilindri l'uno interno all'altro (fig. 25).

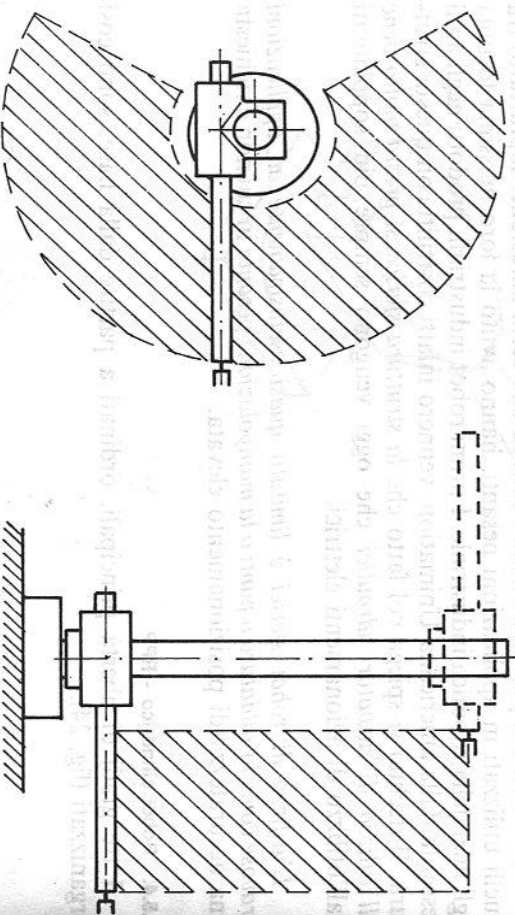


Fig. 25

Il giunto prismatico orizzontale determina le dimensioni del cilindro interno (sfilo completamente retrato) e di quello esterno (sfilo alla sua massima estensione). Quello verticale definisce invece l'altezza dei due cilindri, pari alla sua corsa.

*Questa struttura permette di coprire agevolmente un ampio volume di lavoro e di poter penetrare anche in spazi di lavoro angusti.*

Tutto lo spazio che si trova attorno alla base del robot può essere infatti raggiunto agevolmente con una semplice rotazione del primo grado di libertà e la presenza dello sfilo permette di collocare il grosso della struttura in una posizione abbastanza lontana da quella in cui esso deve operare.

*Il suo punto debole è rappresentato dalla presenza dello sfilo e, più in generale, di assi lineari.*

Lo sfilo è causa di problema in quanto può subire delle flessioni in funzione sia del carico trasportato che della sua estensione. Ciò significa che la accuratezza di posizionamento di questo robot dipende sia dal carico che dalla posizione dello sfilo. La presenza di giunti prismatici non causa notevoli costi aggiuntivi poiché questo robot viene utilizzato in genere in operazioni di

manipolazione che non richiedono una elevata accuratezza di posizionamento. I robot cilindrici trovano la loro applicazione ideale nella movimentazione di parti o nell'assemblaggio di più macchine operatrici.

Infatti entrambe le applicazioni richiedono che il robot copra un ampio volume di lavoro ma si accontentano anche di precisioni modeste. Per ottimizzare lo sfruttamento dello spazio di lavoro solitamente i pezzi da manipolare (o le macchine da asserire) vengono disposte a corona attorno al robot. La possibilità di eseguire movimenti verticali utilizzando un solo giunto ha permesso l'utilizzo di questi robot anche in operazioni di assemblaggio. Tuttavia in questo ambito sono stati praticamente soppiantati dai robot di tipo SCARA, più rapidi ed economici.

La struttura cilindrica raggiunse, al pari di quella sferica, la massima diffusione agli inizi della robotica industriale. Questo fatto è spiegabile se si pensa che i primi robot utilizzavano prevalentemente degli azionamenti idraulici e che questa struttura si presenta particolarmente adatta per il loro utilizzo.

#### 1.5.5. SCARA - RRP

I tre gradi di libertà principali, ordinati a partire dalla base, sono così disposti (fig. 26);

- rotazione attorno ad un asse verticale ( $\theta_1$ );
- rotazione attorno ad un asse verticale ( $\theta_2$ );
- traslazione in direzione verticale ( $z$ ).

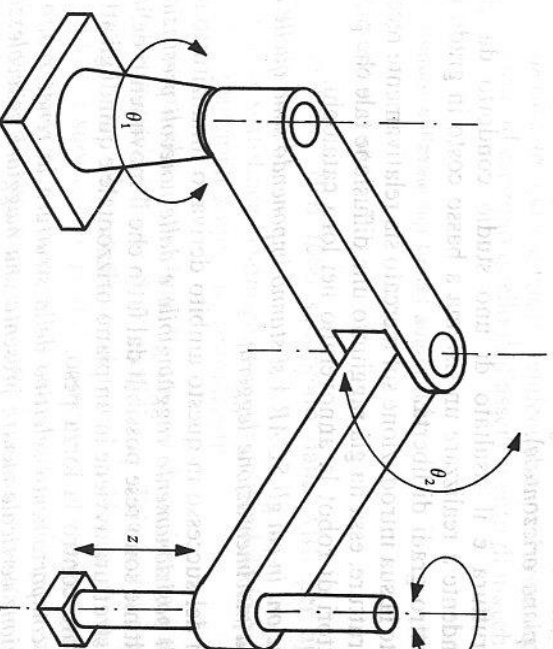


Fig. 26

I primi due permettono all'estremità di muoversi in un piano orizzontale, mentre quello traslatorio rende possibile anche gli spostamenti verticali.

Il volume di lavoro è descrivibile in prima approssimazione come una porzione di cilindro e risulta simile a quello dei robot cilindrici nei casi in cui il loro primo grado di libertà non permette di compiere una rotazione completa (fig. 27).

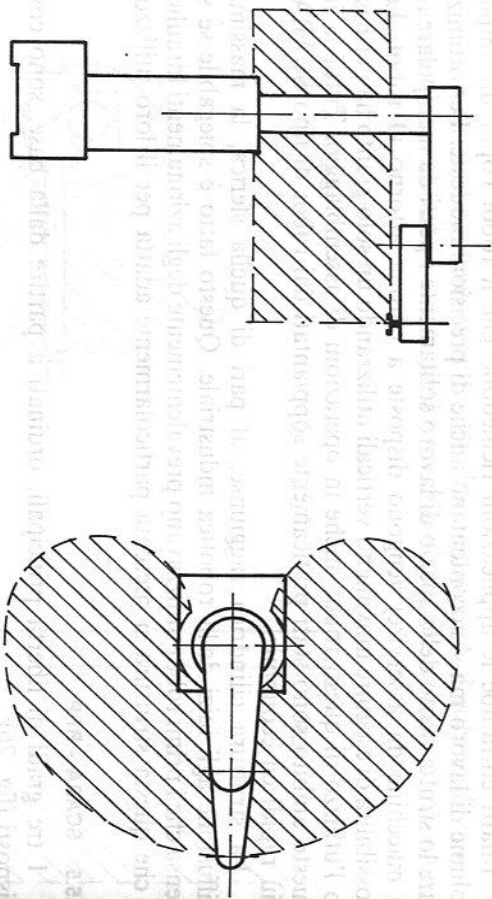


Fig. 27

Gli SCARA vengono comunemente definiti anche come robot a braccio girevole o a giunti rotoidali orizzontali (perché il 2° e il 3° grado di libertà muovono il braccio in un piano orizzontale).

Questa struttura è il risultato di uno studio condotto da più società giapponesi tendente a realizzare un sistema a basso costo in grado di operare con tre o quattro gradi di libertà.

Nonostante la sua introduzione sul mercato sia relativamente recente rispetto alle altre strutture, essa ha già raggiunto una diffusione tale che praticamente tutti i costruttori di robot la annoverano nei loro cataloghi.

Le applicazioni in cui gli SCARA si stanno imponendo sono quelle dell'assemblaggio e della movimentazione leggera.

Le ragioni del successo in questo ambito derivano innanzitutto dall'elevata accuratezza di posizionamento raggiungibile e dalle notevoli prestazioni dinamiche. Queste ultime sono rese possibili dal fatto che il movimento della parte più pesante della struttura avviene in un piano orizzontale e quindi gli attuatori non devono lavorare contro la forza peso.

Inoltre il comportamento selettivo della struttura la rende molto rigida per sforzi in direzione verticale mentre presenta una maggiore cedevolezza nel piano orizzontale. Infatti la sigla SCARA deriva dalle iniziali di Selective Compliance Assembly Robot Arm (Braccio robotizzato per assemblaggio con cedevolezza differenziata). La necessità di questo comportamento del robot è molto utile per eseguire in modo affidabile molte operazioni di assemblaggio.

Notevole è poi la possibilità di effettuare operazioni di inserzione verticale

utilizzando il solo movimento dell'asse Z. Va sottolineato che, essendo il giunto di traslazione verticale l'ultimo della struttura, il peso della parte in movimento per effettuare un'inserzione sarà modesto. Questo al contrario delle strutture cilindriche, dove ogni movimento verticale comporta lo spostamento di tutta la struttura.

Significativa anche la compattezza della struttura in rapporto al volume di lavoro ricoperto. Si tratta in ogni caso di prestazioni nettamente inferiori a quelle permesse dai robot articolati in quanto gli SCARA non possono afferrare pezzi che si trovino sulla verticale del loro basamento ed hanno difficoltà a manipolare pezzi situati ad altezza uguale od inferiore a quella del basamento. In questi casi infatti l'asse lineare Z dovrebbe avere una corsa molto elevata che ne pregiudicherebbe la rigidità andando a penalizzare l'accuratezza di posizionamento del sistema.

Da rilevare infine la possibilità di realizzare dei robot semplici ed economici. Infatti la maggioranza degli SCARA viene costruita con soli quattro gradi di libertà ed utilizzata per semplici operazioni di assemblaggio che non richiedono al robot una completa capacità di orientazione dei pezzi manipolati. In quei casi in cui risultano indispensabili tutti i sei gradi di libertà, il costo dello SCARA (equipaggiato con un polso che permetta l'orientazione completa dei pezzi) diventa comparabile con quello degli altri robot e, nella maggior parte dei casi, diviene più conveniente orientarsi verso una struttura di tipo articolato per la maggiore flessibilità operativa. Gli studi sulla tipologia delle operazioni di assemblaggio indicano tuttavia che oltre l'80% di esse può essere eseguita utilizzando uno SCARA a quattro gradi di libertà.

Il maggior limite degli SCARA è la loro struttura che ne limita pesantemente le possibilità di operare in spazi angusti, rendendone problematico l'impiego in molti ambiti, come ad esempio quello dell'asservimento di macchine operatrici.

#### 1.5.6. Altre strutture utilizzate nei bracci automatici

##### ROBOT A PENDOLO - RRP

Si tratta del robot IRB 1000 sviluppato dalla ABB per applicazioni di assemblaggio (fig. 28a).

Il suo nome ne sottolinea la somiglianza con un pendolo in quanto i suoi tre gradi di libertà principali sono così organizzati:

— due rotazioni che permettono al braccio di realizzare i movimenti nel piano orizzontale tramite delle oscillazioni. Tale scelta è stata la logica conseguenza di voler realizzare un robot ad elevate prestazioni dinamiche. Infatti i suoi attuatori, dal momento che il robot pende dall'alto verso il basso, si troveranno a vincere una forza peso molto ridotta. D'altra parte, dal momento che tutte le masse sono state concentrate in prossimità dei due assi di rotazione, anche le inerzie risulteranno molto ridotte;

— lo sfilo dell'elemento alla cui estremità è stato ricavato il polso. In pratica il movimento che realizza può essere assimilato ad una traslazione verticale.

Il volume di lavoro è, come nel caso dei robot sferici, una corona sferica, come mostrato in fig. 28b.

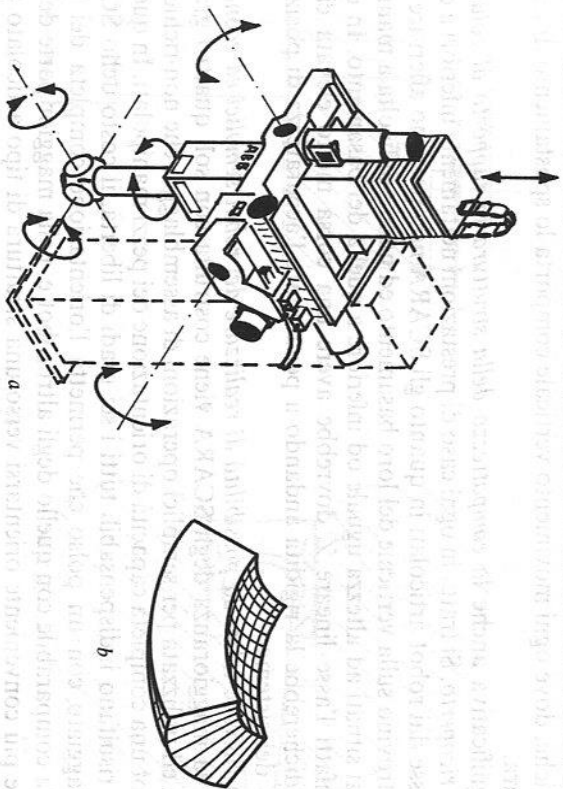


Fig. 28

Il Pendolo è un robot che nasce a sei gradi di libertà e viene sempre impiegato in configurazione completa. Per questo il Pendolo si presta all'automazione di operazioni complesse; in ogni caso, la sua maggior destrezza si traduce in una semplificazione della realizzazione della stazione di lavoro, ripagando il suo maggior costo iniziale.

#### SPINE ROBOT

Si tratta di un robot realizzato da una ditta svedese che presenta una struttura molto particolare (fig. 29)

Essa è infatti costituita da due giunti ognuno dei quali ricorda vagamente una colonna vertebrale. Infatti entrambi i giunti sono realizzati con una sequenza di dischi convessi, tenuti premuti fra loro da quattro cavi messi in tensione da altrettanti cilindri idraulici. Il precarico della struttura si rende necessario per aumentarne la rigidità e per diminuirne i giochi.

Il movimento viene realizzato agendo sui quattro tiranti che vanno comandati sempre a coppie, intendendo per coppia, due fili diagonalmente opposti. L'azionamento viene affidato a dei cilindri idraulici che provvedono a mettere in tensione o a rilasciare i tiranti in modo che, grazie alla possibilità che ogni singolo disco ha di ruotare rispetto agli altri, l'estremità della struttura del robot possa raggiungere la desiderata posizione (fig. 12 cap. 8). I due giunti così realizzati portano al robot quattro gradi di libertà; infatti ciascuno di essi permette di ruotarlo attorno a due assi ortogonali tra loro. Nel polso sono

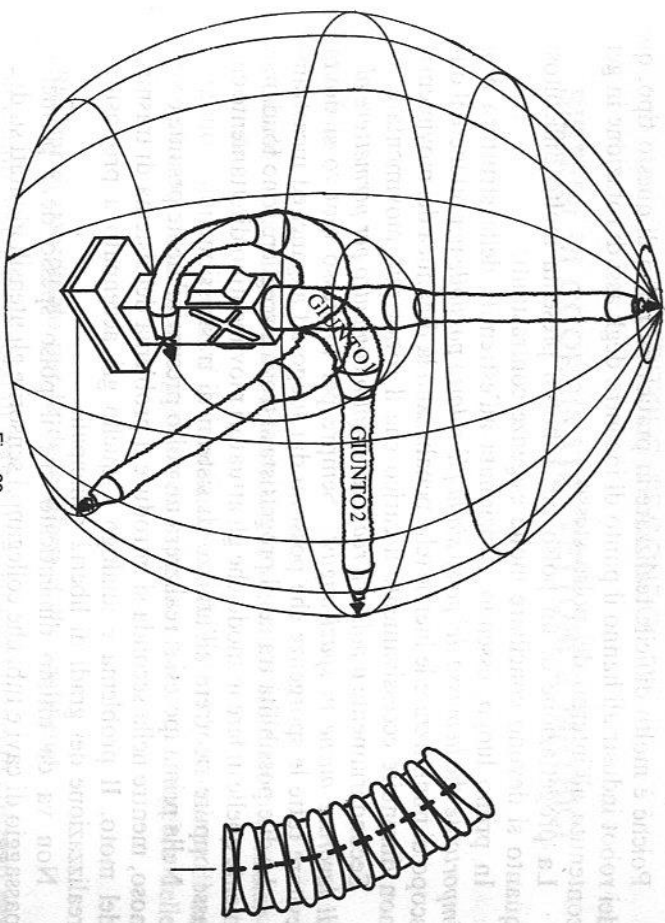


Fig. 29

concentrati i tre secondari, per un totale di sette. Il vantaggio dell'utilizzo di questa struttura è la sua ineguagliabile flessibilità. Tuttavia la presenza dei numerosi contatti superficiali tra i singoli dischi causa una diminuzione sia della rigidità della struttura che dell'accuratezza di posizionamento.

#### 1.6. Configurazioni dei giunti secondari

*Il polso è costituito da un insieme di non più di tre giunti rotoidali realizzati allo scopo di permettere l'orientazione della flangia di estremità del robot.*

Per poter orientare gli oggetti manipolati in modo arbitrario è necessario che il polso permetta di ruotarli attorno a tre assi perpendicolari tra loro (fig. 30). Le diverse modalità con cui è possibile esprimere l'orientazione di un oggetto, fornendo una terna di angoli, saranno trattate in dettaglio nel par. 2.2.

Sarebbe molto interessante che i tre assi, attorno a cui avvengono le rotazioni, si incontrino in un ben determinato punto del pezzo manipolato, così che l'operazione di orientamento non vada a modificare la sua posizione nello spazio di lavoro. Si pensi, come esempio, ad un robot utilizzato in un'applicazione di incollaggio, il cui polso sia realizzato in modo tale che i tre assi di rotazione si incontrino esattamente sopra l'ugello di distribuzione del collante. Ciò significa che l'ugello può essere comunque orientato, ad esempio per mantenerlo perpendicolare alla superficie da incollare, senza che questo vari la sua posizione nello spazio che risulterebbe governata soltanto dai giunti principali.

Poiché è molto difficile realizzare in pratica un polso di questo tipo, quelli dei robot industriali hanno il punto di incontro degli assi di rotazione in genere contenuto all'interno del polso stesso.

La progettazione di un polso per robot si presenta molto difficoltosa in quanto si devono conciliare molte esigenze contrastanti.

In primo luogo, essendo posizionata all'estremità della struttura è molto importante che la massa del polso sia la più ridotta possibile per ottenere il duplice scopo di minimizzare le inerzie (che penalizzano la dinamica dei movimenti) e di non diminuire eccessivamente il carico che il robot può movimentare.

Secondariamente il polso va realizzato molto compatto per permettere al robot di lavorare anche in spazi angusti. Sempre per lo stesso motivo si dovranno evitare tutte le sporgenze che possono dar luogo ad agganci ed incastramenti. Le due possibilità tra cui il progettista si trova a scegliere sono fondamentalmente quelle di fare in modo che gli attuatori movimentino direttamente ciascuna asse oppure ricorrere all'utilizzo di sistemi di trasmissione.

Nella prima ipotesi si realizzerà un polso presumibilmente pesante e voluminoso, mentre nella seconda si introduce il problema del sistema di trasmissione del moto. Il problema è analogo a quello già accennato a proposito della realizzazione dei gradi di libertà principali.

Non va da ultimo dimenticato che il polso spesso deve permettere il passaggio di cavi e tubi che collegano i sensori e gli utensili montati su di esso al resto della struttura.

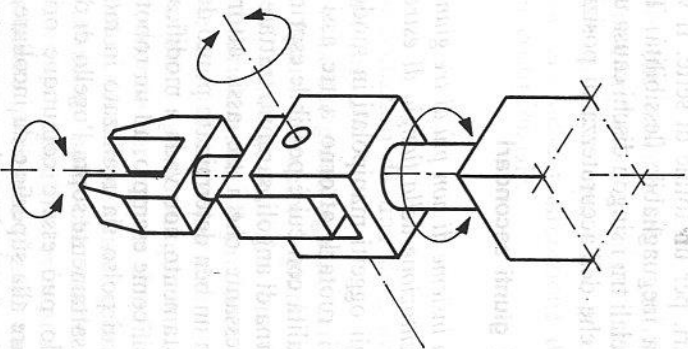


Fig. 30

## CAPITOLO SECONDO

### SISTEMI DI COORDINATE, VETTORI E MATRICI

#### Introduzione

Il capitolo richiama concetti e definizioni che verranno utilizzati intensamente nel seguito.

Vengono sviluppati i sistemi di coordinate per descrivere la posizione di un punto e l'orientamento di un oggetto nello spazio, i vettori e l'algebra delle matrici.

#### 2.1. Sistemi di coordinate per la descrizione della posizione

Il paragrafo descrive i sistemi di coordinate più comunemente utilizzati per individuare la posizione di un punto nello spazio associandogli una terna di numeri reali.

##### 2.1.1. Coordinate cartesiane

Un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio si definisce fissando un punto  $O$  e conducendo per esso tre rette  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  che siano a due a due perpendicolari tra loro (fig. 1); bisogna inoltre fissare una unità di misura ( $u$ ).

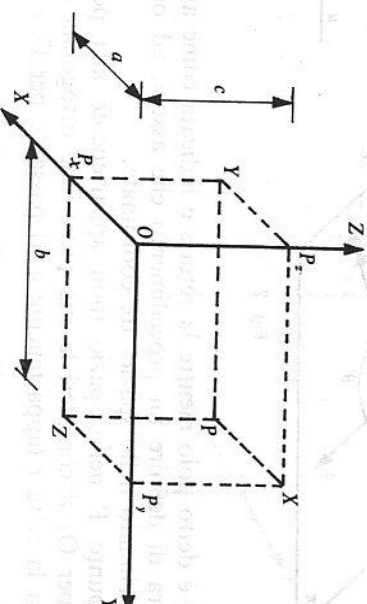


Fig. 1

Il punto  $O$  è detto origine, mentre le rette  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  vengono indicate come asse  $X$ , asse  $Y$  e asse  $Z$  e, complessivamente, come assi cartesiani o coordinati. Si

definiscono infine piani coordinati quelli individuati da ogni coppia di assi cartesiani:  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$ . Si tratta ora di definire un procedimento che associ, ad ogni punto  $P$  comunque posizionato nello spazio, tre coordinate.

Dato un punto  $P$  si considerino tre piani passanti per esso e paralleli a quelli coordinati. Si indichino quindi con  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ , i punti in cui tali piani tagliano gli assi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e si considerino tre numeri reali  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , che esprimono le misure dei segmenti orientati  $OP_x$ ,  $OP_y$ ,  $OP_z$  (in riferimento ad  $u$ ).

I tre numeri detti rispettivamente ascissa, ordinata e quota, sono le coordinate cartesiane di  $P$ .

Le coordinate del punto esprimono la sua distanza dai piani coordinati: l'ascissa da  $YZ$ , l'ordinata da  $XZ$  e la quota da  $XY$ .

Si immagini ad esempio di proiettare il punto  $P$  sul piano  $YZ$ ; la sua ascissa sarà data da  $XP$  che esprime proprio la distanza dal piano  $YZ$ . Il valore della distanza andrà preso positivo se  $P$  si trova nel semipiano definito dal piano  $YZ$  e dal semiasse  $X$  positivo, negativo in caso contrario.

Per l'ordinata e l'ascissa valgono analoghe considerazioni.

### 2.1.2. Coordinate cilindriche

Un riferimento cilindrico nello spazio si definisce fissando un piano orientato  $\pi$  (cioè un piano di cui sia definita la parte superiore e quella inferiore) e, su di esso, un punto  $O$  e una retta orientata  $s$  (fig. 2); bisogna inoltre fissare una unità di misura ( $u$ ).

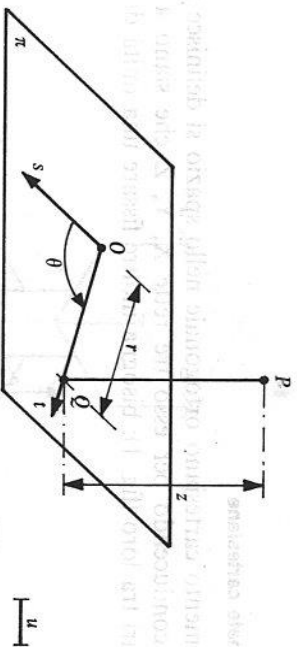


Fig. 2

Il punto  $O$  è detto polo mentre la retta  $s$  è indicata come asse polare.

Si tratta ora di definire un procedimento che associ, ad ogni punto  $P$  comunque posizionato nello spazio, tre coordinate.

Dato un punto  $P$  nello spazio (non appartenente alla perpendicolare a  $\pi$  passante per  $O$ ) si consideri la sua proiezione ortogonale  $Q$  sul piano  $\pi$  e si definisca la retta  $t$  (appartenente a  $\pi$ ) passante per  $O$  e  $Q$ , orientata da  $O$  verso  $Q$ .

Il punto  $Q$  può essere individuato tramite due numeri reali detti coordinate polari: il raggio vettore  $r$  (cioè la distanza di  $Q$  da  $O$ ) e l'anomalia  $\theta$  (l'angolo compreso tra la retta  $s$  e  $OQ$ , positivo in verso antiorario).

La coordinata che esprime la quota di  $P$  ( $Z$ ) sarà la lunghezza del segmento  $PQ$ , positiva se  $P$  si trova sopra il piano  $\pi$  e negativa nell'altro caso.

I tre numeri  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ , sono le coordinate cilindriche del punto  $P$ . Quando  $P$  si trova sulla perpendicolare per  $O$  a  $\pi$ , la sua proiezione ortogonale  $Q$  coincide con  $O$  e quindi avrà raggio vettore nullo e anomalia indeterminata.

Definendo un riferimento cartesiano come raffigurato in fig. 3, le formule che permettono di passare dalle coordinate cilindriche a quelle cartesiane sono:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

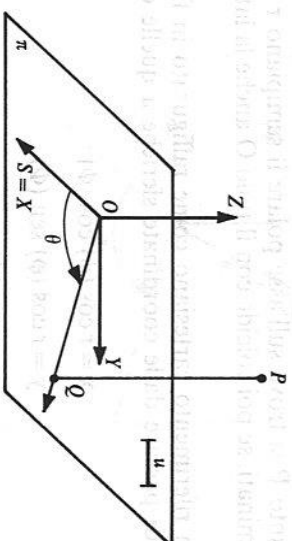


Fig. 3

### 2.1.3. Coordinate sferiche

Un riferimento sferico nello spazio si definisce fissando un punto  $O$ , una retta orientata  $s$  passante per esso ed un semipiano  $\pi$  pure passante per  $s$  (fig. 4); bisogna inoltre definire una unità di misura ( $u$ ). Il punto  $O$  è detto polo, la retta  $s$  polare ed il semipiano  $\pi$  semipiano polare.

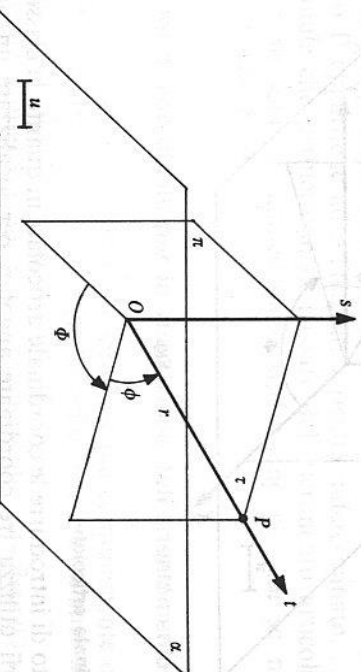


Fig. 4

Si tratta ora di definire un procedimento che associ, ad ogni punto  $P$  comunque posizionato nello spazio, tre coordinate.

Dato il punto  $P$  nello spazio (non appartenente all'asse polare), si consideri la retta  $t = OP$ , orientata da  $O$  verso  $P$  ed il semipiano  $\tau$  passante per  $P$  e  $s$ . Il punto  $P$  può essere individuato da tre numeri reali:

- il raggio vettore  $r$ , cioè la distanza di  $P$  da  $O$  espressa dalla misura del segmento  $OP$ ;
- la latitudine  $\phi$ , cioè l'angolo formato dal raggio vettore  $OP$  con il piano equatoriale orientato  $\alpha$  passante per  $O$  e perpendicolare all'asse polare  $s$ ; positiva dal piano  $\alpha$  verso  $OP$ ;
- la longitudine  $\phi$ , cioè l'angolo formato dal semipiano  $\tau$  con il semipiano polare, positivo in verso antiorario.

I tre numeri  $r, \phi, \phi$  sono le coordinate sferiche del punto  $P$ .

Quando il punto  $P$  si trova sull'asse polare il semipiano  $\tau$  e la longitudine risultano indeterminati; se poi coincide con il polo  $O$  anche la latitudine risulterà indeterminata

Definendo un riferimento cartesiano come raffigurato in fig. 5, le formule che permettono di passare dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane sono:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) \cos(\phi) \\ y &= r \cos(\phi) \sin(\phi) \\ z &= r \sin(\phi) \end{aligned}$$

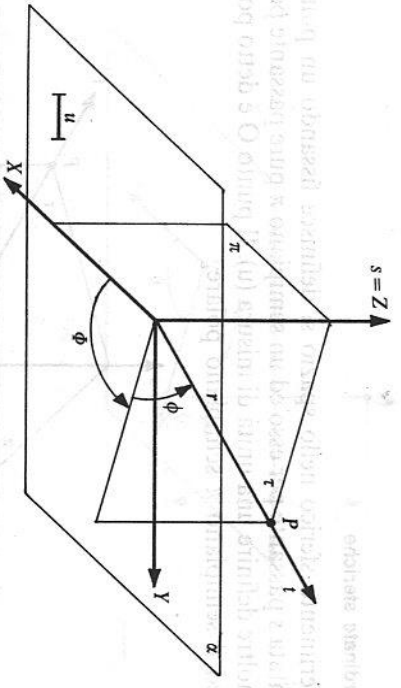


Fig. 5

**2.1.4. Coordinate articolate**

Si è scelto di introdurre le coordinate articolate in quanto la classe dei robot antropomorfi utilizza tre coordinate angolari per localizzare un punto nello spazio. Rigorosamente parlando non si tratta di un vero e proprio sistema di coordinate perché la mancanza di coordinate lineari non permette di descrivere tutti i punti dello spazio. Infatti, utilizzando esclusivamente coordinate angolari, è possibile individuare la posizione di un punto solo se esso rimane all'interno di un certo volume le cui dimensioni sono determinate dalla lunghezza dei

segmenti della struttura, mentre la forma dipende dalla disposizione dei giunti (cfr. cap. 1, fig. 19).

Un riferimento articolato nello spazio si definisce fissando un punto  $O$ , una retta orientata  $s$  passante per esso ed un semipiano  $\pi$  passante per  $s$  (fig. 6); bisogna inoltre definire una unità di misura e le lunghezze  $l_1$  e  $l_2$  di due segmenti (detti braccio ed avambraccio).

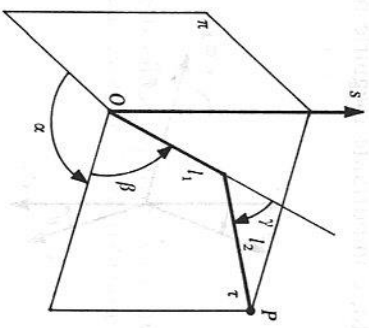


Fig. 6

Si tratta ora di definire un procedimento per associare ad ogni punto  $P$ , comunque posizionato nello spazio, tre coordinate.

Dato un punto  $P$  nello spazio (non appartenente alla retta  $s$ ) si individua il semipiano  $\tau$  passante per  $P$  e  $s$ .

La prima coordinata sarà l'angolo  $\alpha$  che individua tale piano, a partire del piano  $\pi$ , positivo in verso antiorario.

Le due rimanenti saranno i due angoli che permettono di individuare la posizione relativa del braccio ( $\beta$ ) e dell'avambraccio ( $\gamma$ ), positivi in verso antiorario (in fig. 6,  $\beta$  è positivo e  $\gamma$  è negativo).

Quando  $P$  appartiene ad  $s$  l'angolo  $\alpha$  risulta indeterminato.

Le formule che permettono di passare dal riferimento articolato ad uno cartesiano non sono di immediata comprensione per cui se ne rinvia la trattazione al par. 5.5.3.

**2.2. Sistemi di coordinate per la descrizione dell'orientamento**

Il paragrafo descrive i sistemi di coordinate più comunemente utilizzati per individuare l'orientamento di un oggetto nello spazio mediante una terna di numeri reali che individuano altrettante rotazioni.

Allo scopo si considereranno due terne cartesiane, una fissa ( $O-XYZ$ ) e una mobile ( $O'-x'y'z'$ ) inizialmente coincidente con la prima.

**2.2.1. Angoli di Eulero**

Gli angoli di Eulero realizzano la più generica orientazione utilizzando tre rotazioni successive riferite agli assi correnti. Sull'ordine con cui eseguire le

rotazioni non c'è accordo generale per cui il lettore potrà imbattersi in definizioni diverse da quella riportata:

- rotazione di  $\phi$  attorno all'asse Z (fig. 7a);
- rotazione di  $\theta$  attorno all'asse  $y'$  (fig. 7b);
- rotazione di  $\phi$  attorno all'asse  $z''$  (fig. 7c).

Va sottolineato che, trattandosi di una sequenza di rotazioni, al fine di ottenere il risultato voluto, è importante eseguirle nell'ordine corretto.

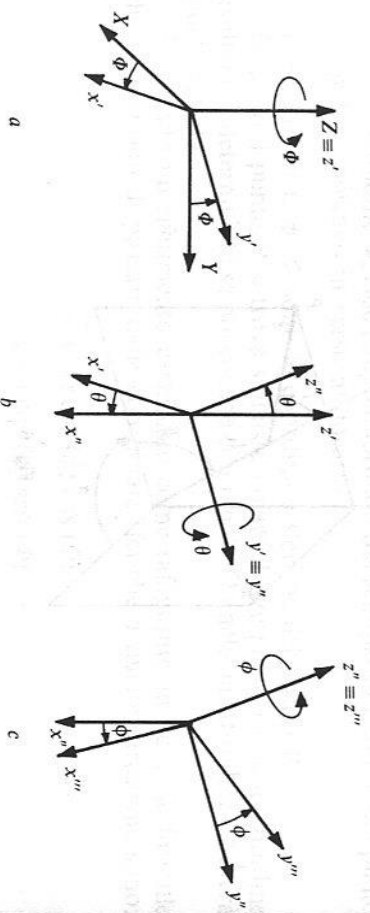


Fig. 7

## 2.2.2. Angoli RPY

Gli angoli RPY descrivono la più generica orientazione utilizzando tre rotazioni successive riferite agli assi correnti. Immaginando di avere una imbarcazione che navighi nella direzione dell'asse  $z$ , gli angoli RPY sono facilmente interpretabili (fig. 8):

- R - roll - rollio - rotazione  $\phi$  attorno all'asse Z (fig. 9a)
- P - pitch - beccheggio - rotazione  $\theta$  attorno all'asse  $y'$  (fig. 9b)
- Y - yaw - imbardata - rotazione  $\phi$  attorno all'asse  $x''$  (fig. 9c).

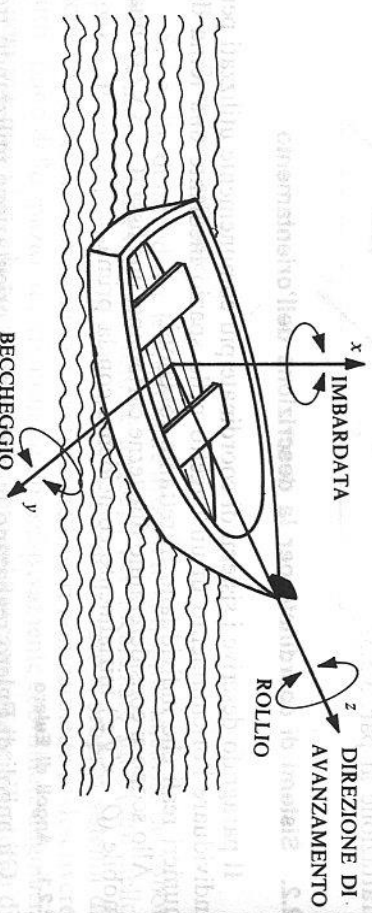


Fig. 8

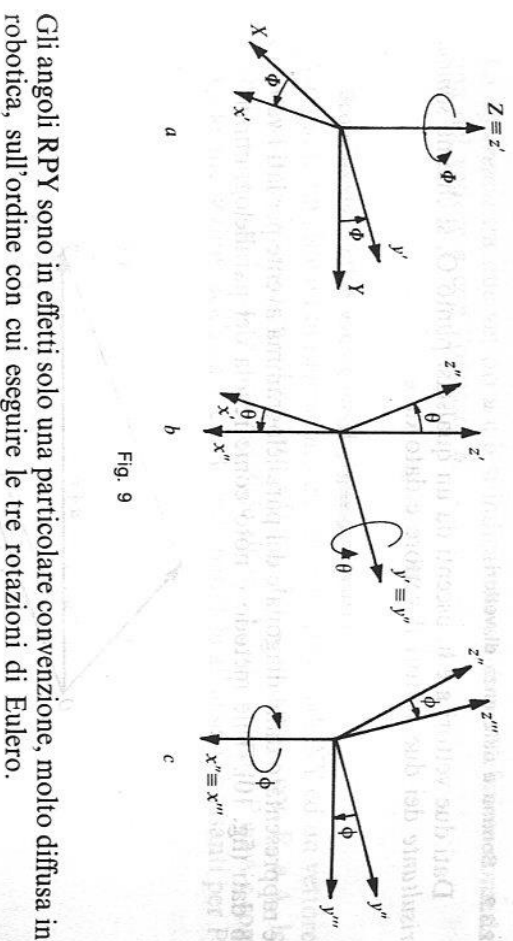


Fig. 9

Gli angoli RPY sono in effetti solo una particolare convenzione, molto diffusa in robotica, sull'ordine con cui eseguire le tre rotazioni di Eulero.

## 2.3 Vettori

Le grandezze fisiche si possono dividere in due categorie: quelle caratterizzate unicamente da una misura, dette grandezze scalari, e quelle caratterizzate non solo dalla loro misura ma anche da una direzione e da un verso, dette vettoriali.

Tempo, massa, lunghezza sono esempi di grandezze scalari o *scalari* e sono rappresentate da un numero reale associato ad una unità di misura.

Forza, velocità ed accelerazione sono esempi di grandezze vettoriali o *vettori*.

### 2.3.1 Definizioni

Per caratterizzare un vettore occorre conoscere:

- la direzione
- il verso
- l'intensità (modulo).

Dato il generico vettore  $\mathbf{a}$ , il suo modulo è uno scalare positivo che si indica con  $|\mathbf{a}|$ . Quando il modulo è nullo il vettore si definisce nullo.

Un vettore si rappresenta graficamente come un segmento frecciato la cui direzione e il cui verso, individuato dalla freccia, corrispondono a quelli della grandezza vettoriale considerata e la cui lunghezza, riferita a quella unitaria, fornisce l'intensità o modulo della grandezza.

Nel seguito i vettori verranno indicati con una lettera minuscola in grassetto, salvo diverse specificazioni imposte dal contesto.

Un versore è un vettore di modulo unitario cioè  $|\mathbf{a}| = 1$ .

Due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono uguali se hanno la stessa intensità, la stessa direzione e lo stesso verso.

Due vettori sono opposti quando hanno ugual modulo, stessa direzione e verso opposto.

## 2.3.2. Somma e differenza di vettori

Dati due vettori  $a$  e  $b$ , uscenti da un qualsiasi punto  $O$ , si chiama *somma* o *risultante* dei due vettori il vettore  $c$  dato da

$$c = a + b$$

e rappresentato dalla diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori  $a$  e  $b$  dati (fig. 10). Tale metodo è noto come regola del parallelogramma.

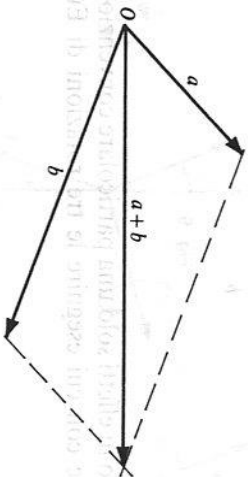


Fig. 10

In maniera analoga la somma di più vettori è data dal vettore che unisce  $O$  con l'estremo della poligonale che si ottiene tracciando, l'uno di seguito all'altro, a partire dal punto  $O$ , i vettori dati (fig. 11). Pertanto la somma di  $n$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , è il vettore  $w$  definito nel seguente modo:

$$w = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

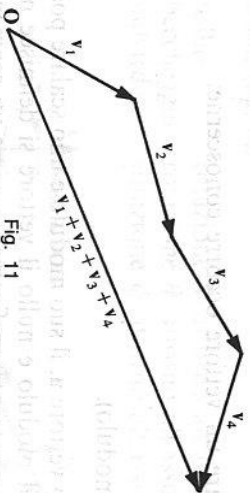


Fig. 11

Tale metodo è noto come regola della poligonale.

Dalla regola generale si deduce che la somma di due o più vettori aventi la stessa direzione è un vettore che ha per modulo la somma algebrica dei moduli e per direzione la stessa direzione.

L'addizione tra vettori gode delle seguenti proprietà:

- commutativa  $a + b = b + a$ ;
- associativa  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- esistenza dell'elemento neutro (vettore nullo).

La *differenza* tra due vettori  $a$  e  $b$  si indica con  $a - b$  e si definisce come la somma del vettore  $a$  con l'opposto  $b$ :

$$a - b = a + (-b)$$

## 2.3.3. Scomposizione di un vettore lungo gli assi cartesiani

Assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $XY$  ed un vettore  $u$  rappresentato dal segmento frecciato  $AP$  (fig. 12), si indichino con  $P_y$  e  $A_x$  le intersezioni dell'asse  $X$  con le rette parallele all'asse  $Y$ , passanti per  $P$  ed  $A$  e con  $P_x$  e  $A_y$ , le intersezioni dell'asse  $Y$  con le rette parallele all'asse  $X$ , passanti per  $P$  ed  $A$ .

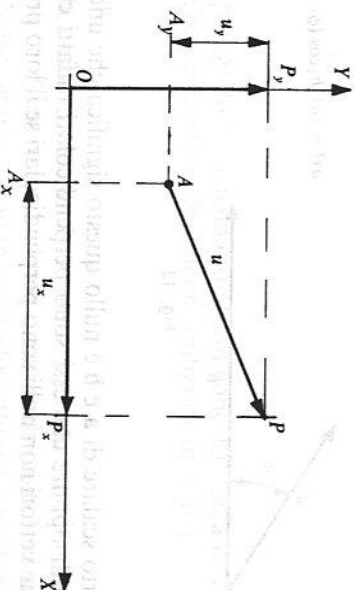


Fig. 12

Posto  $u_x = P_x - A_x$  e  $u_y = P_y - A_y$ , si ha che  $u = u_x + u_y$ ; il vettore  $u$  risulta quindi il vettore somma di due vettori  $u_x$  ed  $u_y$  aventi per direzione quella dell'asse  $X$  e  $Y$ .

I due vettori  $u_x$  ed  $u_y$  sono definiti i *componenti* del vettore  $u$  secondo gli assi  $X$  ed  $Y$  ed i loro moduli le *componenti*. Si noti che il componente di un vettore è a sua volta una grandezza vettoriale, mentre le componenti di un vettore sono grandezze scalari.

Le componenti di un vettore  $u$  non sono altro che le coordinate cartesiane del punto  $P$  se l'origine coincide con quella del riferimento.

## 2.3.4. Prodotto di un vettore per uno scalare

Il prodotto di un vettore  $a$  per uno scalare  $m$  è un vettore la cui direzione coincide con quella di  $a$ , il cui modulo è  $m$  volte quello di  $a$  e il cui verso concorda con  $a$  se  $m > 0$ , mentre è discorde se  $m < 0$ .

Il vettore  $-a$  (cioè il vettore  $a$  moltiplicato per lo scalare  $-1$ ) equivale a un vettore con lo stesso modulo e direzione di  $a$  ma verso opposto.

Per il prodotto di un vettore per uno scalare valgono le seguenti proprietà:

- associativa:  $m(na) = (mn)a$
- distributiva:  $(a + b)m = ma + mb$   
 $(m + n)a = ma + na$

dove  $m$  e  $n$  sono scalari ed  $a$  e  $b$  sono vettori.

Il rapporto di un vettore  $\mathbf{a}$  per un numero  $m$  è riconducibile al prodotto del vettore  $\mathbf{a}$  per il reciproco di  $m$ .

### 2.3.5. Il prodotto scalare

Dati due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  si definisce prodotto scalare (fig. 13) di  $\mathbf{a}$  per  $\mathbf{b}$  la grandezza scalare così definita:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \cos(\phi)$$

dove  $\phi$  è l'angolo compreso tra i due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  mentre  $|\mathbf{a}|$  e  $|\mathbf{b}|$  sono i moduli dei vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

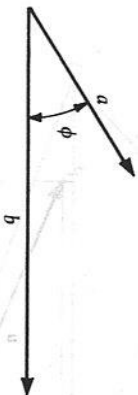


Fig. 13

$$a \times b = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\phi)$$

Se il prodotto scalare di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  è nullo questo significa che uno o entrambi i vettori sono nulli oppure che essi sono perpendicolari (infatti  $\cos(\pm 90^\circ) = 0$ ). Pertanto due vettori non nulli sono perpendicolari se il loro prodotto scalare è nullo.

Se i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  hanno la stessa direzione cioè  $\phi = 0$  allora  $\cos \phi = 1$  e il prodotto scalare coincide con il prodotto dei moduli dei due vettori.

### 2.3.6. Il prodotto vettore

Dati due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  si definisce prodotto vettore (fig. 14) il vettore:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

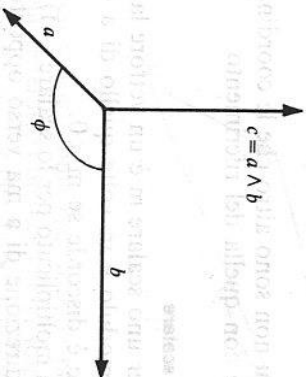


Fig. 14

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\phi)$$

ortogonale al piano contenente  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  il cui modulo è:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \sin(\phi)$$

dove  $\phi$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Il verso di  $\mathbf{c}$  è quello che si ottiene applicando la regola della mano destra. Se i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono paralleli  $\phi = 0$  o  $\phi = 180^\circ$  e quindi:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| * |\mathbf{b}| * \sin \phi = 0$$

Viceversa se il prodotto vettoriale è nullo questo significa che uno dei due vettori o entrambi sono nulli oppure sono paralleli.

Il prodotto vettoriale  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$  ha lo stesso modulo di  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  ma verso opposto. Pertanto, a differenza del prodotto scalare, il prodotto vettoriale non è commutativo.

## 2.4 Matrici

In questo paragrafo si richiamano alcuni concetti fondamentali sull'algebra delle matrici che verranno diffusamente utilizzati in seguito.

### 2.4.1. Definizioni

Una tabella costituita da  $M \cdot N$  numeri appartenenti all'insieme dei numeri Reali o Complessi disposti su  $m$  linee orizzontali (righe) ed  $n$  linee verticali (colonne) si definisce matrice  $A$  ad  $m$  righe ed  $n$  colonne o più brevemente di tipo  $(m, n)$  e si rappresenta nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Più sinteticamente la matrice può anche essere indicata con

$$A = [a_{jk}]$$

dove con  $a_{jk}$  si indicano gli  $m \cdot n$  elementi della matrice. In particolare l'indice  $j$  indica la riga di appartenenza mentre  $k$  la colonna.

Se  $m$  è diverso da  $n$  la matrice si dice *rettangolare*.

Se  $m$  è uguale ad  $n$  la matrice si dice quadrata ed il numero  $n$  di righe o colonne costituisce l'*ordine* della matrice.

Se  $m = 1$  la matrice è costituita da una sola riga, è del tipo  $(1, n)$  e viene detta matrice riga; se invece  $n = 1$  la matrice è costituita da una sola colonna, è del tipo  $(m, 1)$  e viene detta matrice colonna. Queste particolari matrici sono anche dette rispettivamente vettori riga e colonna.

La matrice i cui elementi sono tutti nulli, ad eccezione di quelli principali (quelli che si trovano nella diagonale principale, i cui indici sono uguali:  $j = k$ ) è

detta *matrice diagonale*. Se gli elementi principali sono tutti uguali all'unità la matrice diagonale è detta *matrice identica* o *matrice unita*.

La matrice i cui elementi sono tutti nulli si definisce *matrice nulla*.

Si definisce *matrice opposta* di una matrice A, la matrice i cui elementi sono gli opposti di quelli di A e si indica con  $-A$ .

Due matrici sono dello stesso tipo quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne; in tali matrici gli elementi di ugual posto si dicono *corrispondenti*.

La matrice che si ottiene da una matrice A scambiando le righe con le colonne si dice *matrice trasposta* di A e si indica con  $A^T$ .

In altre parole la trasposta della matrice  $A = [a_{jk}]$  di tipo (m, n) è una matrice di tipo (n, m) i cui elementi  $b_{jk}$  sono definiti dalla relazione :

$$b_{jk} = a_{ji}$$

Se A è quadrata di ordine n,  $A^T$  sarà pure quadrata di ordine n. In generale la matrice A e la sua trasposta sono diverse; se  $A = A^T$  la matrice si dice *simmetrica*; se invece  $A = -A^T$  la matrice si dice *emisimmetrica*.

#### 2.4.2. Somma di matrici

Date due matrici  $A = [a_{jk}]$  e  $B = [b_{jk}]$  dello stesso tipo si chiama somma di A e B la matrice dello stesso tipo che si ottiene sommando gli elementi corrispondenti nelle due matrici date:

$$A + B = [a_{jk} + b_{jk}]$$

Si verifica facilmente che l'addizione di matrici di tipo (m, n) è una operazione interna, associativa e commutativa, dotata di elemento neutro (matrice nulla) e di elemento opposto (matrice opposta).

La matrice opposta permette di definire la differenza di matrici. Date due matrici A e B dello stesso tipo, si definisce *differenza* tra A e B la somma della matrice A con l'opposta di B:

$$A - B = A + (-B)$$

#### 2.4.3. Prodotto di una matrice per un numero

Dati una matrice  $A = [a_{jk}]$  di tipo (m, n) ed un numero reale r si chiama prodotto della matrice A per il numero r (o del numero r per la matrice A), la matrice i cui elementi si ottengono moltiplicando tutti gli elementi di A per il numero r:

$$A * r = [a_{jk} * r] = r * A$$

#### 2.4.4. Prodotto di matrici

Date due matrici A ( $a_{jk}$ ) e B ( $b_{jk}$ ), rispettivamente di tipo (m, p) e (p, n), si chiama prodotto di A per B la matrice C di tipo (m, n) i cui elementi si

ottengono nel modo seguente: l'elemento che in C occupa la riga i-esima e la colonna k-esima è il prodotto della riga i-esima di A per la colonna k-esima di B:

$$\begin{aligned} A &= [a_{jk}] & (j=1 \dots m); & (k=1 \dots p) \\ B &= [b_{jk}] & (j=1 \dots p); & (k=1 \dots n) \end{aligned}$$

risulta:

$$A * B = C = [c_{jk}] \quad (j=1 \dots m); \quad (k=1 \dots n)$$

dove:

$$c_{jk} = a_{j1} * b_{1k} + a_{j2} * b_{2k} + \dots + a_{jp} * b_{pk} = \sum_{r=1}^p a_{jr} * b_{rk}$$

Tale prodotto è anche detto righe per colonne ed è chiaramente possibile solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Il prodotto di matrici gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \text{— associativa} & \quad (A * B) * C = A * (B * C) \\ \text{— distributiva} & \quad A * (B + C) = A * B + A * C \\ & \quad (B + C) * A = B * A + C * A \end{aligned}$$

Non vale invece la proprietà commutativa, pertanto in generale risulta  $A * B$  diverso da  $B * A$ .

#### 2.4.5. Determinante

Data una matrice quadrata A è possibile associare a questa un numero, detto suo *determinante*, e indicato con  $\det A$  oppure  $|A|$ .

Il determinante di una matrice di 1° ordine cioè con  $n = 1$  si definisce ponendo:

$$\det A = |A| = a_{1,1}$$

Il determinante di una matrice quadrata del 2° ordine cioè con  $n = 2$  è il numero

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{1,1} * a_{2,2} - a_{1,2} * a_{2,1}$$

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine n è necessario premettere le seguenti definizioni.

Si definisce *minore complementare*  $M_{jk}$  di un elemento  $a_{jk}$  di una matrice quadrata A di ordine n il determinante di ordine  $n - 1$  che si ottiene dalla A togliendo la riga e la colonna alle quali appartiene l'elemento  $a_{jk}$ .

Il *complemento algebrico* di un elemento  $a_{jk}$  è il minore complementare di  $a_{jk}$  moltiplicato per  $(-1)^{j+k}$  e si indica con  $A_{jk} = (-1)^{j+k} * M_{jk}$ .

Il determinante di una matrice quadrata di ordine  $n > 1$  si definisce

sommando i prodotti degli elementi di una qualunque linea (riga o colonna) della matrice per i rispettivi complementi algebrici.

In particolare il determinante di una matrice diagonale è dato dal prodotto degli elementi della diagonale.

#### 2.4.6. Proprietà dei determinanti

Si può dimostrare che per i determinanti delle matrici quadrate di ordine  $n$ , qualunque sia il numero naturale  $n$ , valgono le seguenti proprietà:

- 1) Se tutti gli elementi di una linea (riga o colonna) di una matrice quadrata sono nulli il determinante della matrice è nullo.
- 2) Se in una matrice si scambiano tra loro due righe (o colonne) parallele il determinante cambia segno.
- 3) Se una matrice ha due linee parallele proporzionali (o in particolare uguali) il determinante è nullo.
- 4) Se in una matrice si scambiano ordinatamente le righe con le colonne il valore del determinante non cambia.
- 5) Due matrici quadrate tra loro trasposte hanno lo stesso determinante
- 6) Se si moltiplicano gli elementi di una linea di una matrice quadrata per un numero  $k$  il determinante della matrice risulta moltiplicato per  $k$ .

#### 2.4.7. Matrice inversa

Una matrice quadrata ammette la matrice inversa, e si dice *invertibile*, se il suo determinante è non nullo.

Se il determinante di una matrice è nullo la matrice si dice *singolare*, altrimenti è *non singolare* e invertibile.

La matrice inversa di una matrice quadrata  $A$  non singolare è la trasposta della matrice che ha per elementi i reciproci degli elementi della matrice  $A$ .

Il reciproco dell'elemento  $a_{jk}$  di una matrice quadrata non singolare di ordine  $n$  è il quoziente tra il complemento algebrico  $A_{jk}$  di  $a_{jk}$  e il determinante della matrice  $A$ .

In simboli, indicato con  $\alpha_{jk}$  il reciproco di  $a_{jk}$ , si ha:

$$\alpha_{jk} = \frac{A_{jk}}{\det A}$$

e la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Si osservi che i reciproci degli elementi della  $i$ -esima riga di  $A$  sono gli elementi della  $i$ -esima colonna di  $A^{-1}$ .

In modo equivalente la matrice inversa si può scrivere anche nel seguente modo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

dove  $A_{jk}$  è il complemento algebrico dell'elemento  $a_{jk}$  della matrice  $A$ .

Il prodotto di una matrice non singolare  $A$  per la sua inversa  $A^{-1}$  è uguale alla matrice identità.

#### 2.4.8. Rango di una matrice

Data una matrice  $A$  di tipo  $(m, n)$  si fissino ad arbitrio un numero  $p$  di righe e di colonne della matrice, con  $p$  numero naturale tale che  $p \leq m$  e  $p \leq n$ ; il determinante della sottomatrice quadrata estratta da  $A$  costituita dagli elementi comuni alle  $p$  righe e  $p$  colonne di  $A$  si chiama *minore di ordine  $p$*  della matrice  $A$ . Se nella matrice  $A$  esiste almeno un elemento non nullo esistano sicuramente anche dei minori di  $A$  non nulli.

Si definisce *rango o caratteristica* di una matrice non nulla l'ordine massimo dei suoi minori non tutti nulli.

In altri termini:

- se dalla matrice  $A$  si può estrarre almeno un minore di ordine  $r$  diverso da 0;
- se tutti i minori di ordine maggiore di  $r$  che si possono estrarre dalla matrice sono nulli;

allora il numero naturale  $r$  è il rango della matrice.

Il calcolo del rango di una matrice risulta semplificato dall'applicazione del seguente teorema:

- Teorema di Kronecker: se la matrice  $A$  di tipo  $(m, n)$  o  $(n, n)$  possiede un minore non nullo di ordine  $r$  e se sono nulli tutti i minori di ordine  $r+1$  di  $A$  che si ottengono aggiungendo al minore non nullo una riga e una colonna precedenti la prima o seguenti l'ultima (o come si dice più brevemente, quelli che si ottengono «orlando» il minore considerato), allora il rango della matrice è  $r$ .

CAPITOLO TERZO

TRASFORMAZIONI DI SISTEMI DI RIFERIMENTO

Introduzione

I singoli elementi meccanici con cui vengono realizzate le strutture dei robot, gli utensili da essi utilizzati e i pezzi manipolati, o comunque presenti nel volume di lavoro, sono generalmente descrivibili come dei corpi rigidi che occupano una ben precisa porzione del campo di lavoro.

Il calcolatore di controllo, affinché il robot possa eseguire efficacemente un qualsiasi lavoro, deve conoscere:

- la disposizione degli oggetti nel volume di lavoro;
- le dimensioni dei segmenti della struttura;
- le possibilità di movimento permesse dai giunti.

La conoscenza dell'organizzazione dello spazio di lavoro è indispensabile per poter interagire con le parti in esso presenti mentre quella della struttura e dei giunti serve per determinare i movimenti da imporre agli attuatori per ottenere i desiderati spostamenti dell'organo terminale.

Il capitolo sviluppa dei metodi e degli strumenti propedeutici a quelli che si utilizzeranno in seguito per la descrizione geometrica e cinematica delle strutture dei robot.

Il primo paragrafo descrive la posizione e l'orientamento di un corpo rigido rispetto ad un riferimento base associandogli rigidamente una terna cartesiana. Tale metodo verrà utilizzato per descrivere la posizione e l'orientamento delle parti da manipolare, dei segmenti della struttura e dell'organo terminale del robot.

I giunti permettono la rotazione (giunto rotoidale) o la traslazione (giunto prismatico) tra la porzione di struttura che li segue e quella che li precede. Quindi, per calcolare la posizione e l'orientamento assunti nello spazio dagli oggetti manipolati bisognerà sviluppare degli strumenti matematici per descriverne le traslazioni, le rotazioni e i movimenti risultanti dalla loro composizione.

Al termine della trattazione si accennerà alle caratteristiche dei movimenti risultanti da una serie di rotazioni e di traslazioni.

3.1. Posizione ed orientamento di un corpo rigido

Si immagini di avere un corpo rigido e di volerne descrivere la posizione e l'orientamento rispetto ad un sistema di riferimento base XYZ, di origine O (fig. 1).

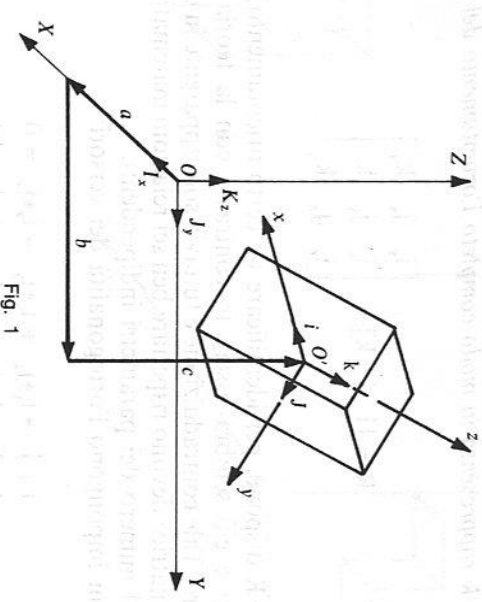


Fig. 1

Il primo passo è di associare rigidamente all'oggetto una terna cartesiana,  $O'-xyz$ .

La posizione occupata dal corpo, rispetto alla terna  $O-XYZ$ , può essere espressa dalle coordinate di  $O'$ , origine della terna cartesiana ad esso associata.

Tali tre coordinate sono le tre componenti del vettore  $OO'$ .

$$OO' = aI_x + bJ_y + cK_z$$

che d'ora in poi verrà rappresentato come un vettore colonna in cui si riporteranno nell'ordine l'ascissa, l'ordinata e la quota di  $O'$ .

$$OO' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

L'orientamento del corpo rigido può essere descritto tramite le direzioni degli assi  $x, y, z$ , della terna cartesiana ad esso associata.

Tali direzioni sono definite dai loro coseni direttori, cioè dalle componenti che i versori hanno rispetto agli assi coordinati del sistema di riferimento base  $O-XYZ$ .

Associando agli assi  $x, y, z$  i versori  $i, j, k$  l'orientamento del corpo rigido può essere descritto in forma sintetica tramite una matrice di ordine tre.

La matrice  $R$ , le cui colonne contengono i valori dei coseni direttori degli assi della terna  $O'-xyz$ , ovvero le proiezioni dei loro versori sugli assi  $X, Y, Z$ ,

nell'ordine  $i, j, k$  rappresenta in modo completo l'orientamento del corpo rigido.

$$R = [i \ j \ k] = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x \\ i_y & j_y & k_y \\ i_z & j_z & k_z \end{bmatrix}$$

La matrice  $R$  dispone, per identificare un certo orientamento, di ben nove valori numerici e ciò sembra essere in contrasto con la teoria che insegna bastarne solo tre. Tale contraddizione è tuttavia solo apparente in quanto i nove elementi della matrice devono rispettare ben sei relazioni matematiche riportando così a tre il numero dei parametri indipendenti.

Tre relazioni impongono l'ortogonalità dei vettori:

$$\begin{aligned} i \perp j &\rightarrow i_x j_y - i_y j_x = 0 \\ i \perp k &\rightarrow i_x k_z - i_z k_x = 0 \\ j \perp k &\rightarrow j_x k_z - j_z k_x = 0 \end{aligned}$$

e tre la loro lunghezza unitaria:

$$\begin{aligned} |i| &= 1 \rightarrow \sqrt{i_x^2 + i_y^2 + i_z^2} = 1 \\ |j| &= 1 \rightarrow \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = 1 \\ |k| &= 1 \rightarrow \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 1 \end{aligned}$$

La perpendicolarità dei vettori è imposta dall'annullarsi del prodotto scalare tra una qualunque coppia di essi, mentre le tre relazioni che impongono lunghezza unitaria derivano dall'applicazione del teorema di Pitagora per lo spazio.

**Esempio:**

Posizionare rispetto al riferimento base il corpo  $A$ , sapendo che la terna  $O' - xyz$  ad esso associata è descritta rispetto al riferimento base dal vettore  $OO'$  e dalla matrice  $R$  sotto riportati (fig. 2):

$$OO' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'origine  $O'$ , rispetto alla terna base, sarà traslata di una unità di misura lungo  $X$ , di cinque lungo  $Y$  e di 3 lungo  $Z$ . L'orientazione si determina con la matrice  $R$  che contiene le informazioni relative al verso e alla direzione dei tre assi  $x, y, z$ . La prima colonna dice che il vettore  $i_x$  è diretto come  $J_y$ , cioè che l'asse  $x$  è diretto come l'asse  $Y$ . La seconda che l'asse  $y$  è diretto come  $X$  ma con verso opposto e la terza che gli assi  $Z$  e  $z$  hanno direzioni coincidenti.

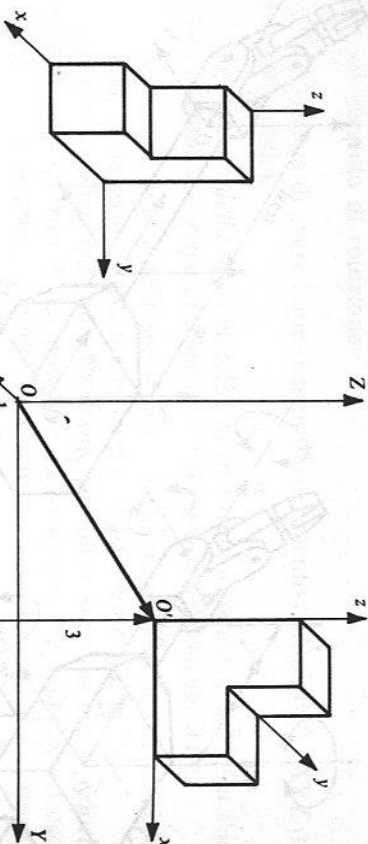


Fig. 2

### 3.2. Movimento di traslazione

Si supponga di avere i due sistemi di riferimento cartesiani  $O - XYZ$  (base) e  $O' - xyz$  (mobile).

*Il movimento della terna mobile è di tipo traslatorio quando non modifica l'orientamento dei suoi assi rispetto a quelli del sistema di riferimento base.*

Più in generale si definisce di traslazione un movimento in cui tutti i punti subiscono lo stesso spostamento.

In riferimento al paragrafo precedente ciò significa che un movimento traslatorio può modificare la posizione di un oggetto nello spazio (le coordinate del punto  $O'$ ) ma non il suo orientamento (gli elementi della matrice  $R$ ).

I giunti prismatici (fig. 3) permettono la traslazione tra gli elementi della struttura a monte (solidali con il sistema di riferimento base:  $O_m - X_m Y_m Z_m$ ) e quelli a valle del giunto (solidali con la terna mobile:  $O_y - x_y y_y z_y$ ).

Una traslazione sarà completamente individuata da un vettore che esprima lo spostamento dell'origine  $O'$  della terna mobile (fig. 4):  $a$  è la traslazione lungo l'asse  $X$ ,  $b$  quella lungo  $Y$  e  $c$  quella lungo  $Z$ .

$$O'O'_{\text{traslato}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

**Esempio:**

Calcolare la nuova posizione occupata dal corpo  $A$ , descritto nel precedente esempio, dopo aver subito la seguente traslazione:

$$\text{trasl} = 2I_x + 4J_y + 9K_z$$

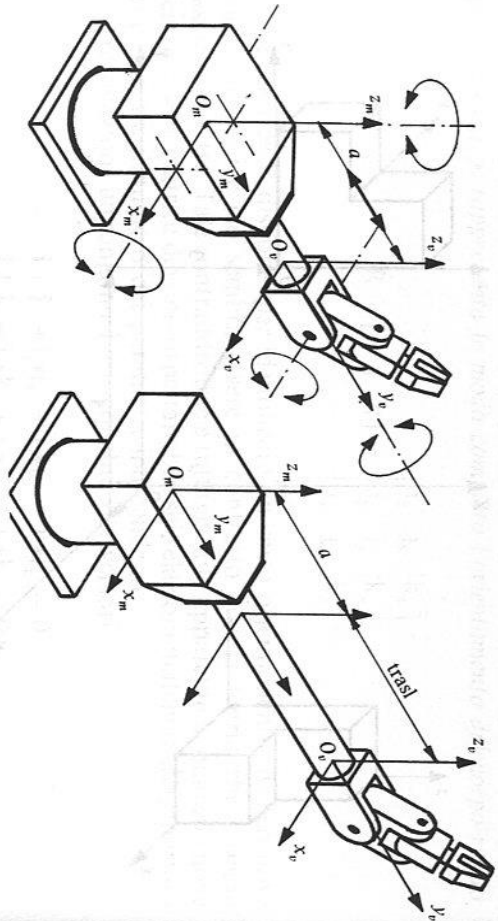


Fig. 3

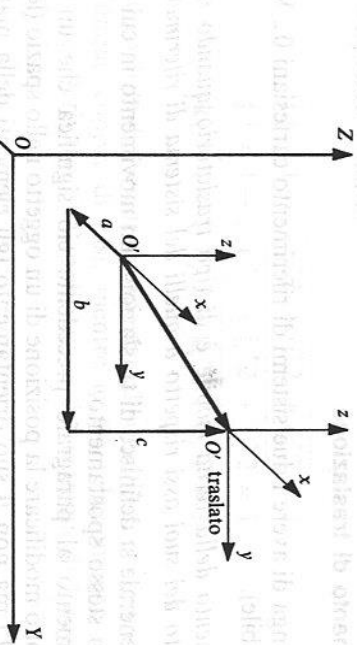


Fig. 4

Le coordinate del punto  $O'$  dopo aver subito la traslazione si trovano sommando il vettore  $OO'$  e quello di traslazione.

$$OO' + \text{trasl} = OO'_{\text{traslato}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Movimento di rotazione

Si supponga di avere i due sistemi di riferimento cartesiani  $O-XYZ$  (base) e  $O'-xyz$  (mobile).

*Il movimento della terna mobile è di tipo rotatorio quando modifica l'orientamento dei suoi assi rispetto a quelli del sistema di riferimento base.*

Più precisamente si definisce di rotazione un movimento in cui tutti i punti di una retta, detta asse di rotazione, hanno spostamento nullo.

Questo significa che una rotazione modifica sicuramente i valori degli elementi della matrice  $R$ . La posizione nello spazio, espressa dal vettore  $OO'$ , rimane invece invariata quando l'asse attorno a cui avviene la rotazione passa per  $O'$  (fig. 5a) mentre cambia in tutti gli altri casi (fig. 5b).

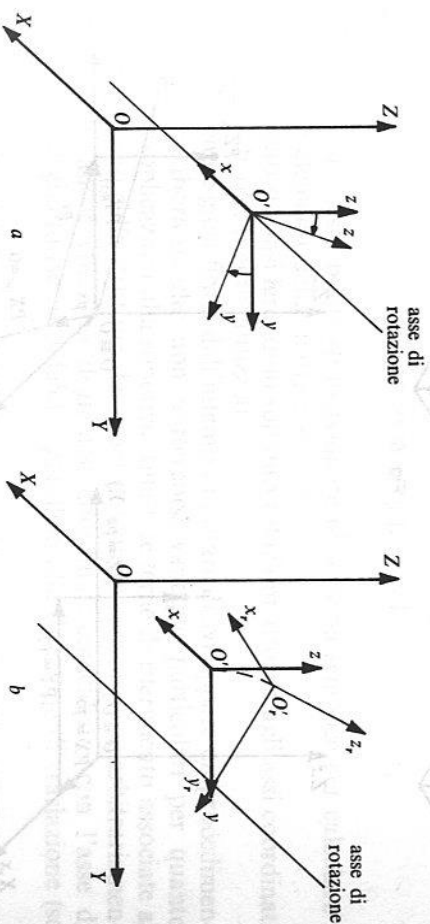


Fig. 5

I giunti rotoïdali (fig. 6) permettono la rotazione tra gli elementi della struttura a valle del giunto (solidali con il sistema di riferimento base:  $O_m-X_mY_mZ_m$ ) e quelli a valle del giunto (solidali con la terna mobile:  $O_y-x_yz_y$ ).

Si considerino le due terne di fig. 7a, inizialmente perfettamente sovrapposte, e un punto  $P$ , solidale con la seconda terna, di coordinate:

$$OP = \begin{bmatrix} PX \\ PY \\ PZ \end{bmatrix} \quad O'P = \begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \end{bmatrix}$$

Inizialmente i valori numerici delle coordinate del punto  $P$  assumeranno gli stessi valori numerici dal momento che le due terne sono coincidenti.

Imponendo alla terna  $O'-xyz$  una rotazione, i valori delle coordinate che individuano il punto  $P$  rispetto alla terna mobile rimarranno gli stessi mentre quelle che lo individuano rispetto a quella fissa assumeranno i nuovi valori  $PX_{\text{rot}}$ ,  $PY_{\text{rot}}$ ,  $PZ_{\text{rot}}$ . La fig. 7b mostra ad esempio una rotazione attorno all'asse  $Z$ .

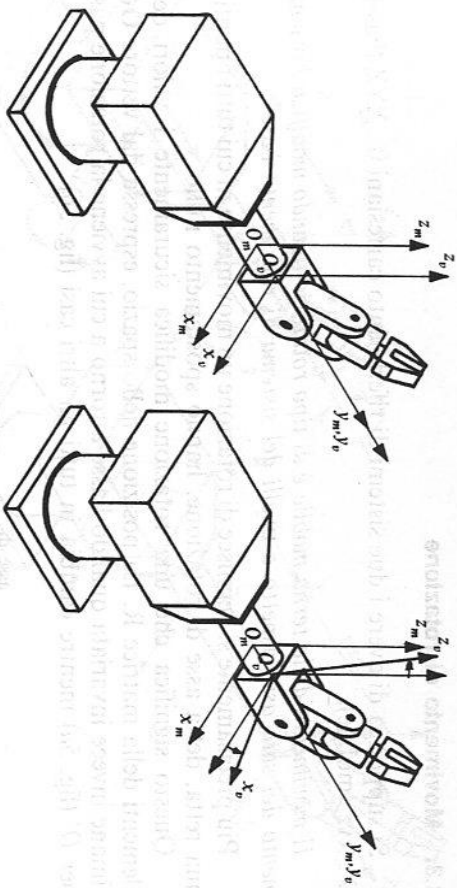


Fig. 6

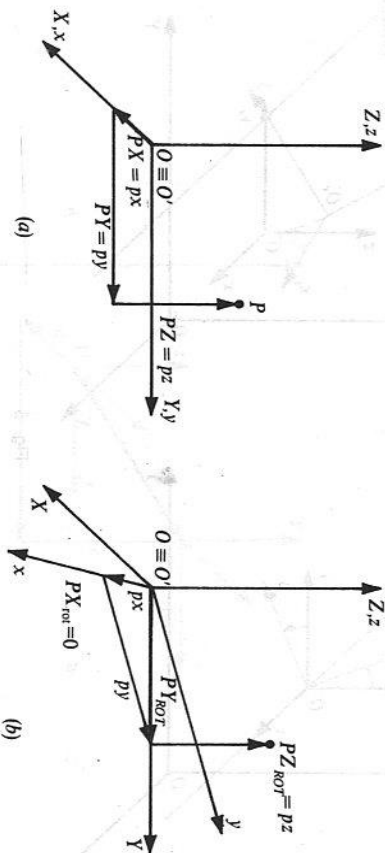


Fig. 7

Si tratta ora di individuare una trasformazione che permetta di calcolare le coordinate  $PX_{rot}$ ,  $PY_{rot}$ ,  $PZ_{rot}$  di P nel riferimento  $O'XYZ$  conoscendo le coordinate locali  $(px, py, pz)$  e la rotazione subita dalla terna mobile.

L'idea guida è quella di determinare quella matrice R che esprima l'orientazione della terna ruotata ( $O'xyz$ ) rispetto a quella base ( $OXYZ$ ). I singoli elementi di questa matrice sono infatti le proiezioni dei versori dei tre assi della terna mobile sugli assi della terna base e, come tali, permettono di determinare semplicemente  $PX_{rot}$ ,  $PY_{rot}$ ,  $PZ_{rot}$ .

$$R = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x \\ i_y & j_y & k_y \\ i_z & j_z & k_z \end{bmatrix}$$

Si consideri ad esempio il calcolo di  $px$ .

Il valore di  $PX_{rot}$  esprime l'ascissa del punto P nel riferimento base. Tale

valore sarà il risultato della somma dei contributi dovuti alle tre coordinate locali  $(px, py, pz)$ . In particolare si avrà:

$$PX_{rot} = px i_x + py j_x + pz k_x$$

Infatti  $px$  è l'ascissa del punto P nel riferimento mobile e quindi la sua componente lungo l'asse X si otterrà moltiplicandola per la componente del versore  $i_x$  lungo tale asse.

Un discorso analogo può essere fatto per ricavare la componente lungo X delle ordinate  $(py)$  e della quota  $(pz)$ . Il procedimento per calcolare  $PY_{rot}$  e  $PZ_{rot}$  è del tutto equivalente:

$$\begin{aligned} PY_{rot} &= px i_y + py j_y + pz k_y \\ PZ_{rot} &= px i_z + py j_z + pz k_z \end{aligned}$$

Si tratta a questo punto di individuare un sistema semplice per calcolare i valori degli elementi della matrice R.

Nel seguito si considereranno soltanto rotazioni attorno agli assi coordinati dei sistemi di riferimento utilizzati.

Tale scelta è giustificata dall'intento di evitare di sviluppare un procedimento lungo e laborioso che non porterebbe vantaggi particolari per quanto riguarda le applicazioni alla robotica. Infatti le terna di riferimento associate ai singoli elementi della struttura dei robot possono essere disposte arbitrariamente e quindi anche con uno degli assi coordinati coincidente con l'asse di rotazione del giunto (se rotooidale) o parallelo alla direzione di traslazione (se prismatico).

Inoltre una rotazione attorno ad un generico asse può sempre essere ottenuta come un'opportuna sequenza di rotazioni attorno a quelli coordinati.

Si tratta ora di calcolare il valore dei singoli elementi della matrice R conoscendo i parametri della rotazione, cioè l'asse (per quanto detto, uno dei tre coordinati) e l'angolo.

Prima che avvenga la rotazione le due terne sono coincidenti e quindi la R sarà la matrice identità in quanto i versori di  $O'xyz$  coincidono con quelli di  $OXYZ$ :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si consideri ora, ad esempio, una rotazione attorno all'asse Z di un angolo  $\theta$  della terna  $O'xyz$  (fig. 7).

Il versore dell'asse z, coincidente con Z, non viene modificato dalla rotazione e quindi la terza colonna della matrice di rotazione non subirà modifiche.

Anche le componenti lungo Z dei due versori x ed y, entrambe nulle, rimarranno tali in quanto la rotazione avviene in un piano perpendicolare a tale asse.

Gli unici elementi della matrice interessati dalla rotazione considerata sono quindi le componenti dei vettori degli assi  $x$  e  $y$  lungo  $X$  ed  $Y$  che verranno così modificate (fig. 8):

$$\begin{aligned} \text{vettore } x : i_x \rightarrow \cos(\theta)_x & & \text{vettore } y : 0_x \rightarrow -\sin(\theta)_x \\ 0_y \rightarrow \sin(\theta)_y & & 1_y \rightarrow \cos(\theta)_y \end{aligned}$$

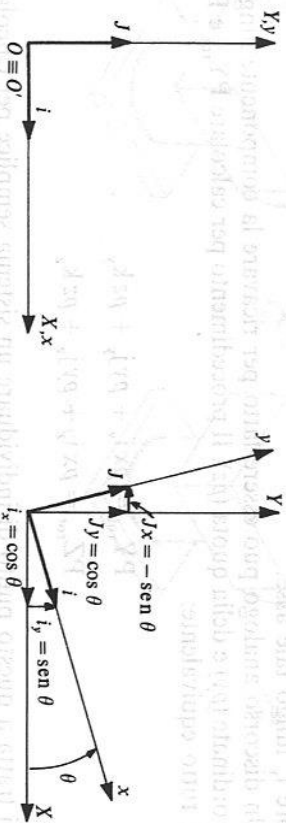


Fig. 8

È ora possibile scrivere la matrice  $R$  che esprime l'orientazione assunta dalla terna  $O' - xyz$  rispetto al riferimento a seguito della rotazione:

$$\text{rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di rotazione})$$

Con analogo procedimento si possono scrivere le matrici che esprimono le rotazioni attorno agli altri due assi coordinati:

$$\text{rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di rotazione})$$

$$\text{rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di rotazione})$$

**Esempio:**

Siano dati i due sistemi di riferimento  $O - XYZ$  (base) e  $O' - xyz$  (mobile), inizialmente coincidenti e il punto  $P$  solidale alla terna mobile (fig. 9):

$$P = 1i_x + 6j_y + 3k_z$$

Determinare le nuove coordinate di  $P$  a seguito di una rotazione della terna mobile di novanta gradi in verso antiorario attorno all'asse  $Z$ .

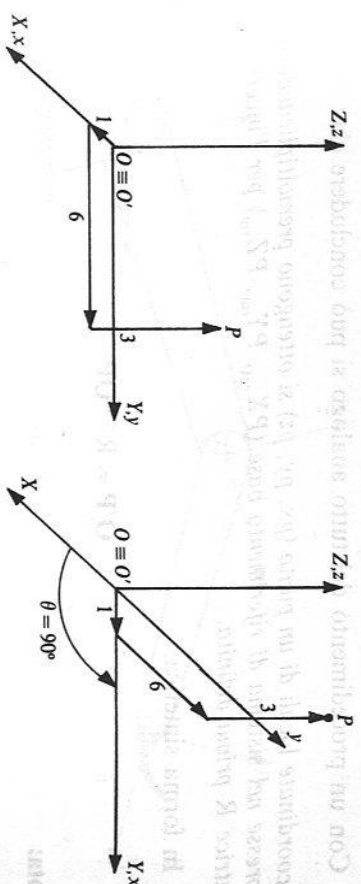


Fig. 9

Dapprima si calcola la matrice  $R$  in modo da avere nota la nuova orientazione di  $O' - xyz$  dopo la rotazione:

$$\text{rot}(z, 90) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Risulta ora facile il calcolo dei valori incogniti:

$$\begin{aligned} PX_{\text{rot}} &= px * i_x + py * j_x + pz * k_x = \\ &= 1 * 0 + 6 * -1 + 3 * 0 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PY_{\text{rot}} &= px * i_y + py * j_y + pz * k_y = \\ &= 1 * 1 + 6 * 0 + 3 * 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PZ_{\text{rot}} &= px * i_z + py * j_z + pz * k_z = \\ &= 1 * 0 + 6 * 0 + 3 * 1 = 3 \end{aligned}$$

Il calcolo matriciale permette di esprimere in forma molto compatta il calcolo delle nuove coordinate:

$$\begin{bmatrix} PX_{\text{rot}} \\ PY_{\text{rot}} \\ PZ_{\text{rot}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Riassumendo si può dire che:

Premoltiplicando le coordinate locali ( $px, py, pz$ ) di un punto per la matrice  $R$  che esprime l'orientazione della terna mobile ( $O' - xyz$ ) rispetto a quella base ( $O - XYZ$ ) si ottiene un vettore colonna i cui elementi sono le coordinate del punto stesso espresse nel sistema di riferimento base ( $PX_{\text{rot}}, PY_{\text{rot}}, PZ_{\text{rot}}$ ).

In forma sintetica:

$$OP = RO'P$$

Con un procedimento del tutto analogo si può concludere che:

le coordinate locali di un punto  $(p_x, p_y, p_z)$  si ottengono premoltiplicando quelle espresse nel sistema di riferimento base  $(P X_{\text{rot}}, P Y_{\text{rot}}, P Z_{\text{rot}})$  per l'inverso della matrice  $R$  prima definita.

In forma sintetica:

$$O'P = R^{-1}OP$$

Nota:

Come conseguenza della commutabilità del prodotto scalare la matrice  $R$  soddisfa la relazione:

$$R^T R = I$$

Le matrici per cui vale la relazione sopra riportata sono dette ortogonali e per esse vale l'eguaglianza:

$$R^{-1} = R^T$$

per cui nella relazione prima riportata si può sostituire all'inverso della matrice  $R$  la sua trasposta, più facilmente calcolabile:

$$O'P = R^T O P$$

#### 3.4. Movimenti composti

Per descrivere tutti i possibili spostamenti di un corpo rigido è necessario sviluppare degli strumenti che permettano di calcolare il movimento risultante da una sequenza arbitraria di movimenti elementari di rotazione o di traslazione.

Lo scopo è quello di determinare la posizione occupata dagli oggetti manipolati dal robot (o dall'utensile da esso utilizzato) note le posizioni dei suoi giunti, ciascuno dei quali permette una rotazione o una traslazione.

Per semplicità si immagini di avere un semplice robot a due gradi di libertà (fig. 10) con i due giunti rotoideali aventi gli assi di rotazione paralleli fra loro e normali al piano del foglio e di descrivere la posizione del punto  $P$  al variare della posizione dei due giunti. Si definisca un sistema di riferimento base  $(O_{-}XYZ)$  e altri due solidali con il primo  $(O_{-}x_1y_1z_1)$  e con il secondo  $(O_{-}x_2y_2z_2)$  elemento della struttura del robot. Il punto  $P$  di interesse potrebbe ad esempio identificare la posizione dell'ugello di fuoriuscita del collante. Si immagini che abbia, nel sistema di riferimento  $O_{-}x_2y_2z_2$  coordinate:

$$O_{-}P = a_i x_2 + b_j y_2 + c_k z_2$$

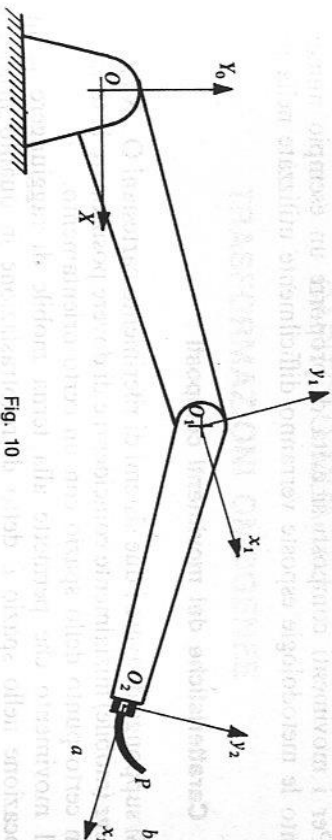


Fig. 10

La posizione dello stesso punto, nel riferimento  $O_{-}x_1y_1z_1$  sarà data dalla seguente espressione vettoriale:

$$O_{-}P = O_{-}O_1O_2 + R_2O_2P$$

in cui la matrice  $R_2$  descrive l'orientamento assunto dalla seconda terna rispetto alla prima come conseguenza della rotazione del giunto due.

La relazione trovata rappresenta la trasformazione di coordinate che permette di calcolare quelle del punto  $P$  espresse rispetto alla terna  $O_{-}x_1y_1z_1$ , note quelle che lo individuano rispetto alla terna  $O_{-}x_2y_2z_2$ .

Volendo esprimere la posizione del punto  $P$  rispetto al riferimento base  $O_{-}XYZ$  basterà applicare lo stesso procedimento. Evitando di ripetere tutti i passaggi e introducendo la matrice  $R_1$  per descrivere l'orientamento assunto dalla prima terna rispetto al riferimento in conseguenza della rotazione del giunto uno, si ha:

$$O_{-}P = O_{-}O_1 + R_1O_1P$$

Sostituendo ad  $O_1P$  il valore precedentemente ricavato si avrà:

$$O_{-}P = O_{-}O_1 + R_1O_1O_2 + R_1R_2O_2P$$

Quindi, per descrivere due movimenti rotatori successivi, sono necessari tre termini. Generalizzando, si può affermare che la relazione ora vista, per descrivere gli spostamenti di un punto  $P$ , solidale con un elemento della terna del robot collegato a terra da  $n$  giunti, genera un polinomio di  $n+1$  termini. Quindi, ad esempio, la posizione occupata dalla pinza di un robot a sei gradi di libertà nello spazio, sarà descritta da un polinomio di sette termini.

Nello studio dei movimenti di un robot è molto diffusa la necessità di gestire una successione di spostamenti elementari (in pratica le rotazioni e le traslazioni permesse dai giunti) per cui risulta scomodo ed oneroso lavorare con polinomi del tipo di quelli appena ottenuti. Per superare questo inconveniente si è diffuso nell'ambito della robotica l'utilizzo delle coordinate omogenee che permettono di descrivere una arbitraria serie di rototraslazioni successive sempre con un polinomio contenente un singolo termine, argomento che verrà sviluppato nel capitolo successivo.

Per i movimenti composti si evita di proporre un esempio numerico in quanto le metodologie esposte verranno difficilmente utilizzate nella pratica.

### 3.5. Caratteristiche dei movimenti composti

Si supponga di avere i due sistemi di riferimento cartesiani  $O - XYZ$  (base) e  $O' - xyz$  (mobile) inizialmente coincidenti e di dovere posizionare la terna mobile in un certo punto dello spazio con un certo orientamento.

Il movimento che permette alla terna mobile di raggiungere la nuova collocazione nello spazio è detto di rototraslazione in quanto necessita, in genere, sia di una componente traslatoria che di una rotatoria.

Qualsiasi arbitrario spostamento della terna mobile è realizzabile con una traslazione (per posizionare l'origine) e una rotazione attorno ad un opportuno asse (per orientare la terna). Se si limitano le possibili rotazioni a quelle attorno agli assi coordinati della terna base, il più generico spostamento può essere realizzato con una traslazione e un massimo di tre rotazioni.

Applicando una serie di traslazioni il movimento risultante sarà sempre una traslazione.

Applicando una serie di rotazioni si possono avere due casi:

— se tutti gli assi di rotazione passano per l'origine della terna il movimento risultante è sempre riconducibile ad una rotazione (attorno ad un opportuno asse);

— se almeno uno di essi non passa per l'origine il movimento risultante sarà di rototraslazione (tranne casi particolari in cui le singole componenti traslatorie del movimento si elidono).

Applicando una serie di traslazioni e rotazioni il movimento risultante sarà di rototraslazione (escluso quei casi in cui la somma delle componenti di rotazione o di traslazione si elidono fra loro).

## CAPITOLO QUARTO TRASFORMAZIONI OMOGENEE

### Introduzione

Le trasformazioni omogenee sono uno strumento matematico per la manipolazione di entità geometriche (punti, linee, ...) e di sistemi di riferimento cartesiani dalle molteplici applicazioni.

Campi applicativi particolarmente importanti sono ad esempio la grafica computerizzata, l'ottica, lo studio di meccanismi e quindi, come caso particolare di questi ultimi, la robotica.

Il capitolo propone una breve introduzione alle coordinate e alle trasformazioni omogenee che vengono poi successivamente applicate per descrivere:

- la posizione e l'orientamento di un corpo rigido rispetto ad un riferimento cartesiano
- i possibili movimenti di un punto: traslazione, rotazione e loro arbitrarie combinazioni
- i possibili movimenti di una terna cartesiana di riferimento: traslazione, rotazione e loro arbitrarie combinazioni, sia rispetto agli assi del sistema di riferimento base sia a quelli della terna stessa.

#### 4.1. Le coordinate omogenee

Si immagini di definire un sistema di riferimento base  $O - XYZ$  in modo che ad ogni generico punto  $P$  dello spazio possano essere associate tre coordinate  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Queste, vengono definite come coordinate non omogenee.

Si definiscono *coordinate omogenee del punto  $P$*  quattro numeri  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  tali da soddisfare le seguenti relazioni:

$$X = x/u \quad Y = y/u \quad Z = z/u$$

Il punto  $P$  individuato dal vettore:

$$\mathbf{P} = a\mathbf{i}_x + b\mathbf{i}_y + c\mathbf{i}_z$$

in coordinate omogenee sarà espresso da una tra le tante quaterne di numeri:

$$\mathbf{P} = [x \quad y \quad z \quad u]$$

tali che un vettore  $\mathbf{P}$  può essere rappresentato anche in modo omogeneo.

$$a = x/u \quad b = y/u \quad c = z/u$$

L'origine  $O$  del sistema di riferimento avrà come coordinate non omogenee:

$$P = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

dove  $u$  rappresenta un qualsiasi fattore di scala non nullo.

Le coordinate omogenee permettono di definire anche i vettori direzione caratterizzati dall'avere fattore di scala nullo e almeno uno degli altri tre valori della quaterna non nullo:

$$[a \ b \ c \ 0]$$

Le corrispondenti coordinate non omogenee assumono in questo caso valore infinito in quanto il fattore di scala a denominatore è nullo. Il punto individuato viene detto improprio dal momento che determina una direzione ma non ha corrispondenza in coordinate non omogenee.

La direzione individuata sarà quella della retta passante per l'origine del sistema di riferimento e per il punto di coordinate non omogenee  $(a, b, c)$ , orientata dall'origine verso quest'ultimo.

Nell'ambito della robotica si sfruttano solo alcune delle possibilità offerte dalle coordinate omogenee. In particolare il fattore di scala assumerà solo due valori: nullo tutte le volte in cui si dovrà indicare una direzione ed unitario quando si dovrà individuare un punto.

### Esempio

Rappresentare in coordinate omogenee il punto  $P$ :

$$P = i_x + j_y + 9k_z$$

Il punto  $P$  può essere rappresentato in coordinate omogenee da una qualunque  $(o$  da altre) tra le seguenti quaterne:

$$P = [1 \ 1 \ 9 \ 1]$$

$$P = [2 \ 2 \ 18 \ 2]$$

$$P = [-9 \ -9 \ -81 \ -9]$$

Infatti, dividendo i primi tre numeri per il fattore di scala (il quarto elemento), si trovano sempre le coordinate non omogenee del punto  $P$ .

## 4.2. Trasformazioni omogenee

L'utilizzo delle coordinate omogenee permette di sviluppare un metodo compatto per la trasformazione di coordinate che riunisca in un'unica matrice il contributo della traslazione e della rotazione. La riunificazione dei singoli

contributi è di importanza fondamentale quando, come nello studio dei movimenti di un robot, si devono effettuare una serie di trasformazioni consecutive. Siano date le due terne  $O\_XYZ$  (base) e  $O'\_xyz$  (rototraslata in modo arbitrario rispetto alla precedente).

L'obiettivo è di individuare una relazione che permetta di calcolare le coordinate  $P_X, P_Y, P_Z$  di un punto  $P$  nel riferimento base note che siano le sue coordinate  $p_x, p_y, p_z$  rispetto alla terna  $O'\_xyz$ .

Come già visto si tratta di individuare una relazione che esprima posizione ed orientazione della terna mobile.

In coordinate non omogenee la posizione è stata descritta con una matrice  $3 \times 1$  (il vettore  $OO'$ ) mentre l'orientazione con una  $3 \times 3$  (matrice  $R$ ).

Dovendo unificare rotazione e traslazione può sembrare ragionevole affiancare i due contributi ottenendo così una matrice  $4 \times 3$  che si presenta tuttavia di utilità limitata non essendo quadrata.

$$A = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & P_x \\ i_y & j_y & k_y & P_y \\ i_z & j_z & k_z & P_z \end{bmatrix} = [R | T]$$

Ricordando il significato geometrico delle singole colonne di questa matrice è facile esprimerle in coordinate omogenee.

La prima colonna contiene le proiezioni del versore associato all'asse  $x$  della terna mobile rispettivamente sugli assi  $X, Y, Z$  di quella di base. Quindi il suo compito è quello di definire la direzione dell'asse  $x$  che, in coordinate omogenee può essere rappresentata tramite una matrice colonna  $4 \times 1$ .

$$\text{direzione asse } x = [i_x \ i_y \ i_z \ 0]^T$$

Per comodità, nel seguito, i vettori colonna verranno rappresentati trasposti (cioè come vettori riga) e il fatto sarà segnalato dall'apice  $T$ .

Procedendo analogamente la seconda e la terza colonna della matrice possono essere così rappresentate:

$$\text{direzione asse } y = [j_x \ j_y \ j_z \ 0]$$

$$\text{direzione asse } z = [k_x \ k_y \ k_z \ 0]$$

La quarta colonna rappresenta la traslazione e quindi le coordinate del punto  $O'$ . In coordinate omogenee, considerando un fattore di scala unitario, si avrà:

$$\text{posizione di } O' = [P_x \ P_y \ P_z \ 1]$$

Accostando le quattro colonne si ottiene una matrice  $4 \times 4$  che prende il nome di trasformazione omogenea.

$$A = \begin{bmatrix} R & | & OO' \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

L'utilizzo di una trasformazione omogenea basata su una matrice  $4 \times 4$  permette di ottenere una forma compatta in grado di descrivere la più generica rototraslazione della terna mobile rispetto al riferimento.

Riferendosi all'esempio proposto al paragrafo 3.3 relativo alla composizione di due movimenti rotatori successivi (fig. 1) è facile comprendere come la proliferazione dei termini venga evitata in quanto le trasformazioni omogenee racchiudono in un singolo termine sia la componente rotatoria che quella traslatoria.

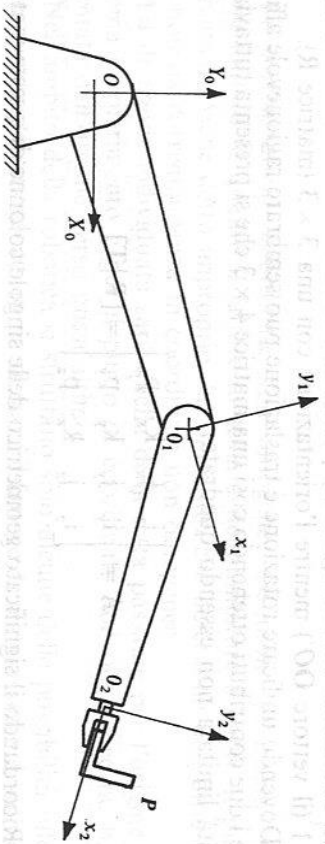


Fig. 1

Siano  $A_1$  e  $A_2$  le due trasformazioni omogenee che descrivono rispettivamente il riferimento  $O_1-x_1y_1z_1$  rispetto a  $O-XYZ$  e  $O_2-x_2y_2z_2$  rispetto a  $O_1-x_1y_1z_1$ . La relazione che esprime le coordinate del punto P rispetto al riferimento  $O_1-x_1y_1z_1$  (solidale con il primo elemento della struttura del robot) note che siano quelle rispetto alla terna  $O_2-x_2y_2z_2$  (solidale con il secondo elemento del robot) sarà:

$$O_1P = A_2 O_2P$$

Volendo esprimere P rispetto alla terna base si avrà:

$$OP = A_1 O_1P$$

In cui, sostituendo l'espressione precedentemente ottenuta per  $O_1P$ , si ha:

$$OP = A_1 A_2 O_2P$$

La matrice di trasformazione omogenea, nell'ambito della robotica, sarà utilizzata soltanto per descrivere sistemi di riferimento e i loro movimenti relativi e sarà quindi caratterizzata dall'avere una quarta riga del tipo di quella sotto riportata:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Volendo dare un senso fisico al valore di questi elementi si può dire che i primi tre rappresentano una sottomatrice detta di trasformazione prospettica mentre il quarto è il fattore di scala globale.

La trasformazione prospettica viene utilizzata per alcuni problemi di ottica oppure nel disegno computerizzato. Nell'ambito della robotica questa trasformazione sarà sempre nulla in quanto in caso contrario si avrebbe una deformazione della forma degli oggetti e delle loro mutue relazioni spaziali.

Il fattore di scala globale viene utilizzato per far aumentare tutti i valori delle coordinate (per valori compresi tra 0 ed 1) o per diminuirli (per valori superiori all'unità). Nel seguito gli si attribuirà sempre valore unitario per non modificare le dimensioni degli oggetti e le distanze che li separano.

### 4.3. Posizione ed orientamento di un corpo rigido

Le trasformazioni omogenee permettono di descrivere in modo semplice e compatto la posizione e l'orientamento di un terna rispetto al riferimento. Quindi, la posizione e l'orientamento di un oggetto possono essere descritti da una trasformazione omogenea riferita alla terna cartesiana ad esso rigidamente associata.

Al solito la terna di riferimento sia  $O-XYZ$  e quella mobile  $O'-xyz$ . La trasformazione omogenea che permette di individuare la  $O'-xyz$  sarà:

$$\begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & P_x \\ i_y & j_y & k_y & P_y \\ i_z & j_z & k_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La prima colonna contiene ordinate le proiezioni del vettore dell'asse x sugli assi X, Y, Z e viene completata da uno zero che annulla la trasformazione prospettica. La seconda e la terza codificano alla stessa maniera le direzioni degli assi y e z.

La quarta contiene ordinatamente l'ascissa, l'ordinata e la quota dell'origine della terna mobile rispetto al riferimento e viene completata con un fattore di scala unitario.

#### Esempio

Determinare la posizione e l'orientamento della terna  $O'-xyz$  rispetto al riferimento  $O-XYZ$  conoscendo la trasformazione omogenea che la descrive (cfr. esempio par. 3.1 e fig. 2):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La quarta colonna dà immediatamente le coordinate dell'origine O: ascissa = 1, ordinata = 5 e quota = 3.

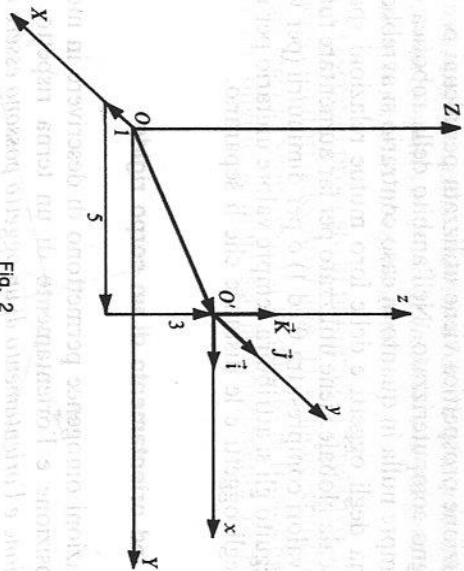


Fig. 2

Rimangono ora da orientare i tre assi. La prima colonna dice che il versore dell'asse  $x$  è diretto come l'asse  $Y$ , la seconda che l'asse  $y$  è diretto come l'opposto di  $X$  e la terza colonna che i due assi  $z$  e  $Z$  hanno la stessa direzione.

#### 4.4. Matrice omogenea di traslazione

Si immagini di avere un punto  $P$  di coordinate  $u, v, w$ , e di volerlo traslare secondo le modalità indicate dal vettore di traslazione, utilizzando una opportuna trasformazione omogenea.

Allo scopo si definiscano una terna di riferimento ( $O\_XYZ$ ) ed una ( $O'\_xyz$ ) solidale con il punto  $P$ , inizialmente coincidenti (fig. 3a). Si trasi quindi la terna mobile secondo le indicazioni del vettore di traslazione  $e$ , di conseguenza, anche il punto  $P$  ad essa solidale (fig. 3b). In tal modo le coordinate di  $P$  traslato non saranno altro che quelle di  $P$  rispetto al riferimento  $O\_XYZ$ .

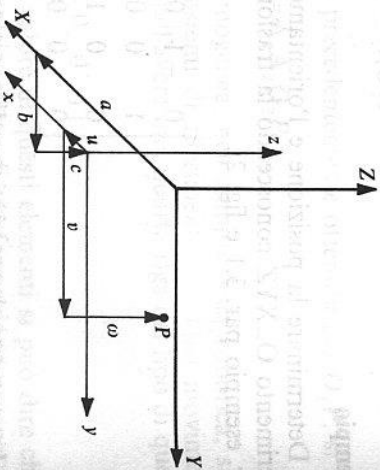
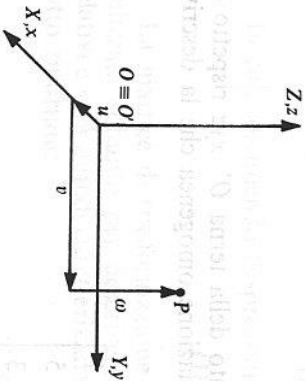


Fig. 3

La terna  $O'\_xyz$ , dopo, la traslazione, sarà descritta rispetto al riferimento dalla trasformazione omogenea seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La quarta colonna contiene tutte le informazioni sulla traslazione:

$$\begin{aligned} [1, 4] &= a \rightarrow \text{traslazione lungo l'asse X} \\ [2, 4] &= b \rightarrow \text{traslazione lungo l'asse Y} \\ [3, 4] &= c \rightarrow \text{traslazione lungo l'asse Z} \end{aligned}$$

mentre la sottomatrice  $3 \times 3$  in alto a destra è una matrice unitaria in quanto si è supposta nulla la rotazione e quindi gli assi non hanno cambiato orientazione. Il punto  $P$ , di coordinate  $px = u, py = v, pz = w$  rispetto alla terna mobile, avrà, rispetto al riferimento fisso le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} PX &= u + a \\ PY &= v + b \\ PZ &= w + c \end{aligned}$$

Queste si trovano semplicemente premoltiplicando il vettore posizione di  $P$  per la trasformazione omogenea che descrive la terna mobile traslata rispetto al riferimento. Una semplice regola riassume il procedimento:

Un generico punto  $P$

$$P = [u \quad v \quad w \quad 1]$$

può essere traslato

$$\text{trasl} = ai_x + bj_y + ck_z$$

premultiplicandolo per la matrice omogenea di traslazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Esempio**

Dato il punto  $P$  e la traslazione (trasl) trovare le sue nuove coordinate (fig. 4).

$$P = 5i_x + j_y + 2k_z \quad (\text{punto da traslare})$$

$$\text{trasl} = 2i_x + 4j_y + 4k_z \quad (\text{vettore di traslazione})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di traslazione})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

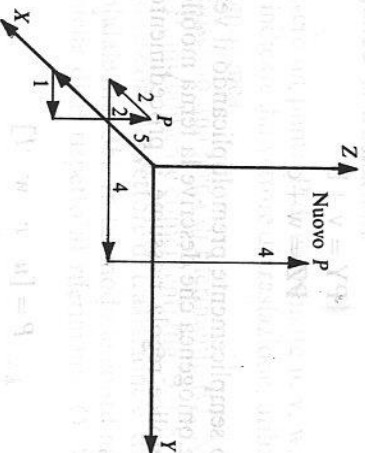


Fig. 4

**4.5. Matrice omogenea di rotazione**

Si immagini di avere il punto  $P$ , di coordinate  $u, v, w$  e di volerlo ruotare dell'angolo  $\theta$  attorno ad uno dei tre assi coordinati di riferimento.

Allo scopo si definiscono una terna di riferimento ( $O\_XYZ$ ) ed una seconda solidale con il punto  $P$  ( $O'_-xyz$ ) inizialmente coincidenti (fig. 5a).

Si ruoti poi la terna mobile e quindi anche il punto  $P$  ad essa solidale (fig. 5b). In tal modo le coordinate di  $P$  ruotato non saranno altro che quelle di  $P$  rispetto al riferimento  $O\_XYZ$ .

Imponendo ad esempio alla terna mobile una rotazione di  $\theta$  attorno all'asse  $Z$ , la trasformazione omogenea che la descrive rispetto al riferimento base sarà:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

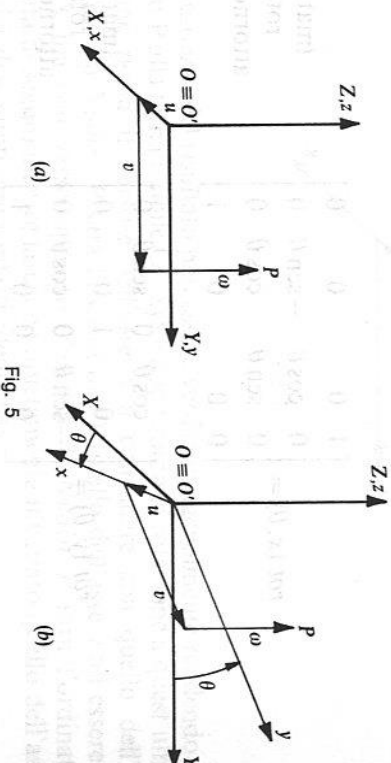


Fig. 5

I primi tre elementi della quarta colonna sono nulli in quanto le rotazioni attorno agli assi coordinati non generano spostamenti dell'origine.

La sottomatrice  $3 \times 3$  è invece immediatamente individuabile come quella che esprime la rotazione attorno all'asse  $Z$ .

Il punto  $P$ , di coordinate  $px = u, py = v, pz = w$  rispetto alla terna mobile, avrà coordinate rispetto al riferimento fisso date da:

$$PX = px i_x + py j_x + pz k_x = u \cos \theta - v \sin \theta$$

$$PY = px i_y + py j_y + pz k_y = u \sin \theta + v \cos \theta$$

$$PZ = px i_z + py j_z + pz k_z = w$$

Queste coordinate si trovano semplicemente premoltiplicando il vettore posizione di  $P$  per la trasformazione omogenea che descrive la terna mobile ruotata rispetto al riferimento.

Quanto esposto può essere così riassunto:

Un generico punto  $P$

$$P = [u \quad v \quad w \quad 1]^T$$

può essere ruotato dell'angolo  $\theta$  attorno ad uno dei tre assi coordinati premoltiplicandolo per la matrice che esprime la trasformazione omogenea di rotazione corrispondente.

La matrice omogenea in grado di descrivere la rotazione attorno ad un generico asse si presenta più complessa di quelle che esprimono le sole rotazioni

attorno a quelli coordinati e pertanto non verrà ricavata ed utilizzata nel seguito.

Tale scelta non introduce limitazioni in quanto una opportuna sequenza di rotazioni attorno agli assi coordinati permette di descrivere una rotazione attorno ad un generico asse; in altre parole ciò significa che una terna di riferimento può essere comunque orientata rispetto a quella base anche se le rotazioni possono avvenire solo attorno agli assi di riferimento.

Le matrici omogenee di rotazione corrispondenti a movimenti rotatori attorno agli assi cartesiani sono:

$$rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(matrice di rotazione attorno a X)

$$rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(matrice di rotazione attorno a Y)

$$rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(matrice di rotazione attorno a Z)

**Esempio**

Dato il punto P, se ne determinino le coordinate dopo averlo fatto ruotare di 90° in verso antiorario attorno all'asse z (fig. 6).

$$P = i_x + 6j_y + 3k_z$$

$$rot(z, 90) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Nuovo\_P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

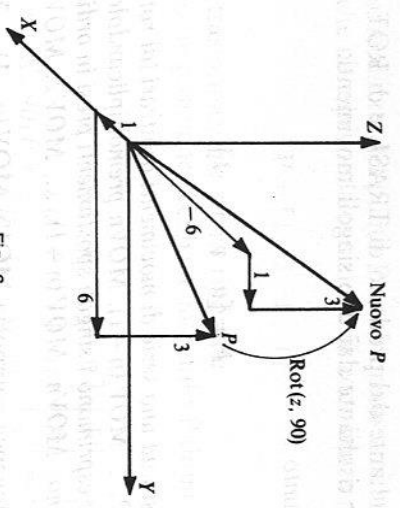


Fig. 6

L'esattezza del risultato può essere verificata agevolmente rendendo solidale il punto P alla terna mobile O'-xyz e applicando la rotazione a quest'ultima. La rotazione porta il vettore dell'asse x a coincidere con quello dell'asse Y (l'ordinata di Nuovo\_P sarà l'ascissa di P), quello dell'asse y ad essere diretto come X ma con verso opposto (l'ascissa di Nuovo\_P sarà l'ordinata di P cambiata di segno) mentre lascia completamente invariato quello dell'asse Z (le quote dei due punti sono infatti identiche).

Queste affermazioni, basate sull'osservazione pratica degli effetti della rotazione, trovano piena conferma nei risultati ottenuti utilizzando la matrice omogenea di rotazione.

**4.6. Matrice omogenea composta**

Si immagini di avere un punto P, di coordinate u, v, w e di applicargli una serie di traslazioni e di rotazioni.

Scopo del paragrafo è di individuare una trasformazione omogenea che descriva il movimento risultante del punto.

Si inizi col considerare il primo movimento, che supporremo ad esempio di rotazione; le nuove coordinate assunte da P saranno date da:

$$P_1 = ROT_1 P$$

dove ROT<sub>1</sub> è la trasformazione omogenea che descrive la rotazione. Si continui con il secondo movimento, ad esempio una traslazione descritta dalla trasformazione TRASL:

$$P_2 = TRASL P_1$$

e quindi

$$P_2 = TRASL ROT_1 P$$

La matrice risultante dal prodotto di TRASL e di ROT descrive quindi lo spostamento di P risultante dai due singoli movimenti:

Un generico punto P

$$P = [u \quad v \quad w \quad 1]$$

può essere sottoposto ad una serie di movimenti arbitrari (di rotazione e traslazione) MOV1, MOV2, ... MOV(n-1), MOVn premoltiplicandolo per le trasformazioni omogenee che esprimono i singoli spostamenti presi in ordine inverso a quello con cui si succedono: MOVn, MOV(n-1), ..., MOV2, MOV1.

La matrice omogenea composta MOVn MOV(n-1) ... MOV2 MOV1 è il risultato del prodotto di più matrici elementari ciascuna delle quali descrive un movimento di rotazione o di traslazione e quindi permette di descrivere il più generale movimento rototraslatorio del punto P.

### Esempio

Dato il punto P:

$$P = i_x + 3j_y + 5k_z$$

si determinino le sue coordinate dopo che abbia subito una rotazione di novanta gradi attorno all'asse X (rot(X, 90)) seguita da una seconda, sempre di novanta, attorno all'asse Y (rot(Y, 90)) e infine da una traslazione di cinque unità di misura lungo X, di dieci lungo Y e di due lungo Z (trasl(5, 10, 2)).

Le tre matrici omogenee fondamentali che descrivono i singoli spostamenti subiti dal punto sono:

$$\text{rot}(X, 90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rot}(Y, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{trasl}(5, 10, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare le coordinate del punto P trasformato sarà sufficiente premoltiplicare il vettore che ne esprime la posizione in coordinate omogenee (fig. 7a):

$$P = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 1]$$

per le matrici di trasformazione sopra riportate. Più in dettaglio, la posizione occupata dal punto P dopo la prima rotazione sarà (fig. 7b):

$$P_1 = \text{rot}(X, 90)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

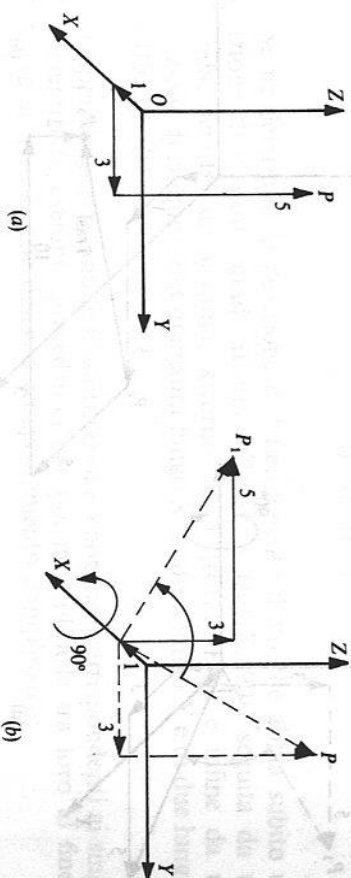


Fig. 7

dopo la seconda (fig. 8a):

$$P_2 = \text{rot}(Y, 90)P_1 = \text{rot}(Y, 90)\text{rot}(X, 90)P = [3 \quad -5 \quad -1 \quad 1]^T$$

e dopo la traslazione (fig. 8b):

$$P_3 = \text{trasl}(5, 10, 2)P_2 = \text{trasl}(10, 5, 2)\text{rot}(Y, 90)\text{rot}(X, 90)P = [8 \quad 5 \quad 1 \quad 1]^T$$

Solitamente la via seguita è tuttavia quella di moltiplicare tra loro le matrici di spostamento fino ad ottenere quella che descrive la rototraslazione risultante e solo allora premoltiplicare le coordinate del punto.

Svolgendo numericamente l'esempio si avrà:

$$\text{rot} = \text{rot}(Y, 90)\text{rot}(X, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rottrasl} = \text{trasl}(5, 10, 2) \text{rot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi la nuova posizione del punto  $P$  sarà:

$$P_3 = \text{rottrasl}(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

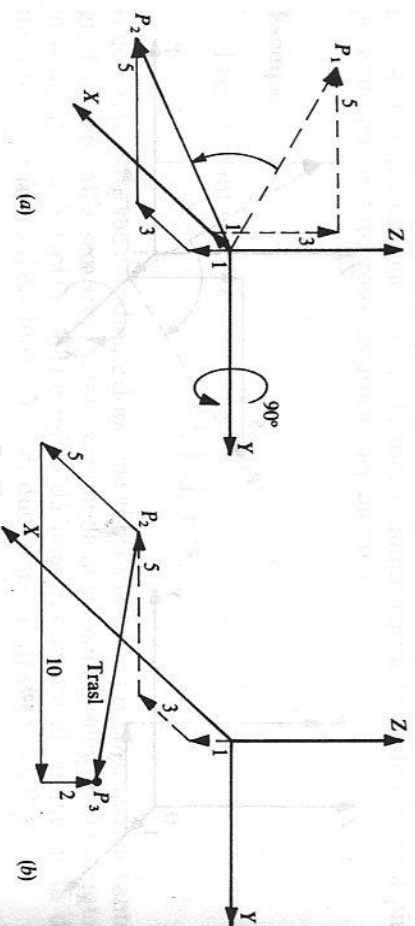


Fig. 8

#### 4.7. Trasformazioni di un sistema di riferimento

Le trasformazioni risultano molto utili anche per traslare, ruotare o rototraslare nello spazio le terne cartesiane.

Il problema è risolvibile utilizzando gli strumenti sviluppati nei paragrafi precedenti in quanto la rototraslazione di una terna può essere ricondotta a quella di quattro punti: l'origine che definisce la posizione e i tre punti impropri che definiscono la direzione degli assi cartesiani per l'orientamento.

Quindi, premoltiplicando ciascuno di questi quattro punti per la trasformazione omogenea che descrive la rototraslazione che si vuole imporre alla terna, si otterranno quattro nuovi punti, i quali individueranno posizione ed orientamento del nuovo sistema di riferimento. Queste quattro operazioni possono essere rappresentate sinteticamente come il prodotto tra la matrice omogenea che esprime la rototraslazione e quella che descrive la terna.

Una terna cartesiana, espressa tramite la matrice omogenea  $A$ , può essere sottoposta ad una serie di movimenti arbitrari (di rotazione o di traslazione)  $MOV1, MOV2, \dots, MOVn-1, MOVn$  premoltiplicandola per le trasformazioni

omogenee che esprimono i singoli spostamenti, presi in ordine inverso a quello con cui si succedono: nuova  $A = MOVn MOVn-1 \dots MOV2 MOV1 A$ .

Questa possibilità di manipolare sistemi di riferimento tramite trasformazioni omogenee verrà ampiamente sfruttata nel capitolo successivo in cui si affronterà la cinematica diretta della struttura dei robot.

#### Esempio

Data la terna mobile  $O'-xyz$ :

$$O'-xyz = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ne determini la posizione e l'orientamento dopo che abbia subito una rotazione di novanta gradi attorno all'asse  $X$  ( $\text{rot}(X, 90)$ ) seguita da una seconda, sempre di novanta, attorno ad  $Y$  ( $\text{rot}(Y, 90)$ ) e infine da una traslazione di cinque unità di misura lungo  $X$ , di dieci lungo  $Y$  e di due lungo  $Z$  ( $\text{trasl}(5, 10, 2)$ ).

Dapprima si ricavano le trasformazioni omogenee corrispondenti ai singoli movimenti (cfr. esempio precedente) per poi moltiplicarle tra loro al fine di ottenere la matrice che descrive lo spostamento complessivo:

$$\text{rottrasl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posizione e orientamento della nuova terna sono ora facilmente ricavabili come:

$$\begin{aligned} \text{Nuova } O'-xyz &= \text{rottrasl} O'-xyz = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'esattezza dei risultati ottenuti può essere immediatamente confrontata con la fig. 9 che riporta la posizione iniziale delle due terne e i movimenti subiti da  $O'-xyz$ .

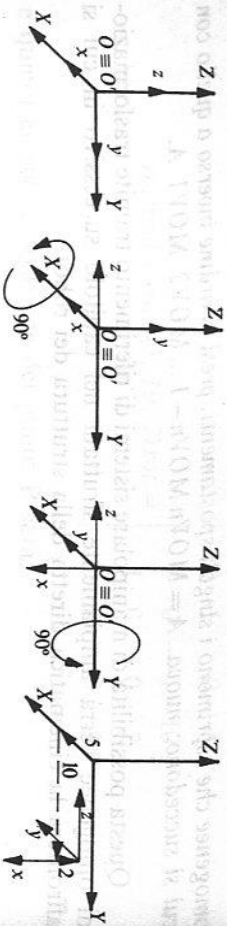


Fig. 9

#### 4.8. Movimenti relativi

Tutti gli spostamenti finora descritti sono sempre stati considerati rispetto alla terna di riferimento base e ottenuti premoltiplicando il punto o la terna per la trasformazione omogenea che li descriveva.

Gli spostamenti della terna mobile possono tuttavia essere riferiti anche ai suoi stessi assi. La fig. 10 mostra ad esempio la sequenza degli spostamenti:

trasl(10, 5, 2)  $\rightarrow$  rot(Y, 90)  $\rightarrow$  rot(X, 90)

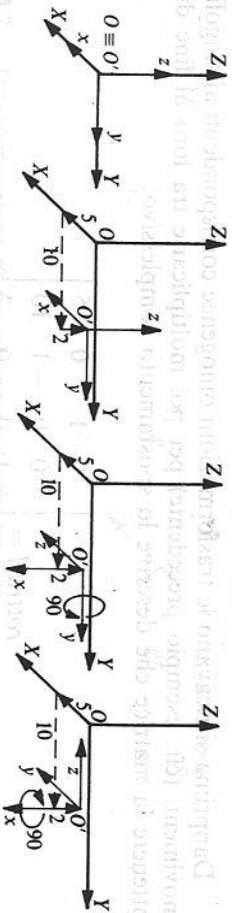


Fig. 10

Una terna cartesiana, espressa tramite la matrice omogenea  $A$ , può essere sottoposta ad una serie di movimenti arbitrari (di rotazione o traslazione) MOV1, MOV2, ..., MON<sub>n-1</sub>, MOV<sub>n</sub> rispetto ai suoi assi postmoltiplicandola per le trasformazioni omogenee che esprimono i singoli spostamenti, presi nell'ordine in cui si succedono: nuova\_A = MOV1 MOV2 ... MOV<sub>n-1</sub> MOV<sub>n</sub>...

In generale si può dire che:

*Premoltiplicando una trasformazione omogenea che rappresenta una terna per un'altra che esprime una rotazione o una traslazione gli spostamenti saranno riferiti alla terna di riferimento.*

*Postmoltiplicando una trasformazione omogenea che rappresenta una terna per un'altra che esprime una rotazione o una traslazione gli spostamenti saranno riferiti alla terna descritta dalla prima trasformazione.*

#### Esempio

Sia data la terna di riferimento  $O'-xyz$  descritta dalla trasformazione omogenea:

$$O'-xyx = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la trasformazione omogenea che rappresenta una rotazione attorno all'asse X di novanta gradi:

$$\text{rot}(X, 90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Premoltiplicando la terna per la trasformazione di rotazione si ha:

$$\text{Nuova}_O'-xyz = \text{Rot}(X, 90) O'-xyz = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che, come mostrato in fig. 11 rappresenta una rotazione di 90 gradi attorno all'asse X del riferimento di base.

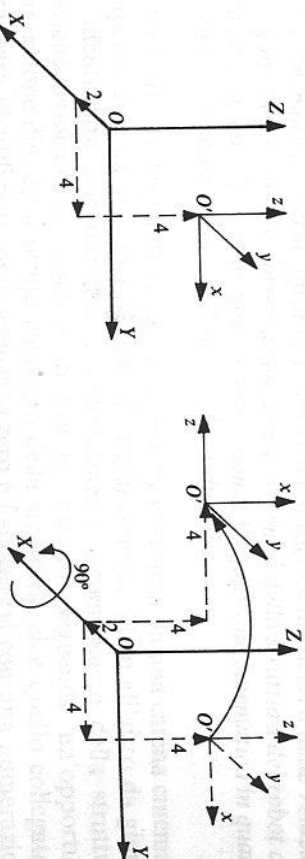


Fig. 11

Postmoltiplicando la terna per la trasformazione di rotazione si ha:

$$\text{Nuova\_}O'_- = O'_-xyz \text{ Rot}(x, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che, come mostrato in fig. 12 rappresenta una rotazione di 90 gradi attorno all'asse x della terna  $O'_-xyz$ .

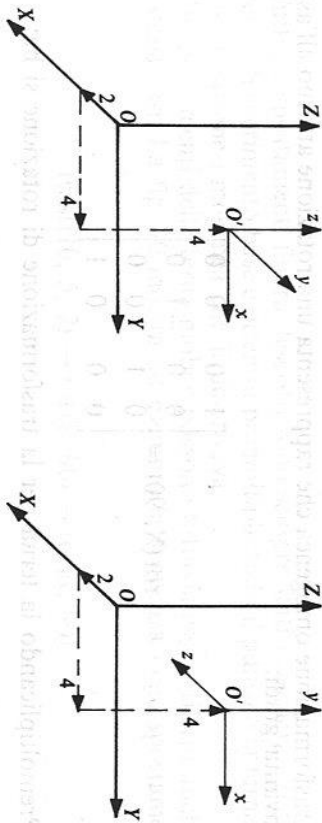


Fig. 12

## CAPITOLO QUINTO

### CINEMATICA DIRETTA

#### Introduzione

La posizione e l'orientamento di un oggetto manipolato da un robot dipendono evidentemente dalle caratteristiche geometriche della sua struttura e dalla configurazione dei suoi giunti.

Assai meno evidente è il procedimento con cui determinare la posizione e l'orientamento dell'oggetto manipolato conoscendo le caratteristiche geometriche della struttura e una data configurazione dei suoi giunti.

Tale procedimento è detto cinematica diretta e verrà sviluppato nel presente capitolo.

La prima parte, dedicata all'inquadramento qualitativo del problema, definisce il formalismo con cui verrà affrontata la cinematica diretta, risolve il problema in modo intuitivo per un robot a due gradi di libertà utilizzando le trasformazioni omogenee e propone una serie di considerazioni sull'estensione del metodo a robot a sei gradi di libertà.

La seconda, dedicata all'approccio quantitativo alla cinematica diretta, sviluppa un metodo di modellizzazione della struttura del robot basata sull'assegnazione di terne di riferimento cartesiane ai suoi elementi e sull'utilizzo di trasformazioni omogenee per descriverne le posizioni relative. Al termine vengono proposti una serie di esempi di complessità via via crescente per poter verificare i concetti appresi nelle parti precedenti.

#### 5.1. Cinematica diretta

*La cinematica diretta affronta il problema statico della ricerca delle relazioni che legano la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura del robot alle variabili di giunto. Tale relazione prende il nome di equazione cinematica in quanto governa il comportamento cinematico del robot (fig. 1).*

La struttura dei robot industriali è sempre costituita da una catena cinematica aperta, cioè da una serie di elementi rigidi collegati l'uno all'altro da giunti. Per identificare correttamente e sinteticamente i componenti della struttura conviene associare a ciascuno di essi un numero seguendo un'opportuna convenzione (fig. 2): il primo elemento della struttura, cioè quello collegato a terra, sarà identificato come segmento zero e i successivi con una numerazione progressiva: 1, 2, ..., n - 1, n dove n è il numero dei giunti. I giunti vengono

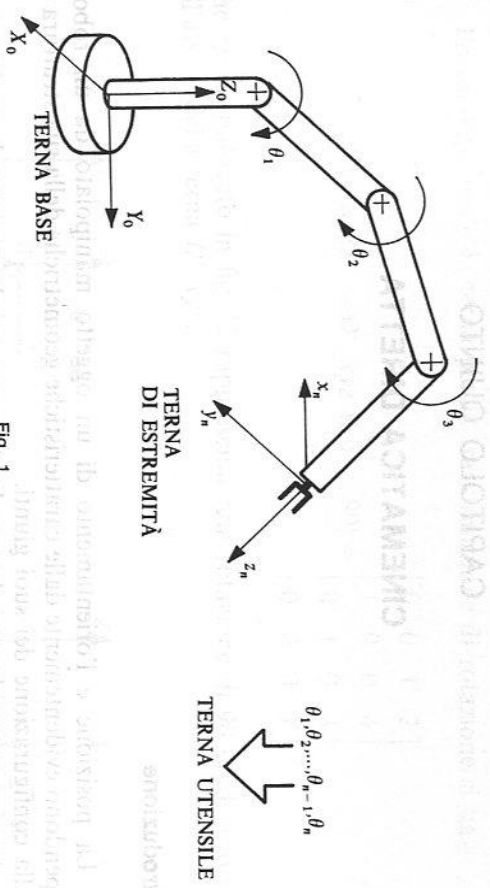


Fig. 1

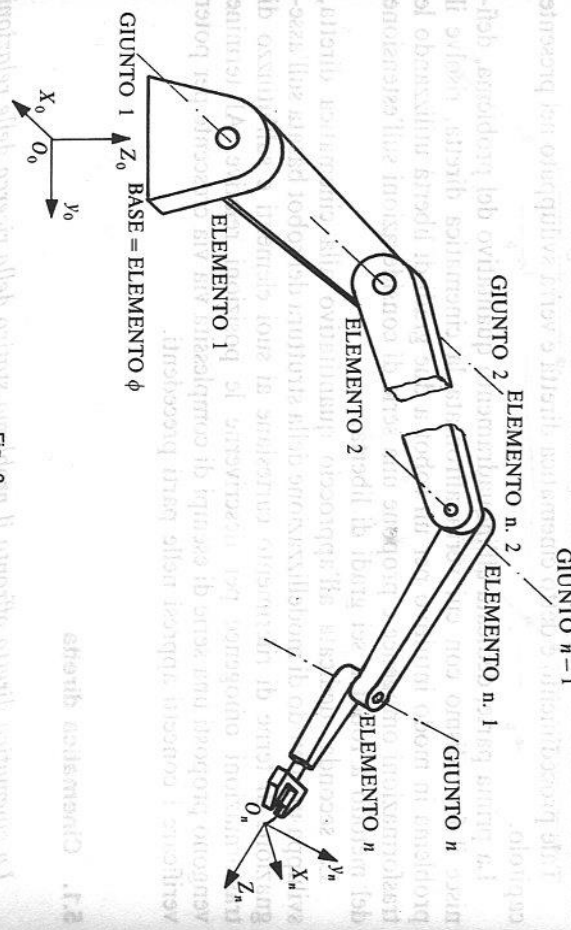


Fig. 2

numerati progressivamente, a partire da uno, nell'ordine in cui si incontrano muovendosi dalla base della struttura verso la sua estremità. Con questa convenzione, il generico giunto  $i$  sarà quello che unisce gli elementi  $i - 1$  e  $i$  della struttura.

La cinematica diretta può essere meglio definita introducendo  $n + 1$  sistemi di riferimento tali che: la terna  $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$  sia quella base, la  $O_{i-1} - X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$  sia solida con il primo elemento della struttura, la  $O_{i-2} - X_{i-2} Y_{i-2} Z_{i-2}$  con il secondo... la  $O_{n-1} - X_{n-1} Y_{n-1} Z_{n-1}$  con l'estremità della struttura.

L'equazione cinematica è l'insieme di relazioni che esprimono la posizione e

l'orientamento della terna  $O_n - X_n Y_n Z_n$  rispetto a quella di riferimento  $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$ , in funzione delle variabili di giunto.

La configurazione assunta dalla struttura del robot, e quindi la posizione e l'orientamento della terna di estremità, possono essere calcolate note che siano le relazioni della cinematica diretta e gli  $n$  valori delle variabili di giunto. Premesso questo si può pensare di definire uno spazio, detto spazio dei giunti, avente un numero di dimensioni pari a quello dei giunti, cioè  $n$ .

Un punto appartenente a tale spazio viene individuato da un insieme ordinato di  $n$  coordinate  $(n_1, n_2, \dots, n_n)$ . Quindi ad ogni configurazione assunta dalla struttura del robot corrisponderà in tale spazio un punto le cui  $n$  coordinate saranno i valori delle variabili di giunto. L'inverso non è sempre vero in quanto i giunti hanno possibilità di movimento limitata e quindi non sarà possibile far corrispondere ad ogni punto dello spazio dei giunti una possibile configurazione della struttura del robot.

La cinematica diretta può quindi essere pensata come l'insieme di quelle relazioni che trasformano un punto dello spazio dei giunti (che esprime la configurazione della struttura del robot) nella posizione ed orientamento di una terna cartesiana (quella solida con l'estremità della struttura).

**5.2. Cinematica diretta per un robot a due gradi di libertà**

Si consideri un robot a due gradi di libertà in cui gli assi di rotazione dei due giunti siano entrambi perpendicolari al foglio in modo tale che ogni suo movimento avvenga in tale piano (fig. 3).

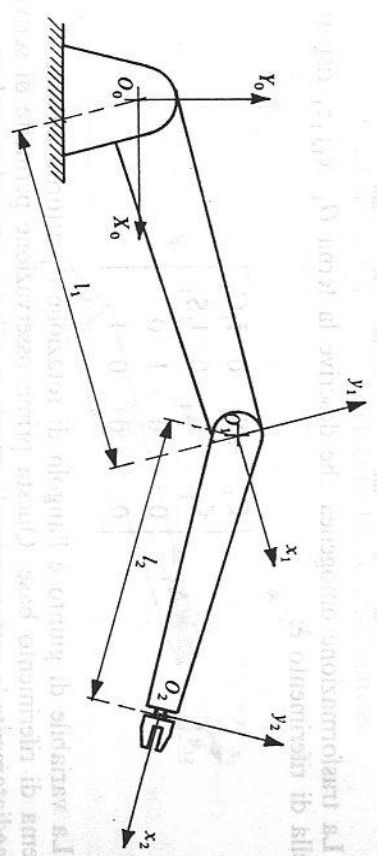


Fig. 3

Essendo due i giunti, si dovranno definire tre terne, la prima di riferimento, la seconda solida al primo segmento della struttura e l'ultima al secondo. Essendo a priori del tutto arbitraria sia la posizione in cui sistemare l'origine che l'orientamento da dare agli assi di riferimento, conviene posizionare le terne in modo tale da semplificare il problema.

Una buona soluzione per la terna di riferimento  $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$  è quella di fare

coincidere l'origine con l'intersezione tra l'asse di rotazione del primo giunto e il piano in cui si muove il robot. Per quanto riguarda l'orientazione è conveniente che l'asse  $Z_0$  coincida con quello di rotazione del primo giunto.

L'origine della terna  $O_1-x_1y_1z_1$  può essere sistemata tra l'intersezione dell'asse di rotazione del secondo giunto ed il piano di movimento del robot, l'asse  $z_1$  coincidente con quello di rotazione del secondo giunto mentre l'asse  $x_1$  può essere vantaggiosamente orientato in modo da essere il prolungamento del primo braccio.

L'origine dell'ultima terna,  $O_2-x_2y_2z_2$ , viene in genere posizionata in un punto dell'ultimo elemento della struttura particolarmente interessante, ad esempio quello in cui avviene la chiusura delle due dita. Per quanto riguarda gli assi, una buona soluzione è di disporre  $z_2$  parallelo a  $Z_0$  e  $z_1$  e  $x_2$  come il prolungamento del secondo braccio.

Nel seguito si utilizzeranno le matrici di trasformazione  $4 \times 4$  introdotte nel capitolo precedente anche se, essendo tutti i movimenti appartenenti al piano  $X_0Y_0$  della terna di riferimento, sarebbe in teoria possibile utilizzare delle matrici  $3 \times 3$  che trascurino la terza dimensione. Tali matrici si ottengono da quelle che verranno utilizzate togliendo la terza colonna e la terza riga.

La scelta di utilizzare comunque le più complesse matrici  $4 \times 4$  è giustificata dalla volontà di rendere l'esempio più aderente alla trattazione generale del problema che verrà sviluppata nel seguito.

Nell'intento di semplificare la rappresentazione delle funzioni trigonometriche seno e coseno, di cui si farà un uso intenso, si adotteranno le seguenti convenzioni:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_n) &= S_n & \cos(\theta_n) &= C_n \\ \text{sen}(\theta_m + \theta_n) &= S_{mn} & \cos(\theta_m + \theta_n) &= C_{mn} \end{aligned}$$

La trasformazione omogenea che descrive la terna  $O_1-x_1y_1z_1$  rispetto a quella di riferimento è:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La variabile di giunto è l'angolo di rotazione  $\theta_1$ , attorno all'asse  $Z_0$  del sistema di riferimento base. Questa prima osservazione permette di scrivere immediatamente la sottomatrice di rotazione, già ricavata nel precedente capitolo come  $\text{rot}(Z, \theta)$ .

Rimangono da determinare gli elementi della quarta colonna, che sono poi le coordinate di  $O_1$ . Tale punto è vincolato a muoversi attorno a  $O_0$  ad una distanza fissa pari alla lunghezza del primo elemento della struttura del robot (distanza tra i due assi di rotazione). Quindi è possibile esprimere le sue coordinate  $X$  ed  $Y$  ricorrendo alla trigonometria:

$$X = l_1C_1 \quad Y = l_1S_1$$

La coordinata  $Z$  di  $O_1$  non pone alcun problema in quanto è sempre nulla. Determinate le prime tre righe della matrice non resta che completarla con la quarta per ottenere la matrice sopra riportata.

La trasformazione omogenea che descrive la terna  $O_2-x_2y_2z_2$  rispetto alla  $O_1-x_1y_1z_1$  è:

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2^*C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2^*S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il procedimento per ottenere questa matrice è analogo a quello utilizzato per determinare  $A_1$ .

L'equazione cinematica per questo robot a due gradi di libertà sarà:

$$T = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} + l_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2S_{12} + l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'esattezza dei risultati può essere verificata calcolando la posizione dell'origine  $O_2$  della seconda terna e l'angolo di cui risulta ruotata rispetto a quella di riferimento utilizzando la trigonometria.

Le coordinate  $x$  ed  $y$  del punto  $O_2$  si ottengono proiettando sull'asse delle ascisse e delle ordinate le lunghezze dei due bracci (fig. 4):

$$\begin{aligned} x &= l_2C_{12} + l_1C_1 & \text{elemento [1,4] della matrice} \\ y &= l_2S_{12} + l_1S_1 & \text{elemento [2,4] della matrice} \end{aligned}$$

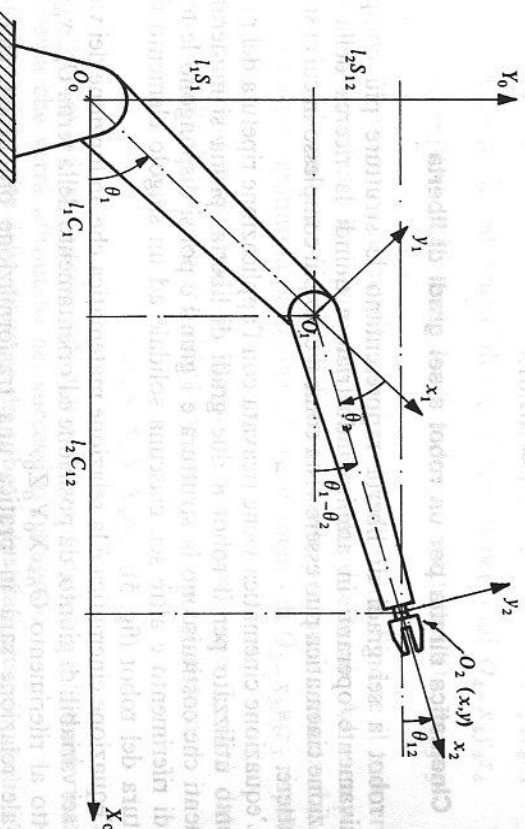


Fig. 4

La terna di estremità risulta ruotata attorno all'asse Z dell'angolo  $\theta_{12}$  rispetto al riferimento, come risulta dalla sottomatrice di rotazione  $3 \times 3$ .

**Esempio:**

Dato il robot di fig. 4, calcolare la posizione dell'estremità della struttura quando:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 60^\circ \\ \theta_2 &= -30^\circ\end{aligned}$$

sapendo che:

$$\begin{aligned}l_1 &= 600 \\ l_2 &= 500\end{aligned}$$

Disponendo le terne come precedentemente descritto e facendo coincidere l'origine della seconda terna con il punto cercato, si ottiene:

$$T = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 866 & -500 & 0 & 733.013 \\ .500 & .866 & 0 & 769.615 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posizione dell'estremità della struttura sarà:

$$\begin{aligned}x &= 733.013 \\ y &= 769.615\end{aligned}$$

### 5.3. Cinematica diretta per un robot a sei gradi di libertà

I robot a sei gradi di libertà rappresentano le strutture più complete effettivamente operanti in ambito industriale e quindi la ricerca della loro equazione cinematica può essere vista come il caso più complesso in cui ci si può imbattere.

L'equazione cinematica viene ricavata con l'applicazione ripetuta del procedimento utilizzato per il robot a due gradi di libertà: prima si numerano i segmenti che costituiscono la struttura e i giunti e poi si dispongono le terne, una di riferimento e altre sei, ciascuna solidale ad un singolo elemento della struttura del robot (fig. 5).

L'equazione cinematica è la relazione matematica che, in funzione dei valori delle sei variabili di giunto, dà posizione ed orientamento della terna  $O_6-x_6y_6z_6$  rispetto al riferimento  $O_0-x_0y_0z_0$ .

Tale relazione sarà in pratica una trasformazione omogenea, cioè una matrice  $4 \times 4$ , i cui singoli elementi saranno funzione delle variabili di giunto.

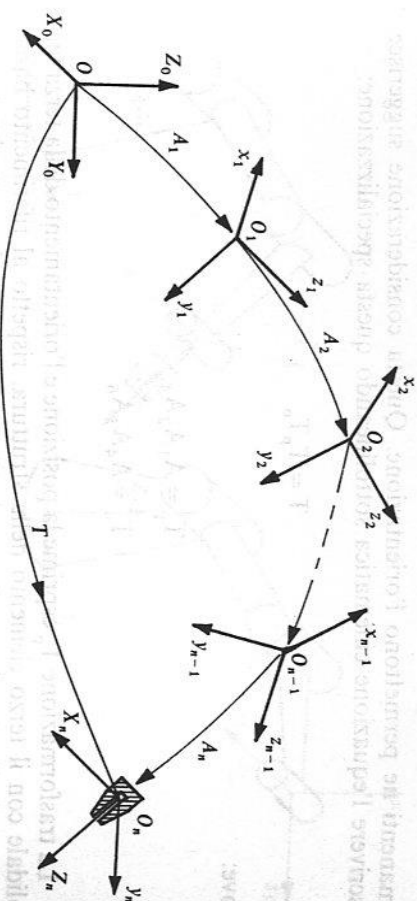


Fig. 5

La posizione e l'orientamento di una qualsiasi delle terne introdotte, rispetto alla sua precedente, può essere espressa tramite una opportuna trasformazione omogenea funzione della variabile di giunto che ne permette il movimento relativo.

Quindi l'equazione cinematica può essere ottenuta come il prodotto delle sei trasformazioni omogenee che descrivono le relazioni tra le terne (fig. 5). Le sei trasformazioni di interesse sono:

- $A_1 \rightarrow$  posiz. ed orient. di  $O_1-x_1y_1z_1$  rispetto ad  $O_0-x_0y_0z_0$
- $A_2 \rightarrow$  posiz. ed orient. di  $O_2-x_2y_2z_2$  rispetto ad  $O_1-x_1y_1z_1$
- $A_3 \rightarrow$  posiz. ed orient. di  $O_3-x_3y_3z_3$  rispetto ad  $O_2-x_2y_2z_2$
- $A_4 \rightarrow$  posiz. ed orient. di  $O_4-x_4y_4z_4$  rispetto ad  $O_3-x_3y_3z_3$
- $A_5 \rightarrow$  posiz. ed orient. di  $O_5-x_5y_5z_5$  rispetto ad  $O_4-x_4y_4z_4$
- $A_6 \rightarrow$  posiz. ed orient. di  $O_6-x_6y_6z_6$  rispetto ad  $O_5-x_5y_5z_5$

dove con A si indica la matrice corrispondente e con l'indice il numero del giunto che permette il movimento relativo delle due terne. Ad esempio, gli elementi della matrice  $A_3$  saranno funzione della posizione assunta dal terzo giunto ed esprimeranno la posizione e l'orientamento di  $O_3-x_3y_3z_3$  rispetto ad  $O_2-x_2y_2z_2$ .

L'equazione cinematica, che d'ora in poi chiameremo T, sarà data dal prodotto delle sei matrici che descrivono le relazioni tra le terne:

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

Tutto è quindi ricondotto alla determinazione delle singole trasformazioni, problema che verrà affrontato nel successivo paragrafo.

La maggior parte delle strutture dei robot industriali prevedono che i primi tre giunti siano specializzati a posizionare gli oggetti nello spazio mentre i tre

rimanenti ne permettono l'orientazione. Questa considerazione suggerisce di riscrivere l'equazione cinematica sottolineando questa specializzazione:

$$T = T_p T_o$$

dove:

$$T_p = A_1 A_2 A_3$$

$$T_o = A_4 A_5 A_6$$

La trasformazione  $T_p$  esprime la posizione e l'orientamento della terza terna, solida con il terzo elemento della struttura, rispetto al riferimento base.

Quando il robot è cartesiano tale trasformazione sarà caratterizzata dall'avere la componente rotatoria costante in quanto i primi tre assi del robot sono prismatici e quindi non modificano l'orientamento della terza terna rispetto al riferimento (fig. 6). Quando invece almeno uno dei primi tre giunti è rotoidale, anche la componente rotatoria della matrice  $T_p$  sarà funzione delle variabili di giunto (fig. 7).

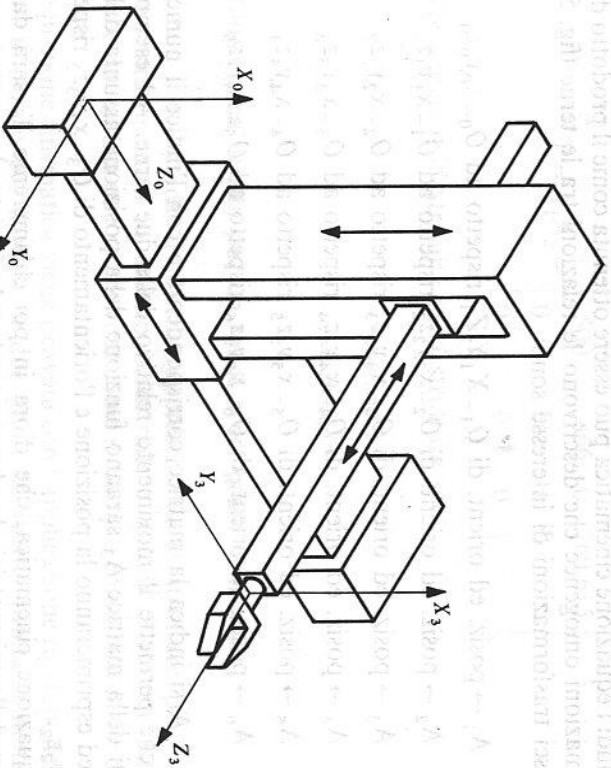


Fig. 6

La trasformazione  $T_o$  esprime la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura rispetto alla terza. Gli ultimi tre giunti delle strutture dei robot sono praticamente sempre rotoidali per cui la trasformazione  $T_o$  conterrà sempre una componente rotatoria funzione delle variabili di giunto.

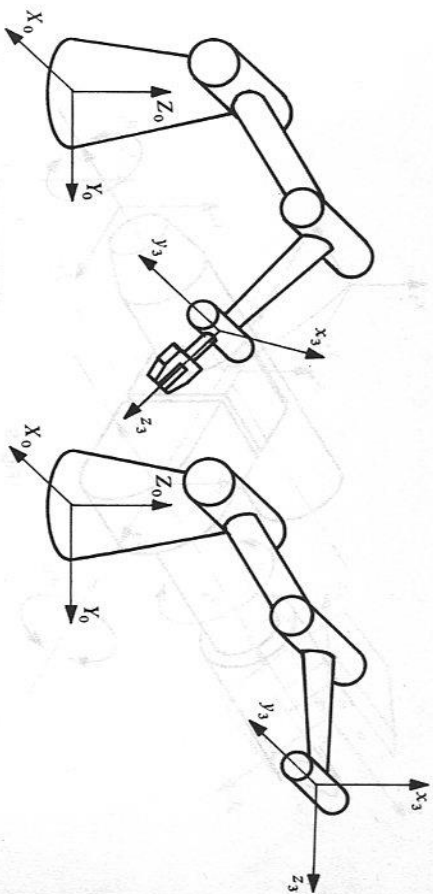


Fig. 7

La componente traslatoria può al contrario essere nulla. Questo accade quando i giunti sono disposti in modo che i tre assi di rotazione si incontrano in un unico punto (si parla di polso sferico e la condizione è verificata nella maggior parte dei robot industriali) che viene fatto coincidere con l'origine delle terre, dalla terza alla sesta (fig. 8a). La componente di traslazione sarà in questo caso nulla perché la posizione dell'origine della sesta terna, coincidente con quella della terza, non può essere modificata dal movimento degli ultimi tre giunti appartenendo ai loro assi di rotazione.

Nella pratica questa situazione si incontra raramente in quanto la sesta terna viene sempre posizionata in un punto significativo della struttura (fig. 8b); ad esempio in corrispondenza della flangia di attacco degli utensili o coincidente con la loro estremità operativa.

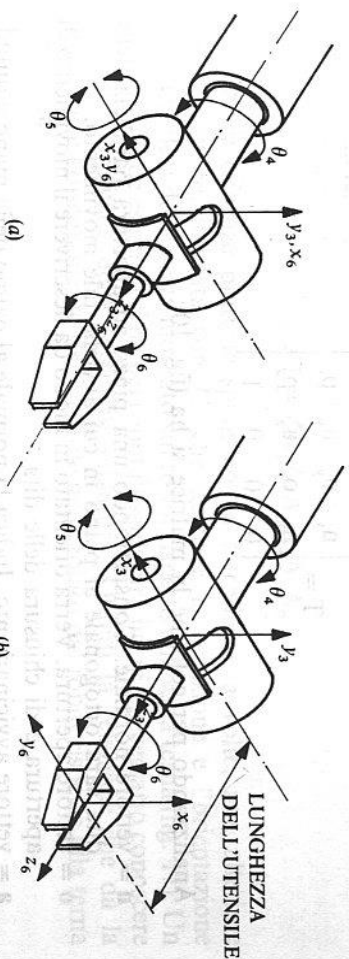


Fig. 8

Quando il polso non è sferico la  $T_o$  conterrà sempre una componente traslatoria risultato del movimento rotatorio dei giunti (fig. 9).

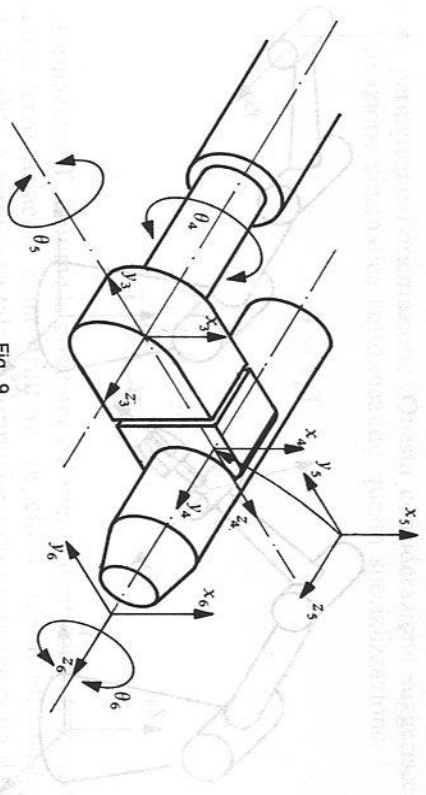


Fig. 9

La matrice  $T$  esprime la posizione e l'orientamento della sesta terna terma rispetto a quella di riferimento e quindi avrà la seguente forma:

$$T = \begin{bmatrix} i_{x6} & j_{x6} & k_{x6} & O_{6x} \\ i_{y6} & j_{y6} & k_{y6} & O_{6y} \\ i_{z6} & j_{z6} & k_{z6} & O_{6z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'intenso uso che si farà nel seguito di questa matrice consiglia tuttavia di utilizzare una formulazione più semplice:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analizzando per colonne la matrice si ha (fig. 10):

- n** = vettore normale. Considerando una pinza ad apertura parallela delle dita sarà ortogonale al piano in cui avviene tale movimento.
- o** = vettore apertura. Verrà orientato in modo da descrivere il movimento di apertura e di chiusura delle dita.
- a** = vettore avvicinamento. Indica la normale al palmo della mano e quindi la direzione con cui l'utensile di presa deve approssimare le parti da manipolare.
- p** = vettore posizione. Esprime la posizione dell'origine della sesta terna rispetto a quella di riferimento. In generale l'origine viene posizionata nel punto centrale della pinza quando le due dita sono completamente chiuse.

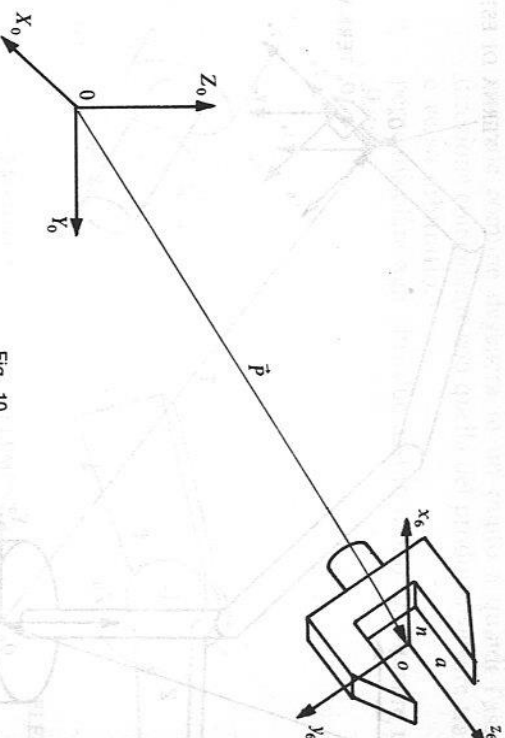


Fig. 10

Nella pratica risulta spesso conveniente adottare come terna di riferimento un sistema cartesiano diverso da  $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$ . Questa eventualità si presenta ad esempio quando si deve gestire un'isola robotizzata in cui operino contemporaneamente più macchine. In tali situazioni è evidente il vantaggio di riferire le posizioni di tutti gli oggetti e le operazioni ad essi relative ad un unico sistema di riferimento.

In questi casi, per descrivere la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto al nuovo riferimento costituito dalla terna B (base), bisognerà considerare una ulteriore trasformazione omogenea (fig. 11). Tale trasformazione, indicata nel seguito con  $Z$ , esprimerà posizione ed orientamento della terna  $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$  rispetto alla B. Quindi la sesta terna sarà identificata dalla trasformazione:

$$ZT = ZA_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

Sempre esigenze pratiche spingono ad introdurre, a volte, una ulteriore trasformazione, indicata con  $U$ , che descrive la posizione e l'orientamento dell'utensile o della pinza montato sul robot rispetto alla sesta terna (fig. 11). Un esempio di tale esigenza si ha nei robot di saldatura in cui è necessario conoscere il punto terminale della torcia di saldatura. Quindi la relazione che dà la posizione e l'orientamento dell'utensile manipolato dal robot rispetto alla terna base sarà:

$$ZTU = ZA_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 U$$

#### 5.4. Parametri caratteristici degli elementi della struttura

Le trasformazioni omogenee  $A_i$  descrivono la rototraslazione della generica terna  $i$ -esima rispetto alla  $i-1$ -esima. La loro ricerca è semplificata dall'utilizzo

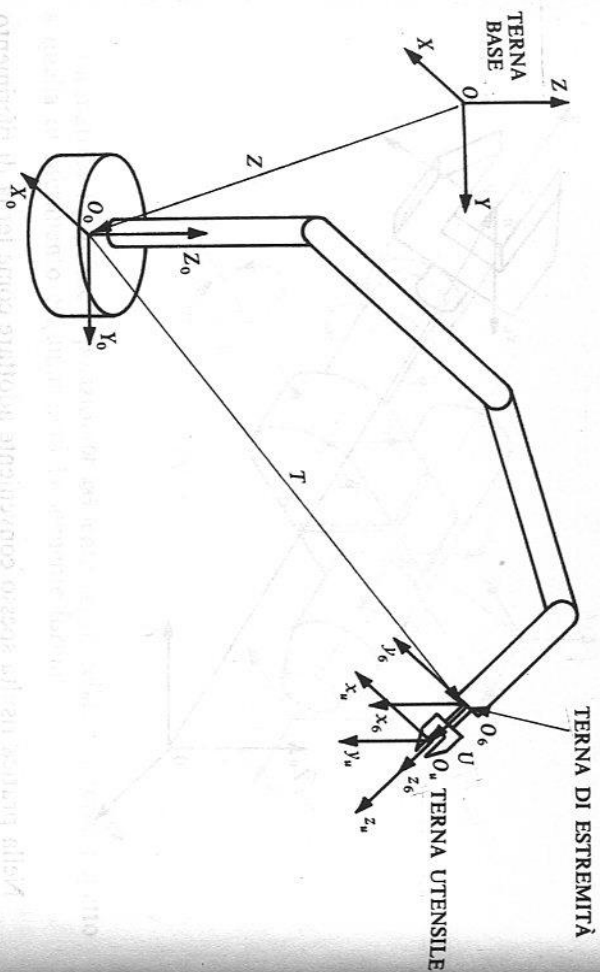


Fig. 11

della rappresentazione di Denavit e Hartenberg. Tale rappresentazione consiste in una matrice di trasformazione omogenea che permette di stabilire in modo sistematico la posizione e l'orientamento dei sistemi di riferimento solidali con i singoli elementi della struttura del robot.

Prima di utilizzare questa matrice è tuttavia utile ripercorrere la strada che ha portato alla sua formulazione.

Il primo passo è l'introduzione di alcune regole per la disposizione delle terne di riferimento.

Si considerino due elementi generici della struttura ( $i-1$  e  $i$ ) e il giunto che li collega ( $i$ ) che, in ambito industriale, potrà essere di tipo rotoidale (di torsione fig. 12a) o prismatico (fig. 13).

Ogni sistema di coordinate può essere ben definito utilizzando le seguenti regole (fig. 14):

origine - all'intersezione tra l'asse di rotazione del giunto  $i+1$  e la normale comune agli assi dei giunti  $i$  e  $i+1$ .

Si noti che la terna  $i$ -esima è quindi in corrispondenza del giunto  $i+1$ -esimo.

Quando i due assi di rotazione dei giunti  $i$  e  $i+1$  sono concorrenti l'origine andrà posizionata nel punto di incontro. Quando invece sono paralleli si sceglierà, tra le infinite normali comuni, quella che passa per la prima origine ben definita che si incontra avanzando nella catena cinematica.

asse  $z_i$  - coincidente con l'asse di rotazione del giunto  $i+1$ .

asse  $x_i$  - lungo il prolungamento della normale comune ed orientato in direzione opposta all'asse  $i-1$ .

Quando gli assi di rotazione dei giunti  $i$  e  $i-1$  sono concorrenti la

normale comune degenera in un punto e quindi l'asse  $x_i$  avrà direzione coincidente con quella del prodotto vettore tra  $z_{i-1}$  e  $z_1$  e verso arbitrario.

asse  $y_i$  - perpendicolare agli altri due assi in modo da ottenere una terna destra.

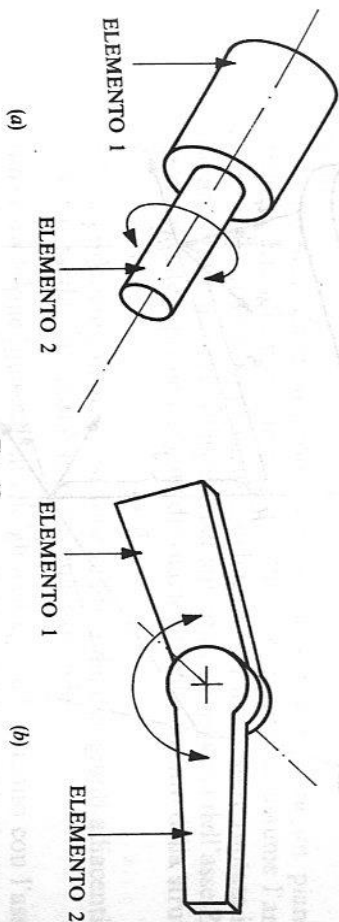


Fig. 12

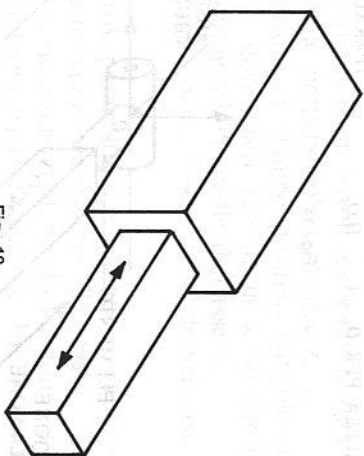


Fig. 13

Le regole sopra esposte sono facilmente estendibili ai giunti prismatici pur di sostituire all'asse di rotazione la direzione di traslazione. Tra le infinite rette aventi tale direzione si opterà per quella passante per la prima origine ben definita che si incontra avanzando nella catena cinematica (fig. 15).

La prima e l'ultima terna non possono essere completamente definite utilizzando le regole viste in quanto si trovano alle estremità della struttura. Per quanto riguarda la terna base (la prima) si conviene di posizionare l'origine in un opportuno punto appartenente all'asse di rotazione del primo giunto e di far coincidere quest'ultimo con l'asse  $Z_0$ . La disposizione degli assi  $X_0$  e  $Y_0$  è invece arbitraria.

Per la terna di estremità risulta conveniente posizionare l'origine in un opportuno punto dell'organo terminale e di orientare gli assi in modo che sia semplice descrivere rispetto ad essi le operazioni di lavoro (fig. 10).

Si considerino ora i due generici elementi della struttura di un robot riportati in fig. 14 con le relative terne.

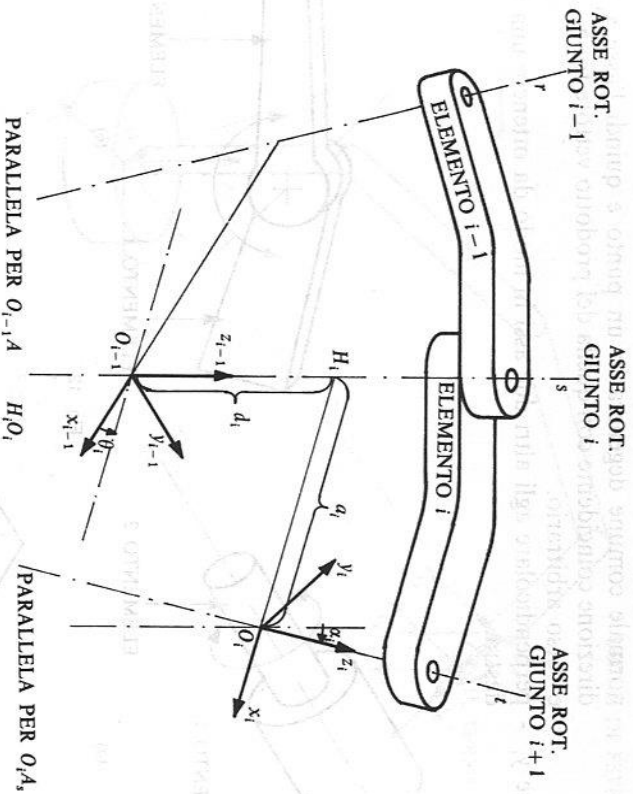


Fig. 14

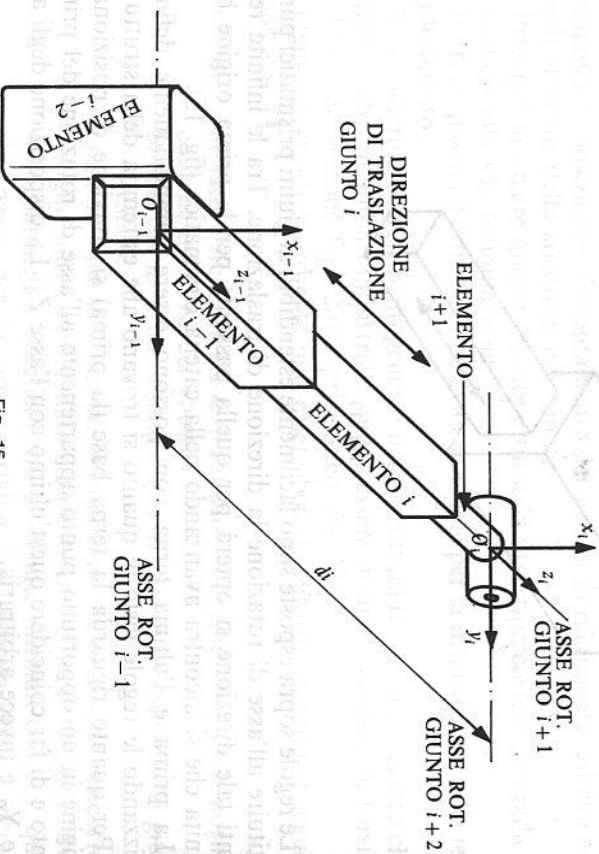


Fig. 15

La rappresentazione di Denavit e Hartenberg utilizza quattro parametri per descrivere la posizione e l'orientamento della  $i$ -esima terna rispetto alla  $i-1$ -esima.

La prima coppia descrive la geometria dell' $i$ -esimo elemento della struttura ed è costituita pertanto da due costanti.

Tali costanti sono:

$a_i$  - distanza dell'asse  $z_i$  da  $z_{i-1}$ . Tale distanza è la lunghezza della normale comune, cioè di quel segmento compreso tra i due assi e normale ad entrambi. Questa costante esprime la lunghezza dell'elemento della struttura.

$\alpha_i$  - angolo formato dalle proiezioni dei due assi  $z_i$  e  $z_{i-1}$  su un piano perpendicolare alla normale comune. Per convenzione si assume l'angolo positivo quando la proiezione dell'asse  $z_{i-1}$  deve essere ruotata in senso antiorario attorno all'asse  $x_i$  per sovrapporla a quella dell'asse  $z_i$ . Questa costante esprime l'angolo di rotazione dell'elemento della struttura.

La seconda coppia determina la posizione relativa dei due giunti adiacenti  $i$  ed  $i+1$  ed è formata da una costante e da una variabile.

$d_i$  - distanza tra le due intersezioni che gli assi  $x_{i-1}$  ed  $x_i$  hanno con l'asse  $z_{i-1}$ . Tale parametro risulta essere variabile nel caso in cui il giunto  $i$  sia di tipo prismatico;

$\theta_i$  - angolo formato dalla proiezione delle due normali comuni (assi  $x_{i-1}$  ed  $x_i$ ) su un piano perpendicolare all'asse  $z_{i-1}$ .

Per convenzione si assume positivo l'angolo quando la proiezione dell'asse  $x_{i-1}$  deve essere ruotata in senso antiorario attorno all'asse  $z_{i-1}$  per sovrapporla a quella dell'asse  $x_i$ .

Tale parametro risulta essere variabile nel caso in cui il giunto  $i$  sia rotoidale.

Con questi quattro parametri si è in grado di rappresentare la posizione e l'orientamento della terna  $i$ -esima rispetto alla terna  $i-1$ -esima. Per semplificare la procedura che porta a scrivere la trasformazione omogenea relativa è utile introdurre la terna intermedia  $H_{i-1} - x'y'z'$  (fig. 16). Tale terna avrà l'origine nel punto di intersezione tra l'asse  $z_{i-1}$  e  $x_i$ , l'asse  $x'$  diretto come  $x_i$  e l'asse  $z'$  come  $z_{i-1}$ . Utilizzando le due costanti  $a_i$  ed  $\alpha_i$  che descrivono la geometria dell' $i$ -esimo elemento della struttura è possibile scrivere la trasformazione omogenea che permette di passare dalla terna  $O_{i-1} - x_i y_i z_i$  alla  $H_{i-1} - x'y'z'$ . Tale trasformazione sarà il risultato di una traslazione di  $a_i$  lungo l'asse  $x$  e di una rotazione di  $\alpha_i$  attorno all'asse  $x'$ :

$$H_i = \text{trasl}(a_i, 0, 0) \text{rot}(x', \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tramite i due parametri che descrivono la posizione relativa dei due giunti  $i-1$  ed  $i$  è possibile scrivere la trasformazione omogenea che permette di passare dalla terna  $H_{i-1} - x'y'z'$  alla  $O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ . Tale trasformazione è composta dalla traslazione  $d_i$  lungo l'asse  $z_{i-1}$  e dalla rotazione  $\theta_i$  attorno allo stesso asse.

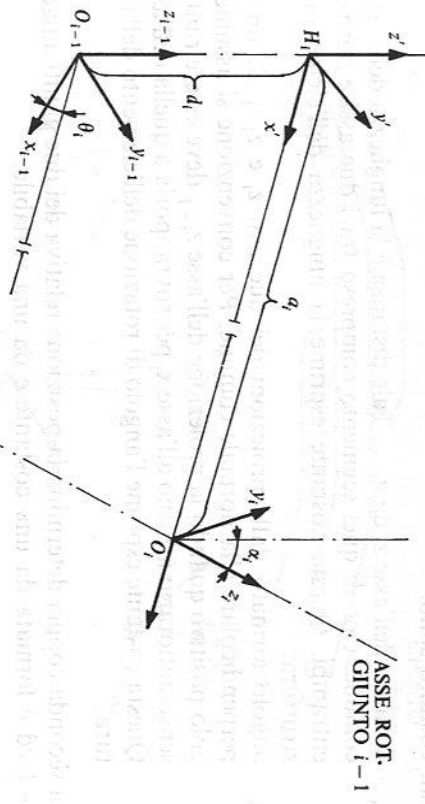


Fig. 16

$$H_i = \text{trasl}(0, 0, d_i) \text{rot}(z_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & 0 \\ S_i & C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione omogenea di Denavit e Hartenberg è data dal prodotto delle due matrici  $H_i$  ed  $H_{i-1}$ :

$$H_i H_{i-1} = A_i^{-1} = \begin{bmatrix} C_i & -S_i \cos \alpha_i & S_i \sin \alpha_i & a_i C_i \\ S_i & C_i \cos \alpha_i & -C_i \sin \alpha_i & a_i S_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per i giunti rotoidali la variabile di giunto è l'angolo  $\theta_i$  mentre per quelli prismatici è la lunghezza  $d_i$ .

Inoltre, quando il giunto i-esimo è prismatico, la costante  $a_i$  si annulla.

**5.5. Esempi di cinematica diretta**

Le fasi che permettono di ricavare l'equazione cinematica di un robot, indipendentemente dalla complessità della sua struttura, possono essere così riassunte:

- definire una terna base di riferimento e assegnare ad ogni elemento della struttura una terna secondo le regole precedentemente esposte. Pur seguendo il formalismo di Denavit e Hartenberg le terne possono essere

- disposte in molti modi diversi per cui uno stesso problema può essere risolto con più procedimenti equivalenti al fine del risultato finale;
- ricavare i parametri cinematici caratteristici per i giunti e per gli elementi della struttura;
- ricavare le trasformazioni omogenee  $A_i$  che mettono in relazione la terna i-esima con la i-1-esima;
- ottenere l'equazione cinematica moltiplicandole tra loro.

**5.5.1. Robot a due gradi di libertà**

Si consideri il robot a due gradi di libertà descritto nel par. 5.2 e riportato in fig. 4 e se ne determini l'equazione cinematica.

**TERNE DI RIFERIMENTO**

- $O_0 - X_0 Y_0 Z_0$  -  $O_0$ : intersezione tra  $Z_0$  e il piano in cui si muove il robot.  $X_0, Y_0$ : direzioni arbitrarie.
- $Z_0$ : coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto.
- $O_1 - X_1 Y_1 Z_1$  -  $O_1$ : intersezione tra  $z_1$  e il piano in cui si muove il robot.  $x_1$ : prolungamento della normale comune agli assi  $Z_0$  e  $z_1$  passante per  $O_0$ .
- $y_1$ : completa la terna destra.
- $z_1$ : coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.
- $O_2 - X_2 Y_2 Z_2$  -  $O_2$ : punto di chiusura della pinza del robot.
- $x_2$ : prolungamento del segmento  $O_1 O_2$ .
- $Y_2$ : completa la terna destra.
- $z_2$ : parallelo a  $Z_0$  e  $z_1$ .

**PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO**

Giunto	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$	Matr.
1	$\theta_1$	0	0	$l_1$	$A_1$
2	$\theta_2$	0	0	$l_2$	$A_2$

**MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H**

Sostituendo nella trasformazione di Denavit e Hartenberg i parametri cinematici e le variabili di giunto si ricavano le matrici  $A_1$  e  $A_2$  riportate nel par. 5.2.

**EQUAZIONE CINEMATICA**

$$\begin{aligned} n_x &= C_{12} \\ n_y &= S_{12} \\ n_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_x &= -S_{12} \\ O_y &= C_{12} \\ O_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= 0 \\ a_z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x &= l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ P_y &= l_2 S_{12} + l_1 S_1 \\ P_z &= 0 \end{aligned}$$

### 5.5.2. Robot cilindrico a tre gradi di libertà

Si consideri il robot cilindrico di fig. 17 e se ne determini l'equazione cinematica.

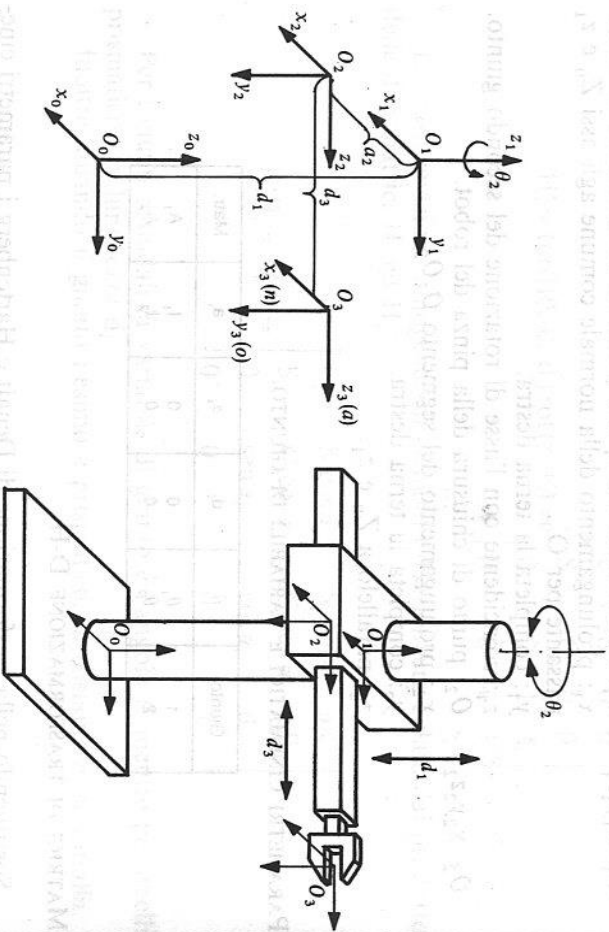


Fig. 17

### TERNE DI RIFERIMENTO

$O_0 - X_0 Y_0 Z_0 - O_0$ : un punto dell'asse di traslazione del primo giunto coincidente con quello di rotazione del secondo.

$X_0, Y_0$ : direzioni arbitrarie.

$$O_1 - X_1 Y_1 Z_1$$

$$O_2 - X_2 Y_2 Z_2$$

$$O_3 - X_3 Y_3 Z_3$$

- $Z_0$ : coincidente con l'asse parallelo alla direzione di traslazione del primo giunto passante per  $O_0$ .  
 $O_1$ : intersezione tra  $z_1$  e la normale comune con la retta parallela alla direzione di traslazione del terzo giunto passante per  $O_3$ .  
 $x_1, y_1$ : coincidenti con  $X_0, Y_0$  quando  $d_1 = 0$ .  
 $z_1$ : coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.  
 $O_2$ : intersezione tra  $z_2$  e la normale comune a  $z_1$ .  
 $x_2$ : normale al piano individuato da  $z_1$  e  $z_2$ .  
 $y_2$ : completa la terna destra.  
 $z_2$ : coincidente con la retta parallela alla direzione di traslazione del terzo giunto passante per  $O_3$ .  
 $O_3$ : punto di chiusura della pinza del robot.  
 $x_3$ : coincidente con il vettore normale della pinza.  
 $y_3$ : coincidente con il vettore apertura.  
 $z_3$ : coincidente con il vettore avvicinamento.

### PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$	Matr.
1	0	$d_1$	0	0	$A_1$
2	$\theta_2$	0	-90	$a_2$	$A_2$
3	0	$d_3$	0	0	$A_3$

### MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2 C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2 S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EQUAZIONE CINEMATICA

$$\begin{aligned} n_x &= C_2 \\ n_y &= S_2 \\ n_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_x &= 0 \\ o_y &= 0 \\ o_z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x &= -S_2 \\ a_y &= C_2 \\ a_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x &= -d_3 S_2 + a_2 C_2 \\ p_y &= d_3 C_2 + a_2 S_2 \\ p_z &= d_1 \end{aligned}$$

Esempio

Dato il robot di fig. 17, calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$$\begin{aligned} d_1 &= 500 \text{ mm} \\ \theta_2 &= 30^\circ \\ d_3 &= 400 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$a_2 = 100 \text{ mm}$$

sapendo che:

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terra di estremità rispetto al riferimento:

$$T = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} .866 & 0 & -.500 & -113.4 \\ .500 & 0 & .866 & 396.4 \\ 0 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato disegnando la configurazione della struttura corrispondente ai dati del problema.

5.5.3 Robot antropomorfo a tre gradi di libertà

Si consideri il robot antropomorfo di fig. 18 e se ne determini l'equazione cinematica.

TERNE DI RIFERIMENTO

$O_0 - X_0 Y_0 Z_0$  -  $O_0$ : intersezione tra  $Z_0$  e  $Z_1$ .

$X_0, Y_0$ : direzioni arbitrarie.

$Z_0$ : coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto.

$O_1 - X_1 Y_1 Z_1$  -  $O_1$ : coincidente con  $O_0$ .

$X_1$ : normale al piano individuato da  $Z_0$  e  $z_1$ .

$Y_1$ : completa la terna destra.

$Z_1$ : coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

$O_2 - X_2 Y_2 Z_2$  -  $O_2$ : intersezione tra  $z_2$  e la normale comune a  $z_1$  passante per  $O_1$ .

$X_2$ : prolungamento della normale comune.

$Y_2$ : completa la terna destra.

$Z_2$ : coincidente con l'asse di rotazione del terzo giunto.

$O_3 - X_3 Y_3 Z_3$  -  $O_3$ : coincidente con  $O_2$ .

$X_3$ : coincidente con il vettore normale della pinza.

$Y_3$ : coincidente con il vettore apertura.

$Z_3$ : coincidente con il vettore avvicinamento.

Intuitivamente si sarebbe tentati di sistemare l'origine di questa terna in corrispondenza del punto di chiusura della pinza. Questa sistemazione non è tuttavia compatibile con la metodologia di Denavit e Hartenberg in quanto i quattro parametri non sarebbero sufficienti per descrivere la posizione della terza terna rispetto alla terna precedente. In particolare, per portare a coincidere le due origini, sarebbe necessario traslare  $O_3$  lungo l'asse  $z_3$ , movimento non permesso dal formalismo adottato.

La posizione della pinza ( $P$  in fig. 18), detta  $l_2$  la distanza tra  $P$  ed  $O_3$  può essere calcolata come segue:

$$\begin{aligned} P_x &= p_x + l_2 a_x \\ P_y &= p_y + l_2 a_y \\ P_z &= p_z + l_2 a_z \end{aligned}$$

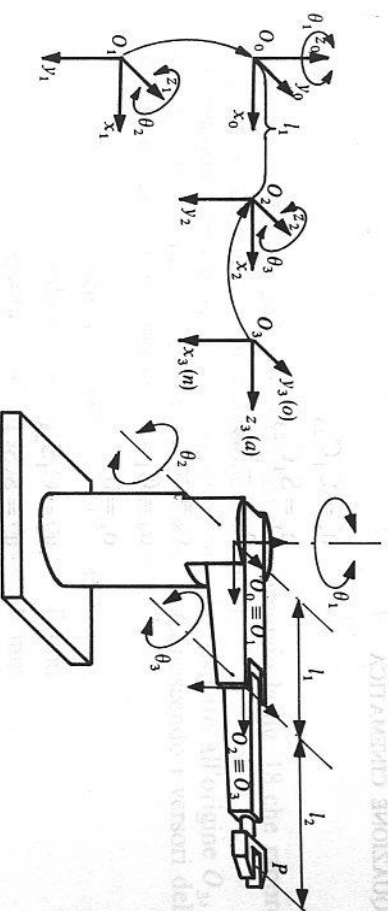


Fig. 18

Infatti P si trova sul prolungamento in direzione positiva dell'asse  $z_3$ , di cui si conoscono i coseni direttori  $a_x, a_y, a_z$ .

L'orientamento è invece determinato dalla conoscenza di quello della terza terna.

#### PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$	Matr.
1	$\theta_1$	0	-90	0	$A_1$
2	$\theta_2$	0	0	$l_1$	$A_2$
3	$\theta_3$	0	90	0	$A_3$

#### MATRICI DI TRASFORMAZIONE C-H

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_1 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### EQUAZIONE CINEMATICA

$$n_x = C_1 C_{23}$$

$$n_y = S_1 C_{23}$$

$$n_z = -S_{23}$$

$$o_x = -S_1$$

$$o_y = C_1$$

$$o_z = 0$$

$$a_x = C_1 S_{23}$$

$$a_y = S_1 S_{23}$$

$$a_z = C_{23}$$

$$\begin{aligned} p_x &= l_1 C_1 C_2 \\ p_y &= l_1 S_1 C_2 \\ p_z &= -l_1 S_2 \end{aligned}$$

La posizione della pinza è data da:

$$\begin{aligned} P_x &= l_1 C_1 C_2 + l_2 C_1 S_{23} \\ P_y &= l_1 S_1 C_2 + l_2 S_1 S_{23} \\ P_z &= -l_1 S_2 + l_2 C_{23} \end{aligned}$$

#### Esempio

Dato il robot di fig. 18, calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0^\circ \\ \theta_2 &= 0 \\ \theta_3 &= 90^\circ \end{aligned}$$

sapendo che:

$$\begin{aligned} l_1 &= 600 \\ l_2 &= 500 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione cinematica, si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terza terna rispetto al riferimento:

$$T = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato osservando la fig. 18 che rappresenta il robot con questa configurazione dei giunti.

La posizione del centro pinza sarà un punto che, rispetto all'origine  $O_3$ , è traslato di 500 mm nel verso positivo dell'asse  $z_3$ . Conoscendo i versori delle coordinate di tale punto possono essere calcolate:

$$\begin{aligned} \text{ascissa} &\rightarrow 600 + 1 * 500 = 1100 \text{ mm} \\ \text{ordinata} &\rightarrow 0 + 0 * 0 = 0 \text{ mm} \\ \text{quota} &\rightarrow 0 + 0 * 0 = 0 \text{ mm} \end{aligned}$$

L'orientamento della pinza è definito dai versori degli assi della terza terna.

## 5.5.4. Polso sferico

Si consideri il polso sferico di fig. 19 e se ne determini l'equazione cinematica.

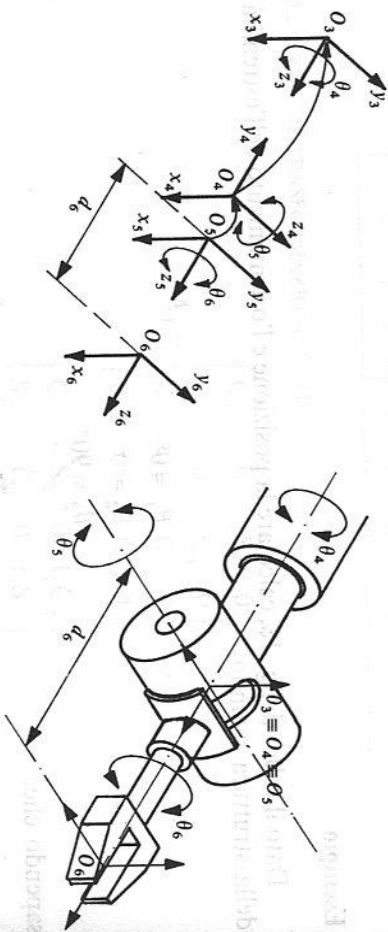


Fig. 19

## TERNE DI RIFERIMENTO

Il polso viene normalmente collocato a valle dei tre giunti principali per permettere al robot di orientare correttamente gli oggetti. Per questo si considererà come terna di riferimento la  $O_3-x_3y_3z_3$  mentre le successive avranno indice crescente, così come le variabili di giunto che saranno indicate con  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ .

$O_3-x_3y_3z_3 - O_3$ : intersezione degli assi di rotazione dei giunti.

$x_3, y_3$ : direzioni arbitrarie.

$z_3$ : coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto del polso.

$O_4-x_4y_4z_4 - O_4$ : coincidente con  $O_3$ .

$x_4$ : normale al piano individuato da  $z_3$  e  $z_4$ .

$y_4$ : completa la terna destra.

$z_4$ : coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto del polso.

$O_5-x_5y_5z_5 - O_5$ : coincidente con  $O_3$ .

$x_5$ : normale al piano individuato da  $z_4$  e  $z_5$ .

$y_5$ : completa la terna destra.

$z_5$ : coincidente con l'asse di rotazione del terzo giunto del polso.

$O_6-x_6y_6z_6 - O_6$ : punto di chiusura della pinza del robot.

$x_6$ : coincidente con il vettore normale della pinza.

$y_6$ : coincidente con il vettore apertura.

$z_6$ : coincidente con il vettore avvicinamento.

## PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO

Giunto polso	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$	Matr.
1	$\theta_4$	0	-90	0	$A_4$
2	$\theta_5$	0	90	0	$A_5$
3	$\theta_6$	$d_6$	0	0	$A_6$

## MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## EQUAZIONE CINEMATICA

$$n_x = C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6$$

$$n_y = S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6$$

$$n_z = -S_5 C_6$$

$$o_x = -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6$$

$$o_y = -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6$$

$$o_z = S_5 S_6$$

$$a_x = C_4 S_5$$

$$a_y = S_4 S_5$$

$$a_z = C_5$$

$$p_x = d_6 C_4 S_5$$

$$p_y = d_6 S_4 S_5$$

$$p_z = d_6 C_5$$

**Esempio**

Dato il polso di fig. 19, calcolare la posizione e l'orientamento della sua terna di estrema quando:

$$\begin{aligned}\theta_4 &= 0^\circ \\ \theta_5 &= 0^\circ \\ \theta_6 &= 0^\circ\end{aligned}$$

sapendo che:

$$d_6 = 150 \text{ mm}$$

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estrema rispetto a quella di riferimento:

$$T = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato immediatamente facendo riferimento alla fig. 19.

**5.5.5. Robot a sei gradi di libertà**

Questo esempio è da ritenersi facoltativo ai fini del completamento del programma didattico e va considerato come uno strumento di approfondimento.

Il calcolo della cinematica diretta per un robot a sei gradi di libertà permette di padroneggiare praticamente tutte le strutture dei robot industriali.

Tale calcolo presenta delle complicazioni, rispetto agli esempi finora sviluppati, solo di natura quantitativa e, come tali, facilmente superabili, pur di porre la dovuta attenzione nella sua esecuzione.

In precedenza si è sottolineato come i sei giunti di un robot possano essere distinti in un primo gruppo di tre che servono a posizionare gli oggetti nello spazio seguiti dagli altri che si incaricano della loro orientazione.

Per questo si sono sviluppati degli esempi di strutture a tre gradi di libertà specializzate nel posizionamento (robot cilindrico e articolato) e nell'orientamento (polso sferico).

Unendo in cascata una struttura di posizionamento ed una di orientamento si realizza un robot completo a sei gradi di libertà.

Utilizzando la struttura cilindrica sarà sufficiente sovrapporre le due terne  $O_3-X_3Y_3Z_3$ , quella del robot e quella del polso. Le relazioni della cinematica diretta potranno essere ottenute moltiplicando tra loro quelle di posizionamento e di orientazione.

Utilizzando la struttura antropomorfa si incontra qualche difficoltà ulteriore perché, oltre a sovrapporre le due terne  $O_3-X_3Y_3Z_3$ , bisognerà traslare la quarta lungo l'asse  $z_3$  fino a portare  $O_4$  a coincidere con P.

Per meglio spiegare questa operazione si svilupperà in dettaglio la cinematica diretta per un robot articolato a sei gradi di libertà.

**TERNE DI RIFERIMENTO**

La disposizione delle terne di riferimento può essere realizzata ricordando i par. 5.5.3 e 5.5.4, mentre la separazione che va introdotta tra la terza e la quarta terna del polso può essere compresa facendo riferimento alla fig. 20.

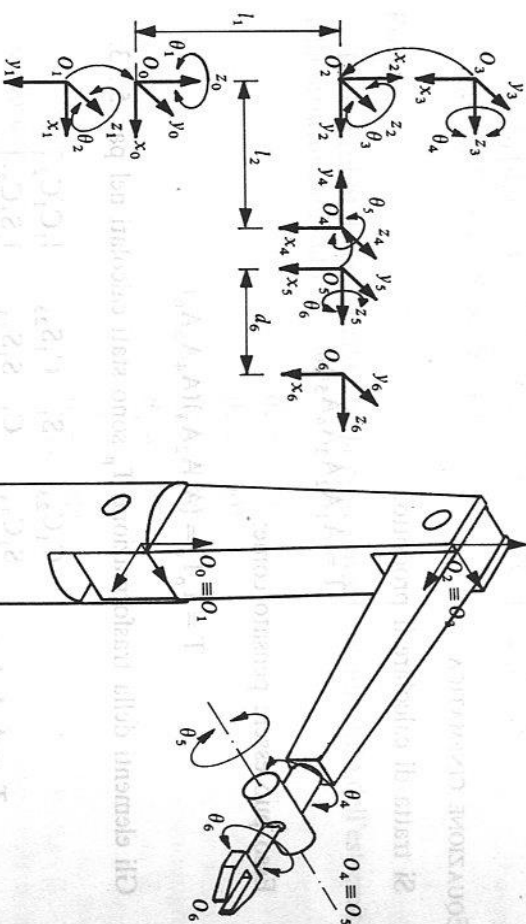


Fig. 20

**PARAMETRI CINEMATICI E VARIABILI DI GIUNTO**

Giunto	$\theta_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$a_i$	Matr.
1	$\theta_1$	0	-90	0	$A_1$
2	$\theta_2$	0	0	0	$A_2$
3	$\theta_2$	0	90	$l_1$	$A_3$
4	$\theta_4$	$l_2$	-90	0	$A_4$
5	$\theta_5$	0	90	0	$A_5$
6	$\theta_6$	$d_6$	0	0	$A_6$

## MATRICI DI TRASFORMAZIONE D-H

Le matrici di trasformazione sono quelle riportate nei par. 5.5.3 e 5.5.4. L'unico cambiamento riguarda la trasformazione  $A_4$  che ora dovrà contenere anche la componente traslatoria prima introdotta:

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## EQUAZIONE CINEMATICA

Si tratta di calcolare il prodotto:

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

Esso può essere pensato come:

$$T = T_p T_o = (A_1 A_2 A_3)(A_4 A_5 A_6)$$

Gli elementi della trasformazione  $T_p$  sono stati calcolati nel par. 5.5.3:

$$T_p = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & l_1 C_1 C_2 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & l_1 S_1 C_2 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -l_1 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mentre quelli di  $T_o$  devono essere ricalcolati in quanto nella trasformazione  $A_4$  è stata introdotta una traslazione. In particolare la componente di orientazione rimarrà quella calcolata nel par. 5.5.4, mentre varierà quella di traslazione:

$$T_o = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eseguendo il prodotto tra le due matrici si ottiene l'equazione cinematica per il robot a sei gradi di libertà:

$$\begin{aligned} n_x &= C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_y &= S_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_z &= -S_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_{23} S_5 C_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_x &= C_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \\ o_y &= S_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] + C_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \\ o_z &= S_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x &= C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5 \\ a_y &= S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5 \\ a_z &= C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x &= C_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + l_2 S_{23} + l_1 C_2] - d_6 S_1 S_4 S_5 \\ p_y &= S_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + l_2 S_{23} + l_1 C_2] + d_6 C_1 S_4 S_5 \\ p_z &= d_6 (C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + C_{23} l_2 - S_2 l_1 \end{aligned}$$

## Esempio

Dato il robot di fig. 20 calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0^\circ \\ \theta_2 &= -90^\circ \\ \theta_3 &= 180^\circ \\ \theta_4 &= 0^\circ \\ \theta_5 &= 0^\circ \\ \theta_6 &= 0^\circ \end{aligned}$$

sapendo che:

$$\begin{aligned} l_1 &= 600 \text{ mm} \\ l_2 &= 500 \text{ mm} \\ d_6 &= 150 \text{ mm} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto al riferimento:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 650 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato osservando la fig. 20 che rappresenta il robot con questa configurazione dei giunti.

CAPITOLO SESTO

CINEMATICA INVERSA

Introduzione

La posizione e l'orientamento di un oggetto manipolato da un robot dipendono dalle caratteristiche geometriche della sua struttura e dalla configurazione dei suoi giunti.

Assai meno evidente è il procedimento, noto sotto il nome di cinematica inversa, con cui determinare quale configurazione deve assumere la struttura affinché l'oggetto manipolato assuma la posizione ed l'orientamento desiderati.

Dopo un inquadramento qualitativo della cinematica inversa si risolve il problema per un robot a due gradi di libertà e si introduce la funzione trigonometrica inversa ATAN2(x, y).

Si affronta quindi teoricamente la cinematica inversa per una struttura a sei gradi di libertà per terminare con una serie di esempi di complessità graduata con cui verificare le conoscenze apprese.

Il capitolo si conclude con una introduzione alle metodologie di controllo delle traiettorie del robot.

6.1 Cinematica inversa

La cinematica inversa affronta il problema statico della ricerca delle relazioni per il calcolo delle variabili di giunto, date la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura dei robot e i parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti (fig. 1).

Dati una certa posizione e un certo orientamento della terna di estremità della struttura, si tratta di calcolare tutti i possibili insiemi di variabili di giunto che permettono di ottenerli.

I parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti vengono definiti durante la modellizzazione della struttura e, per ogni grado di libertà del robot, si avranno tre costanti e una variabile. La posizione e l'orientamento della estremità della struttura dipendono dal valore che le variabili di giunto assumono di volta in volta.

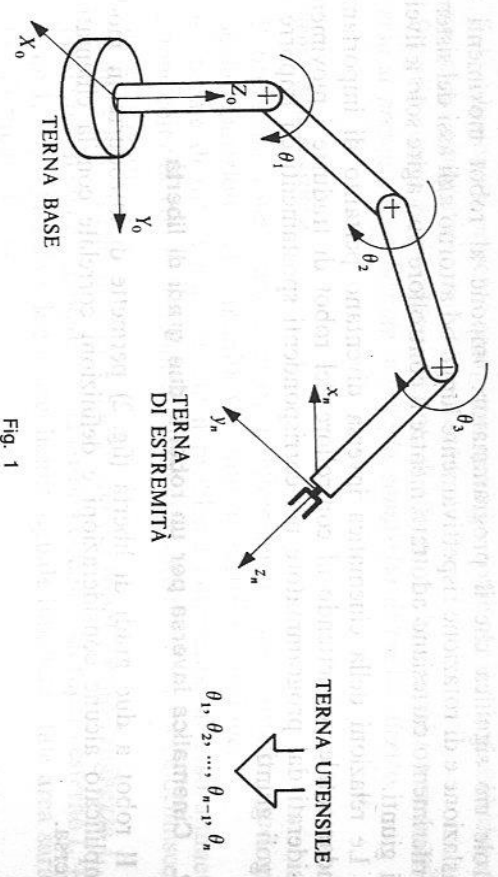


Fig. 1

Nella pratica, la cinematica inversa utilizza come dati di partenza i valori degli elementi della matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \rightarrow \begin{matrix} (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) & \leftarrow & \text{soluzione 1} \\ (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) & \leftarrow & \text{soluzione 2} \\ \dots & \dots & \dots \\ (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) & \leftarrow & \text{soluzione k} \end{matrix}$$

e ricava i valori delle variabili di giunto corrispondenti:

Con  $q_i$  si intende la generica variabile che sarà un angolo ( $\theta_i$ ) od una traslazione ( $d_i$ ) in funzione del tipo di giunto corrispondente.

Nel par. 5.1 si è visto come la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura del robot possano essere espressi sia nello spazio cartesiano (tramite la matrice T) sia in quello dei giunti (tramite le variabili di giunto). La cinematica diretta trasforma un punto dello spazio dei giunti nella corrispondente posizione ed orientamento della terna di estremità; quella inversa al contrario, data la posizione e l'orientamento della terna di estremità, determina tutti i punti corrispondenti nello spazio dei giunti.

Nelle applicazioni pratiche la cinematica inversa è di gran lunga più importante di quella diretta.

Il programmatore ragiona infatti nello spazio tridimensionale cartesiano, mentre il controllo elettronico del robot opera in quello dei giunti. In altre

parole ciò significa che il programmatore impone al robot movimenti di traslazione e di rotazione rispettivamente lungo od attorno agli assi del sistema di riferimento cartesiano adottato mentre il controllore può agire solo a livello dei giunti.

Le relazioni della cinematica inversa diventano pertanto di importanza fondamentale permettendo al controllore del robot di tradurre i movimenti desiderati dal programmatore nei corrispondenti spostamenti da imporre ai singoli giunti.

## 6.2. Cinematica inversa per un robot a due gradi di libertà

Il robot a due gradi di libertà (fig. 2) permette di introdurre in modo semplificato alcune considerazioni e definizioni correlate con la cinematica inversa.

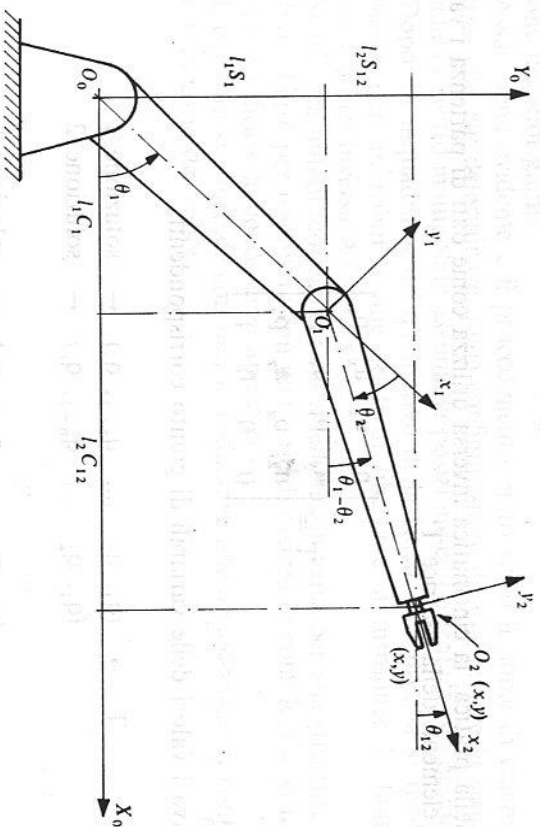


Fig. 2

Il problema cinematico inverso per un robot a due gradi di libertà è quello di ricavare i valori delle variabili di giunto che permettono di posizionare l'estremità della struttura ( $O_2$ ) nella posizione specificata dalle coordinate  $x, y$ . Si tratta di risolvere le seguenti equazioni cinematiche:

$$x = f(q_1, q_2)$$

$$y = f(q_1, q_2)$$

esplicitando le variabili del giunto:

$$q_1 = f(x, y)$$

$$q_2 = f(x, y)$$

Tale soluzione si presenta complessa quando, come per il robot considerato, le equazioni cinematiche non sono lineari.

Proprio questa motivazione consente di affermare che il **problema cinematico inverso** si presenta di **soluzione molto più complessa di quello diretto**.

### Esistenza della soluzione

Il problema cinematico inverso, a differenza di quello diretto, può, per particolari posizioni dell'estremità  $O_2$ , non ammettere soluzione.

L'insieme di tutti i punti in cui il problema cinematico inverso ammette soluzione coincide con la porzione di piano raggiungibile dal robot e definisce la sua area di lavoro.

La fig. 3 mostra che, quando i due bracci del robot hanno lunghezza  $l_1, l_2$  diverse, l'area di lavoro coincide con la corona circolare di raggio esterno  $l_1 + l_2$  e interno  $l_1 - l_2$ . Quando i due bracci hanno uguale lunghezza tale area sarà il cerchio di raggio  $l_1 + l_2$ .

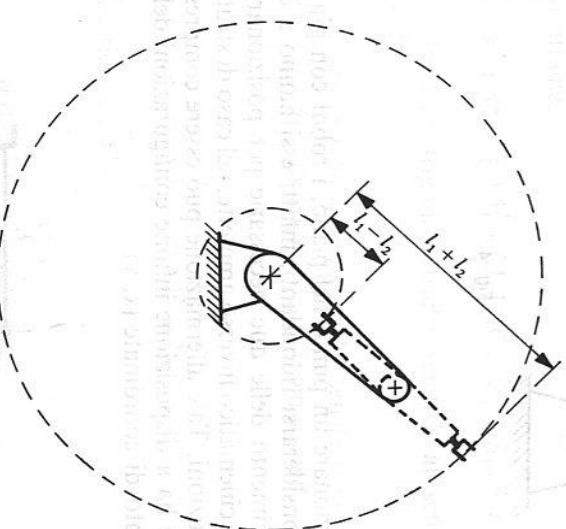


Fig. 3

Quanto detto vale nell'ipotesi di giunti ideali che permettono rotazioni di  $360^\circ$ . Nella realtà i giunti permettono raramente rotazioni così ampie e ciò provoca una riduzione dell'estensione dell'area di lavoro.

### Moltiplicità della soluzione

Il problema cinematico inverso molto spesso ammette più di una soluzione nel senso che possono esistere più configurazioni della struttura che portano la sua estremità nella medesima posizione. Si consideri ad esempio la fig. 4 in cui si

vede come la pinza possa essere portata nello stesso punto di coordinate  $(x, y)$  con due diverse coppie di valori per le variabili di giunto.

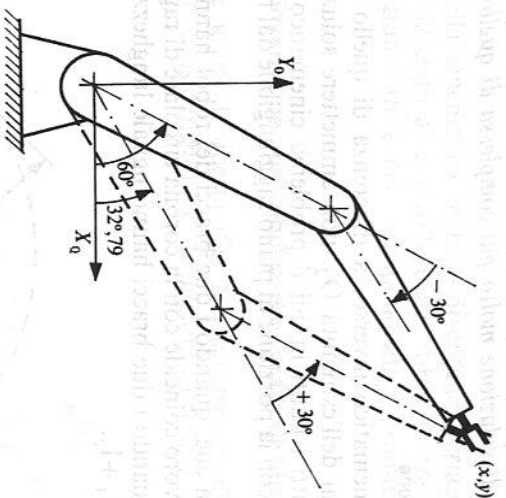


Fig. 4

### Strutture ridondanti

Al fine di posizionare un punto nel piano, i robot con più di due gradi di libertà sono da considerarsi ridondanti; infatti essi hanno a disposizione più possibilità di movimento delle due necessarie per posizionare un punto nel piano. Il problema cinematico inverso ammette, nel caso di strutture ridondanti, una infinità di soluzioni. Tale affermazione può essere compresa osservando il robot di fig. 5 che ha a disposizione infinite configurazioni della struttura per raggiungere il punto di coordinate  $(x, y)$ .

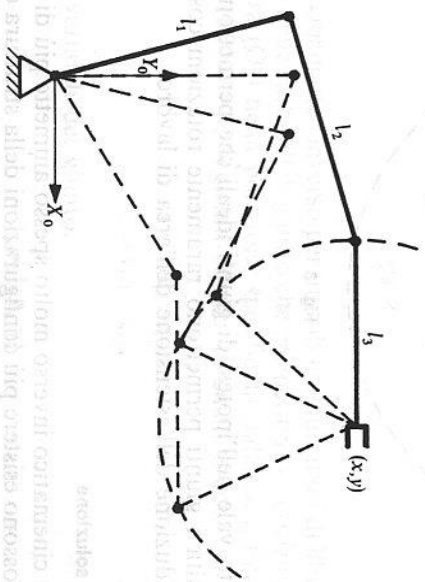


Fig. 5

### Cinematica inversa

Le equazioni cinematiche del robot considerato sono (cfr. par. 5.2):

$$\begin{aligned}x &= l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\y &= l_2 S_{12} + l_1 S_1\end{aligned}$$

Risolvere il problema cinematico inverso significa esplicitare le variabili  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= f(x, y) \\ \theta_2 &= f(x, y)\end{aligned}$$

ottenendo in tal modo due relazioni che, per ogni posizione  $x, y$  occupata dalla pinza, permettano di determinare gli angoli di rotazione  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dei rispettivi giunti.

Si cominci con l'esplicitare  $\theta_2$ . Elevando al quadrato e quindi sommando le due equazioni di ottiene:

$$x^2 + y^2 = l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 (C_{12} C_1 + S_{12} S_1)$$

Applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

si ottiene:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C_2$$

da cui è possibile ricavare  $C_2$  e  $S_2$ :

$$\begin{aligned}C_2 &= \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \\ S_2 &= \pm \sqrt{1 - C_2^2}\end{aligned}$$

Utilizzando le funzioni trigonometriche inverse, si risale ai due possibili valori di  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned}\theta_{2a} &= \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) && \text{prima soluzione} \\ \theta_{2b} &= -\theta_{2a} && \text{seconda soluzione}\end{aligned}$$

I valori di  $\theta_1$ , noti  $C_2$  ed  $S_2$ , si determinano applicando le formule trigono-

metriche relative al seno e coseno della somma di due archi, alle equazioni cinematiche ottenendo:

$$\begin{aligned}x &= l_2(C_1C_2 - S_1S_2) + l_1C_1 \\y &= l_2(S_1C_2 + C_1S_2) + l_1S_1\end{aligned}$$

Ricavando  $C_1$  dalla prima equazione

$$C_1 = \frac{x + l_2S_1S_2}{l_2C_2 + l_1}$$

e sostituendo nella seconda, dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene  $S_1$ :

$$S_1 = \frac{y(l_2C_2 + l_1) - l_2xS_2}{(l_1 + l_2C_2)^2 + l_2^2S_2^2}$$

Sostituendo nell'equazione i due possibili valori di  $S_2$  e quello di  $C_2$ , si ricavano i corrispondenti valori di  $S_1$ : noti questi è possibile calcolare anche  $C_1$  e quindi risalire al valore di  $\theta_1$ , utilizzando le funzioni trigonometriche inverse.

### Esempio

Dato il robot di fig. 4, calcolare il valore delle due variabili di giunto  $\theta_1$  e  $\theta_2$  quando:

$$x = 733,013$$

$$y = 769,615$$

sapendo che:

$$l_1 = 600$$

$$l_2 = 500$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$C_2 = \frac{733,013^2 + 769,615^2 - 600^2 - 500^2}{2 \cdot 600 \cdot 500} = 0,866$$

$$S_2 = \sqrt{(1 - 0,866^2)} = + / - 0,500$$

da cui si ricavano i due possibili valori di  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = + / - 30^\circ$$

È ora possibile ricavare i due valori di  $\theta_1$ .

Quando  $\theta_2 = -30^\circ$ :

$$S_1 = \frac{769,615 \cdot (500 \cdot 0,866 + 600) - 500 \cdot 733,013 \cdot (-0,5)}{(600 + 500 \cdot 0,866)^2 + (500 \cdot (-0,5))^2} = 0,866$$

$$C_1 = \frac{733,013 + 500 \cdot 0,866 \cdot (-0,5)}{500 \cdot 0,866 + 600}$$

$$\theta_1 = 60^\circ$$

Quando  $\theta_2 = 30^\circ$

$$\begin{aligned}S_1 &= 0,542 \\C_1 &= 0,840\end{aligned}$$

$$\theta_1 = 32,79^\circ$$

Le due coppie di angoli che permettono di portare l'estremità della struttura nel punto indicato sono:

$$\begin{array}{ll} \theta_1^1 = 60^\circ & \theta_2 = -30^\circ & \text{prima soluzione} \\ \theta_1 = 32,79^\circ & \theta_2 = 30^\circ & \text{seconda soluzione} \end{array}$$

### 6.3. La funzione ATAN2

La risoluzione del problema cinematico inverso comporta un pesante utilizzo delle funzioni trigonometriche inverse.

Questa necessità si scontra col fatto che le funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente) non ammettono funzione inversa univoca. Infatti, rappresentando in ascissa gli angoli e in ordinata il valore della funzione (fig. 6) si vede come, per tutte e tre, ad ogni valore di  $y$  corrispondono infiniti angoli.

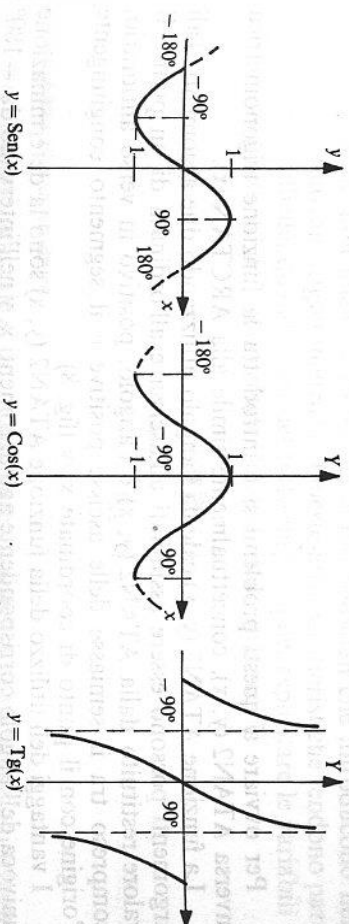


Fig. 6

Nell'ambito della robotica l'intervallo di variazione interessante per le variabili di giunto angolari è limitato a quello compreso tra  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ , in quanto rotazioni di un angolo giro non modificano la configurazione della struttura.

Rimane comunque il fatto che, anche all'interno di questo modesto intervallo, dato un valore della funzione trigonometrica è impossibile risalire in modo univoco all'angolo. Per individuare l'angolo è infatti necessario conoscere i valori di due funzioni trigonometriche. Ad esempio, conoscendo il seno e il coseno, si riesce a ricavare, rimanendo all'interno del campo stabilito, in modo univoco l'angolo.

Le funzioni trigonometriche inverse (ARCSEN (x), ARCCOS (x), ARCTAN (x)) oltre alla non univocità presentano anche il problema dell'accuratezza con cui determinano gli angoli.

La funzione ARCCOS (x) (fig. 7a) ha una tangente verticale quando l'angolo assume i valori  $-180^\circ$ ,  $0^\circ$  e  $180^\circ$  e, in tali zone, l'accuratezza con cui fornisce l'angolo è scarsa.

La funzione ARCSEN (x) (fig. 7b) presenta identico problema quando l'angolo vale  $-90^\circ$  o  $90^\circ$ .

La funzione ARCTAN (x) (fig. 7c) non è definita quando l'angolo vale  $-90^\circ$  o  $90^\circ$  e, per i valori nell'intorno di questi, non garantisce una sufficiente accuratezza.

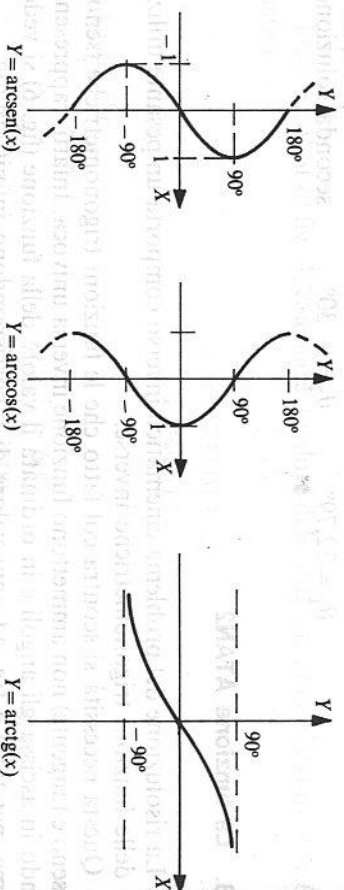


Fig. 7

Per ovviare a questi problemi si è introdotta la funzione trigonometrica inversa ATAN2 (y, x), concettualmente simile alla ARCTAN (x).

La funzione ATAN2 (y, x) calcola l'angolo utilizzando due argomenti. Tali argomenti possono essere assimilati all'ascissa e all'ordinata di un punto. Il valore restituito dalla ATAN2 (y, x) è l'angolo, positivo in verso antiorario, compreso tra il semiasse delle ascisse positive e il segmento congiungente l'origine con il punto di coordinate x, y (fig. 8).

I vantaggi dell'utilizzo della funzione ATAN2 (y, x) sono la determinazione univoca dell'angolo corrispondente agli argomenti x, y nell'intervallo da  $-180^\circ$  a  $180^\circ$  e l'accuratezza uniforme in tutto il campo di definizione.

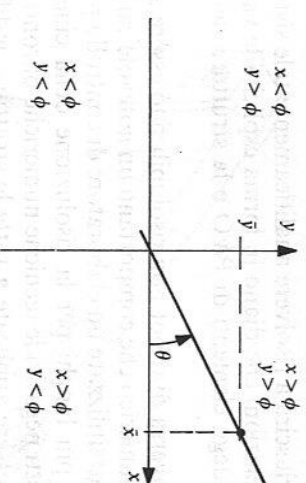


Fig. 8

#### 6.4. Cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà

La cinematica inversa di un robot a sei gradi di libertà si presenta in genere complessa poiché le difficoltà segnalate nel paragrafo 6.2. vengono aumentate dal maggior numero di variabili di giunto.

Le equazioni cinematiche si presentano nella forma:

$$T = f(q_1, q_2, \dots, q_5, q_6)$$

dove con T si indica la trasformazione omogenea che descrive la posizione e l'orientamento della terra di estremità della struttura rispetto a quella di riferimento.

Uguagliando la matrice T con quella di riferimento P&O i cui elementi descrivono una particolare posizione ed orientamento della terra di estremità, si ottengono le dodici equazioni da cui partire per risolvere la cinematica inversa:

$$\begin{array}{ll} n_x = P\&O [1, 1] & n_y = P\&O [2, 1] & n_z = P\&O [3, 1] \\ o_x = P\&O [1, 2] & o_y = P\&O [2, 2] & o_z = P\&O [3, 2] \\ a_x = P\&O [1, 3] & a_y = P\&O [2, 3] & a_z = P\&O [3, 3] \\ p_x = P\&O [1, 4] & p_y = P\&O [2, 4] & p_z = P\&O [3, 4] \end{array}$$

In generale queste equazione sono funzione di più di una variabile di giunto e si presentano non lineari a causa dei giunti rotoideali che introducono nella relazione le funzioni trigonometriche. Queste loro caratteristiche rendono particolarmente difficile, quando non del tutto impossibile, esplicitare le variabili di giunto in funzione dei valori degli elementi della matrice T:

$$\begin{array}{l} q_1 = f(P\&O) \\ \dots \\ q_6 = f(P\&O) \end{array}$$

#### Risolubilità di una struttura.

Nel caso più generale si dovrà risolvere un sistema di sei equazioni trigonometriche in seno e coseno in sei incognite, rappresentate dalle variabili di giunto.

Quando non si riuscirà a risolvere analiticamente tale sistema, sarà impossibile ottenere delle relazioni che diano in forma esplicita le variabili di giunto in funzione dei valori degli elementi di P&O e la struttura del robot verrà detta non risolvibile.

La cinematica inversa di robot non risolvibili può essere affrontata solo con tecniche di calcolo numerico che comportano un notevole carico computazionale. Questo costringe ad utilizzare un elaboratore di controllo più veloce e, spesso, ad accettare tempi più lunghi per la risoluzione della cinematica inversa. A fronte di questi aspetti negativi le tecniche numeriche offrono il non trascurabile vantaggio di poter essere applicate a tutte le strutture, indifferentemente dalle loro caratteristiche. Per questo è possibile prevedere in futuro una loro diffusione quando saranno disponibili calcolatori sufficientemente veloci da garantire il calcolo delle soluzioni in tempo reale.

Tuttavia, per ora, in ambito industriale si utilizzano praticamente solo strutture per le quali è possibile risolvere la cinematica inversa in modo esplicito.

Questa necessità ha spinto a ricercare quali caratteristiche debbano essere soddisfatte nella struttura affinché la sua cinematica inversa ammetta soluzioni esplicite.

*Condizione sufficiente affinché la struttura di un robot a sei gradi di libertà sia risolvibile è che gli assi di rotazione di tre giunti consecutivi si incontrino in uno stesso punto, per tutti i possibili valori delle variabili di giunto.*

Il punto d'incontro dei tre assi può anche essere improprio e quindi anche quando tre giunti rotoidali consecutivi hanno gli assi di rotazione paralleli la struttura sarà risolvibile.

Si ricorda che la condizione è solo sufficiente per cui possono esistere delle strutture che, pur non godendo di questa proprietà sono risolvibili.

Tutte le strutture che utilizzano un polso sferico soddisfano la condizione sufficiente sopra riportata e questo spiega la loro ampia diffusione in ambito industriale. Osservando la fig. 9 si può intuire perché queste strutture siano sempre risolvibili.

Essendo nota la matrice P&O si conoscerà la posizione e l'orientamento della sesta terra rispetto al riferimento. Risulta quindi possibile calcolare le coordinate di  $O_5$  ( $x', y', z'$ ) trovandosi infatti sul prolungamento, in direzione negativa, dell'asse  $z_6$ , distante  $d_6$  da  $O_6$ :

$$\begin{aligned}x' &= P_x - a_x d_6 \\y' &= P_y - a_y d_6 \\z' &= P_z - a_z d_6\end{aligned}$$

La posizione di  $O_5$  è tuttavia funzione solo dei primi tre gradi di libertà e quindi la cinematica inversa può essere scissa in due sottoproblemi in tre incognite.

Ricordando la formulazione della cinematica diretta come prodotto tra la matrice di posizionamento e quella di orientamento (cf. par. 5.3):

$$T = T_p T_o$$

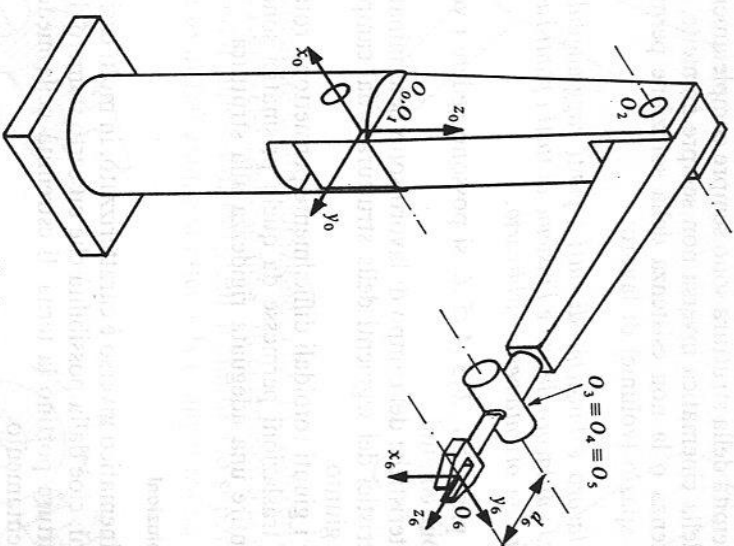


Fig. 9

si capisce come sia possibile ricavare le relazioni che danno i valori delle prime tre variabili di giunto utilizzando le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}T_p [1, 4] &= x' \\T_p [2, 4] &= y' \\T_p [3, 4] &= z'\end{aligned}$$

Avendo ridotto il sistema a tre sole incognite si può essere certi di esplicitare le variabili di giunto essendo l'equazione risolvibile al massimo di quarto grado e, come tale, analiticamente risolvibile.

Calcolati i valori delle prime tre variabili di giunto la matrice  $T_p$  è da considerarsi completamente nota e quindi varrà la relazione:

$$T_o = (T_p)^{-1} P \&O$$

che rappresenta un altro problema in tre incognite risolvendo il quale è possibile ricavare anche i valori delle variabili di giunto corrispondenti agli ultimi tre gradi di libertà.

#### Esistenza della soluzione

Il problema della cinematica diretta ammette sempre soluzione in quanto, dato un certo valore a tutte le variabili di giunto, la posizione e l'orientamento

della terna di estremità della struttura sono sempre completamente determinati. Il problema della cinematica inversa non sempre ammette, al contrario, la soluzione. L'esistenza o la non esistenza della soluzione permette di definire rigorosamente lo spazio (volume) di lavoro:

*Lo spazio di lavoro è l'insieme di tutti i punti raggiungibili dalla terna di estremità. Lo spazio di lavoro destro è l'insieme di tutti i punti raggiungibili dalla terna di estremità con orientamento arbitrario.*

Riandando ai par. 1.5/1./2./3./4./5./6. si possono vedere i volumi di lavoro per le strutture più comuni.

Limiti e caratteristiche del campo di lavoro sono determinate dai valori dei parametri caratteristici dei segmenti della struttura e dal campo di variazione delle variabili di giunto.

In particolare i giunti rotoïdali difficilmente permettono rotazioni complete (360°), mentre le traslazioni permesse da quelli prismatici sono limitate dalla necessità di garantire una adeguata rigidità alla struttura.

#### Molteplicità delle soluzioni

Il problema cinematico inverso è caratterizzato, in molti casi, dalla molteplicità delle soluzioni, cioè dalla possibilità che un certo numero di configurazioni diverse della struttura portino la terna di estremità nella medesima posizione con lo stesso orientamento.

Anche le strutture di comune impiego in ambito industriale possono avere più soluzioni al problema cinematico inverso.

Si consideri per ora separatamente il posizionamento e l'orientamento della terna di estremità:

**posizionamento:** la struttura antropomorfa permette di raggiungere lo stesso punto dello spazio con ben quattro diverse configurazioni della struttura (fig. 10): braccio destro con gomito alto e basso, braccio sinistro con gomito alto e basso.

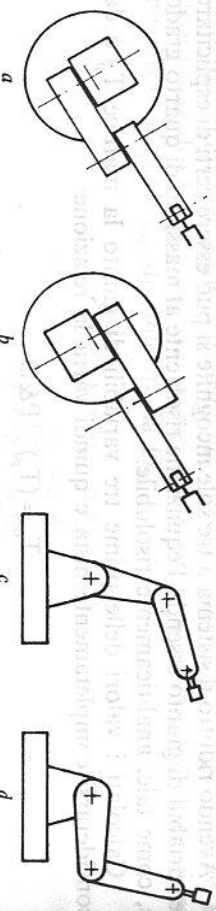


Fig. 10

Lo SCARA, così come il cilindrico, ha invece a disposizione solo le due possibilità di braccio destro e sinistro (fig. 11).

**orientazione:** il polso sferico permette di ottenere la stessa orientazione con due diverse configurazioni della struttura.

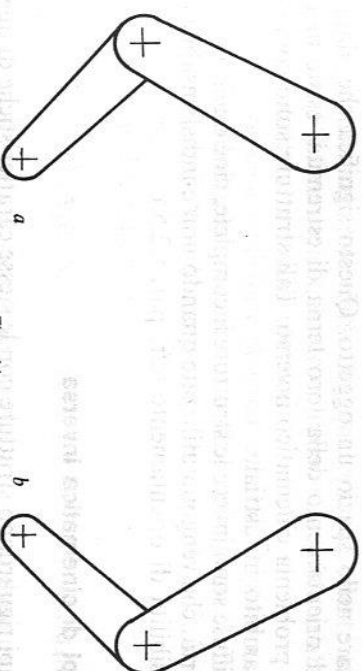


Fig. 11

Si immagini di avere la configurazione di fig. 12a e di cercare gli altri valori delle variabili di giunto che danno lo stesso orientamento alla terna di estremità. Si ruoti allo scopo il giunto 4 di 180 gradi, il giunto 5 lo si porti da  $\theta_5$  a  $-\theta_5$ , si ruoti infine il sesto di 180 gradi e si otterrà la configurazione cercata (fig. 12b).

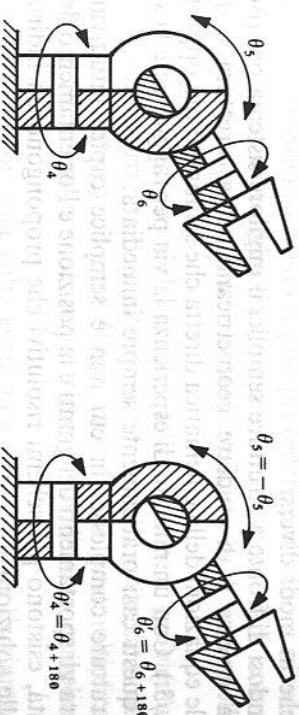


Fig. 12

Considerando una struttura completa a sei gradi di libertà il numero di configurazioni che permettono di ottenere la stessa posizione ed orientamento della terna di estremità aumentano.

Nel caso di robot che utilizzano un polso sferico il numero di soluzioni al problema cinematico inverso sarà il doppio di quelle permesse dai primi tre gradi di libertà. Questo perché, ogni configurazione dei primi tre giunti genera due diverse soluzioni al problema cinematico inverso tenendo conto delle due possibili disposizioni dei gradi di libertà del polso.

Il numero di soluzioni dipende, a parità di gradi di libertà, dalle caratteristiche della struttura. In generale si può affermare che maggiore è il numero di parametri caratteristici non nulli e maggiore sarà il numero di soluzioni al problema della cinematica inversa.

#### Strutture ridondanti e incomplete

I robot con più di sei gradi di libertà sono detti ridondanti in quanto hanno a disposizione più possibilità di movimento di quante ne servano per posiziona-

re ed orientare nello spazio un oggetto. Questo significa che, data una certa posizione ed orientamento della loro terna di estrema, esiste una infinità di soluzioni al problema cinematico inverso. Tali strutture sono comunque quasi assenti nell'ambito industriale.

Molto diffuse sono invece le strutture incomplete, cioè quelle con meno di sei gradi di libertà, che vengono utilizzate quando non è indispensabile disporre di tutte le possibilità di orientamento (cfr. par. 1.2.5.).

### 6.5. Esempi di cinematica inversa

Gli esempi riguardano strutture con le stesse caratteristiche di quelle proposte nel par. 5.5. dal momento che la soluzione della cinematica inversa presuppone la conoscenza delle relazioni di quella diretta.

Il procedimento risolutivo del problema cinematico inverso non si presta ad essere codificato in una serie di regole che, applicate meccanicamente e rigorosamente, permettano di arrivare alla soluzione (come per la cinematica diretta). Per questo motivo i procedimenti esposti nel seguito devono essere considerati solo come esempi e suggerimenti in quanto i problemi proposti possono essere risolti anche in modi diversi.

Trovandosi di fronte a strutture semplici il migliore sistema per risolvere la cinematica inversa è di studiare geometricamente la struttura e quindi di utilizzare le equazioni della cinematica diretta che sembrano più opportune (cfr. par. 6.4.2./3.). Con un minimo di esperienza la via per raggiungere la soluzione risulta in questi casi praticamente sempre immediata.

Per strutture complesse, in cui non è semplice capire intuitivamente le relazioni tra gli spostamenti dei giunti e la posizione e l'orientamento della terna di estrema, esistono più schemi risolutivi che propongono un indirizzo nella ricerca delle soluzioni.

Il metodo che verrà utilizzato nel seguito è dovuto principalmente all'americano R. Paul e propone una serie di manipolazioni della equazione cinematica nel tentativo di isolare alcune relazioni facilmente risolubili. Nel caso più generale si conosceranno gli elementi della trasformazione omogenea (P&O) che descrive la posizione e l'orientamento della terna di estrema rispetto al riferimento e l'equazione cinematica che sarà il risultato del prodotto delle sei matrici  $A_i$ :

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad [k = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)]$$

Unguagliando membro a membro le due matrici si ottengono dodici equazioni il cui termine a sinistra è una costante mentre quello a destra è funzione delle variabili di giunto.

In casi semplici, come quello di strutture a tre gradi di libertà specializzate nel posizionamento o nell'orientamento di oggetti, si avrà a che fare con un numero di relazioni inferiore.

Più precisamente si avranno a disposizione tre equazioni se il problema è di posizionamento (sottomatrice di posizione, quarta colonna) e nove se è di orientazione (sottomatrice di orientamento, prime tre colonne).

In alcuni casi fortunati può darsi che qualcuna di queste equazioni sia facilmente risolubile, ad esempio quando contiene una sola variabile di giunto che può essere esplicitata in modo univoco.

Quando non si riesce a esplicitare nessuna variabile di giunto, il metodo di Paul, consiglia di premoltiplicare o di postmoltiplicare l'equazione cinematica per l'inversa delle matrici  $A_1$  e  $A_6$ , rispettivamente quella a sinistra e quella a destra del secondo membro.

Si ottengono così due relazioni:

$$A_1^{-1} P \& O = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad [g(q_1) = f(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)]$$

che esprimono la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto alla prima, e:

$$P \& O A_6^{-1} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \quad [g(q_1) = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)]$$

che esprimono la posizione e l'orientamento della quinta terna rispetto al riferimento.

Ciascuna delle due equazioni matriciali così ottenute genera dodici equazioni tra cui ricercarne qualcuna facilmente risolubile.

In caso di ulteriore insuccesso si può procedere portando a sinistra un'altra matrice  $A_i$  mediante una premoltiplicazione (la matrice dovrà essere quella a sinistra del secondo membro) o una postmoltiplicazione (e sarà quella a destra del secondo membro).

Nell'ipotesi che la struttura di cui si cerca la soluzione al problema cinematico inverso sia caratterizzata da un polso sferico si ha la certezza di riuscire, con un appropriato numero di premoltiplicazioni e di postmoltiplicazioni, ad individuare delle relazioni che permettono di esplicitare semplicemente le variabili di giunto.

Va sottolineato che, una volta esplicitata una variabile di giunto, questa è determinabile e quindi tutti gli elementi della matrice A corrispondenti possono essere calcolati. In tal modo, diminuendo il numero di variabili in gioco, la ricerca di equazioni che permettano di esplicitare le variabili di giunto rimanenti risulta semplificato.

Se la spiegazione teorica della metodologia risolutiva risultasse complicata, il modo migliore per comprenderla è quello di seguire la soluzione degli esempi (6.4.4. e 6.5.4.) e solo dopo rileggere questa parte.

Si ricorda ancora che esistono altri approcci altrettanto validi alla soluzione del problema cinematico inverso e soprattutto, che queste tecniche si limitano a fornire solo degli indirizzi di carattere generale. Infatti la soluzione può sempre essere ottenuta con molte modalità diverse fra le quali solo l'intuito e l'esperienza permettono di destreggiarsi agevolmente. Quanto detto risulta ancora più vero per la soluzione delle strutture che non soddisfano la condizione sufficiente per la risolubilità.

#### 6.5.1. Robot a due gradi di libertà

Si consideri il robot descritto nel paragrafo 5.5.1. e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

Un robot a due gradi di libertà può soltanto posizionare gli oggetti in un piano. Per poterli anche orientare è necessario un terzo grado di libertà che permetta di ruotare le parti manipolate attorno ad un asse perpendicolare al piano di lavoro. Un tale sistema, ottenuto aggiungendo a questa la non rotazione del robot, la terna potrà assumere solo due diverse orientazioni, corrispondenti alle due possibili configurazioni della struttura. Questa affermazione è valida in generale, ma esiste la singolarità dell'origine  $O$  della terna base, punto nel quale, quando i due bracci hanno lunghezze uguali, la terna di estremità può essere arbitrariamente ruotata attorno ad un asse verticale.

Per quanto riguarda la soluzione della cinematica inversa e il relativo esempio numerico si può fare riferimento al par. 6.2.

### 6.5.2. Robot cilindrico a tre gradi di libertà

Si consideri il robot cilindrico di fig. 13 descritto nel paragrafo 5.5.2. e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

Un robot a tre gradi di libertà può soltanto posizionare degli oggetti nello spazio. Si tratta quindi, note le coordinate  $P_x, P_y, P_z$  di  $O_3$  (coincidenti con quelle della pinza), di calcolare tutti i corrispondenti valori delle variabili di giunto.

Aggiungendo a valle di questa struttura un polso sferico si guadagna la possibilità di orientare arbitrariamente gli oggetti senza modificare le coordinate di  $O_3$ . Questo permette di considerare il procedimento che verrà sviluppato, come la prima delle due tappe in cui può essere suddivisa la risoluzione della cinematica inversa di un robot a sei gradi di libertà.

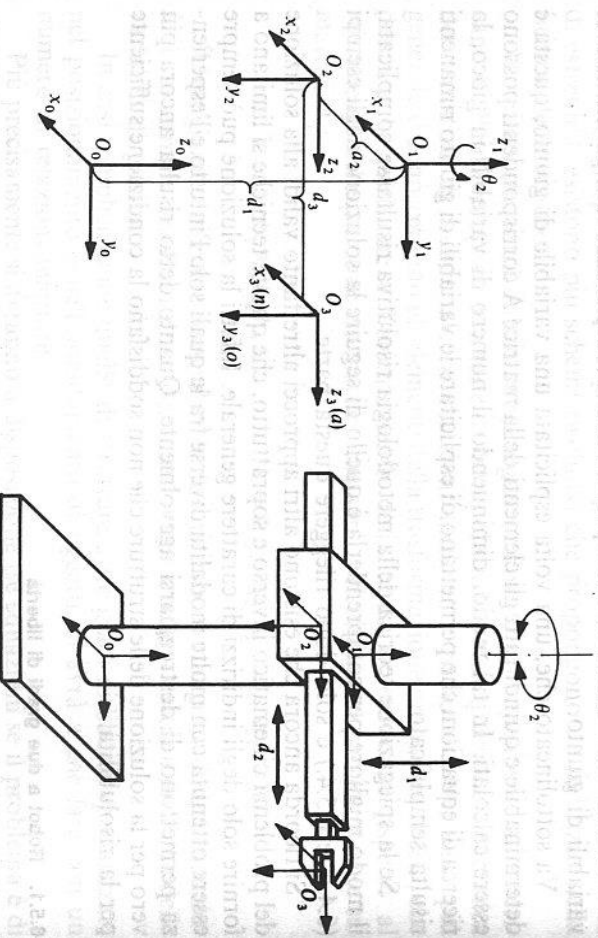


Fig. 13

Le tre equazioni che danno le coordinate di  $O_3$  sono:

$$\begin{aligned} p_x &= -d_3 S_2 + a_2 C_2 \\ p_y &= +d_3 C_2 + a_2 S_2 \\ p_z &= d_1 \end{aligned}$$

La relazione che fornisce il vettore della prima variabile di giunto è banale:

$$d_1 = p_z$$

Osservando la fig. 13 è d'altra parte evidente che la quota di  $O_3$  è determinata dal solo valore del primo giunto.

Elevando al quadrato e sommando tra loro le due relazioni non utilizzate si ha:

$$p_x^2 + p_y^2 = d_3^2 + a_2^2$$

da cui si ricava il valore della terza variabile di giunto:

$$d_3 = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 - a_2^2)}$$

Delle due possibili soluzioni solo quella positiva ha significato fisico in quanto, per come sono state disposte le terna di riferimento, la variabile  $d_3$  può assumere solo valori positivi.

Il procedimento applicato può essere pensato come l'applicazione del teorema di Pitagora per il calcolo del cateto del triangolo rettangolo rappresentato in fig. 14 nella quale sono evidenziate anche le altre grandezze coinvolte.

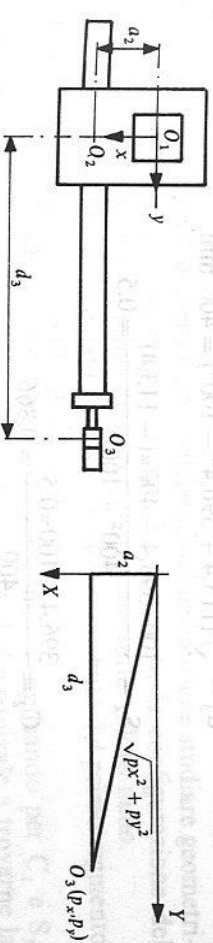


Fig. 14

Nota  $d_3$  si ricavano seno e coseno di  $\theta_2$  risolvendo il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} p_x &= -d_3 S_2 + a_2 C_2 \\ p_y &= +d_3 C_2 + a_2 S_2 \end{aligned}$$

ottenendo

$$S_2 = \frac{a_2 p_y - d_3 p_x}{d_3^2 + a_2^2}$$

$$C_2 = \frac{p_y - a_2 S_2}{d_3}$$

I valori di  $\theta_2$  si ottengono applicando la funzione ATAN2:

$$\theta_2 = \text{ATAN2}(S_2, C_2)$$

**Esempio**

Dato il robot di fig. 13, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo le coordinate della pinza:

$$p_x = -113,4$$

$$p_y = 396,4$$

$$p_z = 500$$

e il valore del parametro  $a_2$ :

$$a_2 = 100 \text{ mm}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa individuate in precedenza si ha:

$$d_1 = 500 \text{ mm}$$

$$d_3 = \sqrt{(113,4 + 396,4^2 - 100^2)} = 400 \text{ mm}$$

$$S_2 = \frac{100 \cdot 396,4 - 400 \cdot (-113,4)}{400^2 + 100^2} = 0,5$$

$$C_2 = \frac{396,4 - 100 \cdot 0,5}{400} = 0,866$$

$$\theta_2 = \text{ATAN2}(0,5, 0,866) = 30^\circ$$

**6.5.3. Robot antropomorfo a tre gradi di liberta**

Si consideri il robot antropomorfo di fig. 15 descritto nel paragrafo 5.5.3. e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

Si tratta di individuare quelle relazioni che, note le coordinate  $p_x, p_y, p_z$  della pinza, determinano tutti i corrispondenti valori delle variabili di giunto. Come

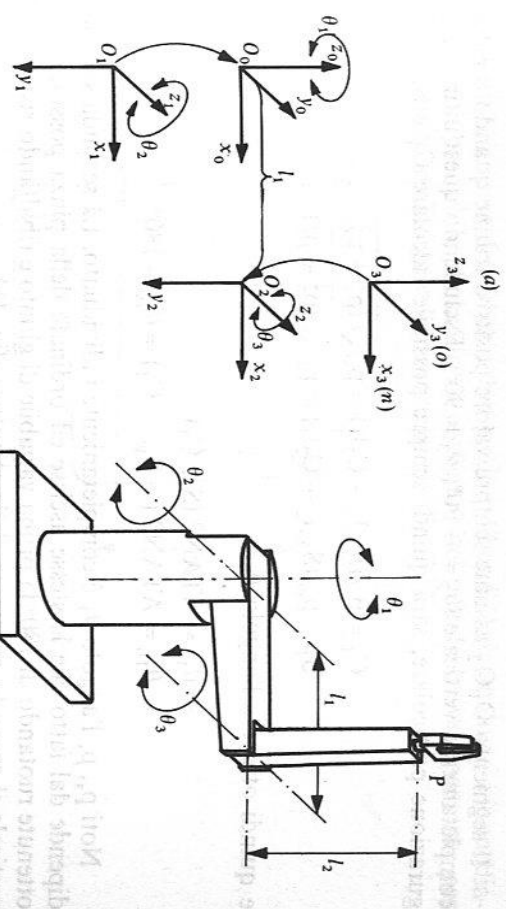


Fig. 15

quella cilindrica, anche la risoluzione di questa struttura può essere pensata come la prima delle due tappe in cui è possibile suddividere la risoluzione della cinematica inversa per un robot a sei gradi di liberta.

Nella modellizzazione della struttura l'origine della terza terna è stata fatta coincidere con quella della seconda per rispettare la convenzione di Denavit-Hartenberg e quindi le coordinate di  $O_3$  non coincideranno con quelle della pinza. Le tre equazioni che danno le coordinate  $p_x, p_y, p_z$  della pinza sono (cfr. par. 5.5.3.):

$$p_x = C_1(S_{23}l_2 + C_2l_1)$$

$$p_y = S_1(S_{23}l_2 + C_2l_1)$$

$$p_z = C_{23}l_2 - S_2l_1$$

Prima di tentare di esplicitare qualche variabile conviene studiare geometricamente la struttura osservando la fig. 15 che riporta la configurazione del robot quando le sue variabili di giunto assumono tutte valore nullo.

La quota della pinza è data dalla somma del contributo del primo segmento ( $S_2l_1$ ) e di quello del secondo ( $C_{23}l_2$ ).

L'ascissa e l'ordinata della pinza si ottengono moltiplicando per  $C_1$  e  $S_1$  l'estensione orizzontale del braccio ( $S_{23}l_2 + C_2l_1$ ), il che equivale a trovarne la posizione sugli assi  $X_0$  e  $Y_0$  rispettivamente.

L'estensione orizzontale del braccio può essere calcolata utilizzando il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo  $O_0O_2P$ :

$$\begin{aligned} S_{23}l_2 + C_2l_1 &= \sqrt{((O_0P)^2 + (PO_2)^2)} = \\ &= \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_z^2)} = \end{aligned}$$

Il segmento  $O_0O_2$  assume sempre valore positivo tranne quando il robot è completamente verticale ( $\theta_2 = -90^\circ$ ,  $\theta_3 = 90^\circ$ ). Escludendo quest'ultima configurazione particolare, sarà quindi sempre possibile calcolare  $C_1$  e  $S_1$ :

$$C_1 = p_x / (S_{23}l_2 + C_2l_1) = p_x / \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}$$

$$S_1 = p_y / (S_{23}l_2 + C_2l_1) = p_y / \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}$$

e quindi ottenere l'angolo  $\theta_1$ :

$$\theta_{1a} = \text{ATAN2}(S_1, C_1)$$

$$\theta_{1b} = \text{ATAN2}(-S_1, -C_1) = \theta_{1a} + 180^\circ$$

Noti  $p_x$ ,  $p_y$ , l'angolo  $\theta_1$ , è completamente individuato. La seconda soluzione dipende dal fatto che le stesse ascisse ed ordinate della pinza possono essere ottenute ruotando di  $180^\circ$  la prima variabile di giunto e ribaltando rispetto alla verticale il secondo segmento della struttura (fig. 16).

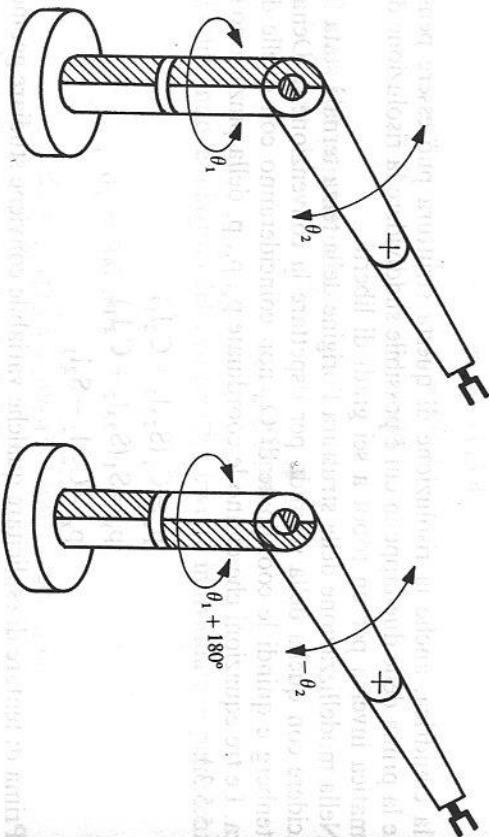


Fig. 16

Quando il robot è verticale il calcolo di  $\theta_1$ , impossibile attraverso il metodo in oggetto perché si annulla il denominatore delle formule che ne danno il seno e il coseno, non costituisce problema in quanto il suo valore non influisce sulle coordinate della pinza.

Per determinare i due rimanenti valori delle variabili di giunto si hanno ora a disposizione le due relazioni:

$$S_{23}l_2 + C_2l_1 = p_x/C_1$$

$$C_{23}l_2 - S_2l_1 = p_z$$

che presentano molte analogie con quelle che sono state utilizzate per risolvere

la cinematica inversa del robot a due gradi di libertà. Tale analogia è immediatamente comprensibile pensando di ragionare nel piano verticale passante per  $Z_0$  individuato dall'angolo di rotazione  $\theta_1$  (fig. 17).

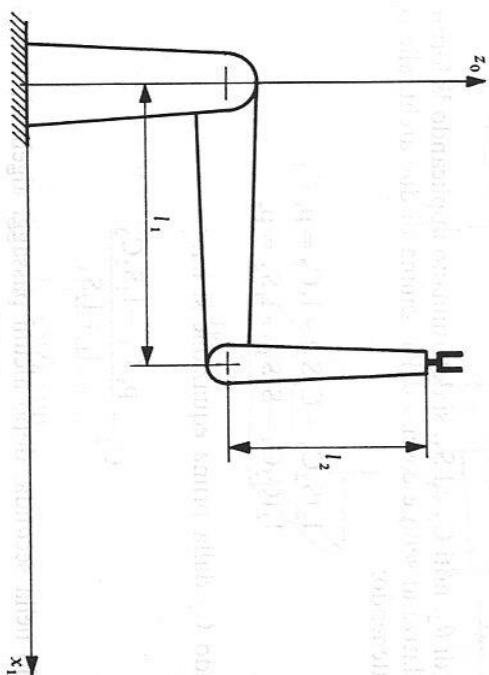


Fig. 17

Bisogna comunque sottolineare che la prima delle due relazioni è valida solo per  $C_1$  diverso da zero; quando  $C_1 = 0$  essa deve essere sostituita con la relazione equivalente:

$$S_{23}l_2 + C_2l_1 = p_y/S_1$$

Per isolare le due variabili di giunto conviene elevare al quadrato e sommare le due relazioni sopra riportate ottenendo:

$$l_2^2 + l_1^2 + 2l_1l_2(S_{23}C_2 - C_{23}S_2) = (p_x^2/C_1^2 + p_z^2)$$

Applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, si ottiene:

$$l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2S_3 = (p_x^2/C_1^2 + p_z^2)$$

da cui è possibile ricavare  $S_3$  e  $C_3$ :

$$S_3 = \frac{p_x^2/C_1^2 + p_z^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

$$C_3 = + / - \sqrt{(1 - S_3^2)}$$

Noti  $S_3$  e  $C_3$  è possibile calcolare i due possibili valori dell'angolo  $\theta_3$ :

$$\begin{aligned}\theta_{3a} &= \text{ATAN2}(S_3, C_3) \\ \theta_{3b} &= \text{ATAN2}(S_3, -C_3) = 180^\circ - \theta_{3a}\end{aligned}$$

I valori di  $\theta_2$ , noti  $C_3$  ed  $S_3$ , si determinano applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, alle equazioni di partenza ottenendo:

$$\begin{aligned}l_2(S_2C_3 + C_2S_3) + l_1C_2 &= p_x/C_1 \\ l_2(C_2C_3 - S_2S_3) + l_1S_2 &= p_z\end{aligned}$$

Ricavando  $C_2$  dalla prima equazione si ha:

$$C_2 = \frac{p_x/C_1 - l_2S_2C_3}{l_1 + l_2S_3}$$

e sostituendo nella seconda, dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene  $S_2$ :

$$S_2 = \frac{-p_x(l_1 + l_2S_3) + (p_x/C_1)l_2C_3}{l_2^2 + l_1^2 + 2l_1l_2S_3}$$

Sostituendo nell'equazione i due possibili valori di  $C_3$  e di  $C_1$ , oltre a quello di  $S_3$ , si ricavano i corrispondenti valori di  $S_2$ ; noti questi è possibile calcolare anche  $C_2$  e quindi risalire al valore di  $\theta_2$  utilizzando la funzione  $\text{ATAN2}(S_2, C_2)$ . Si noti che esistono quattro possibili valori di  $C_2$  ed  $S_2$ , a causa dei due possibili valori di  $C_1$  e  $C_3$ .

Riassumendo, le possibili soluzioni al problema cinematico inverso sono in genere quattro:

$$\begin{array}{lll}\theta_1 = \theta_{1a} & \theta_2 = \theta_{2a} & \theta_3 = \theta_{3a} \\ \theta_1 = \theta_{1a} & \theta_2 = \theta_{2b} & \theta_3 = 180^\circ - \theta_{3a} \\ \theta_1 = \theta_{1a} + 180^\circ & \theta_2 = 180^\circ - \theta_{2b} & \theta_3 = \theta_{3a} \\ \theta_1 = \theta_{1a} + 180^\circ & \theta_2 = 180^\circ - \theta_{2a} & \theta_3 = 180^\circ - \theta_{3a}\end{array}$$

### Esempio

Dato il robot di fig. 18, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo le coordinate della pinza:

$$\begin{aligned}p_x &= 1100 \\ p_y &= 0 \\ p_z &= 0\end{aligned}$$

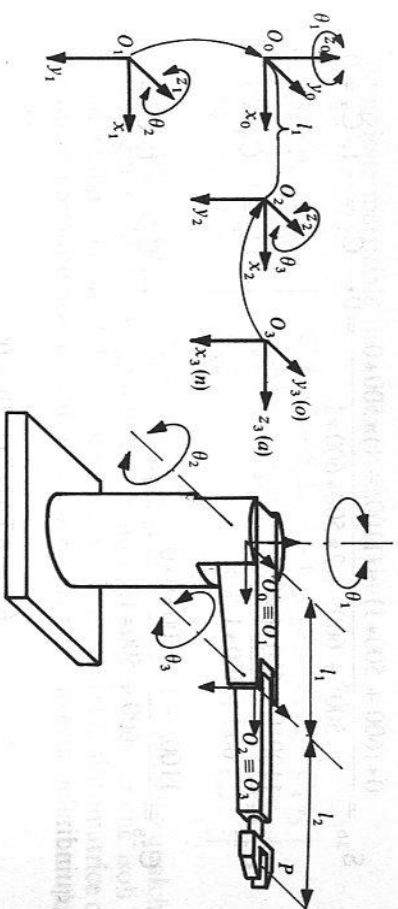


Fig. 18

e il valore dei due parametri:

$$\begin{aligned}l_1 &= 600 \text{ mm} \\ l_2 &= 500 \text{ mm}\end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$\begin{aligned}C_1 &= 1100/\sqrt{(1100^2 + 0^2)} = 1 \\ S_1 &= 0/\sqrt{(1100^2 + 0^2)} = 0\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\theta_{1a} &= \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ \\ \theta_{1b} &= \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ\end{aligned}$$

Per il calcolo della terza variabile di giunto si ha:

$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{1100/1^2 + 0^2 - 600^2 - 500^2}{2 \cdot 600 \cdot 500} = 1 \\ C_3 &= + / - 0\end{aligned}$$

e quindi:

$$\theta_3 = \text{ATAN2}(1, 0) = 90^\circ$$

In questo esempio, dove il braccio del robot è completamente esteso orizzontalmente, le due soluzioni di gomito in alto e gomito in basso vengono a coincidere. Per il calcolo della seconda variabile di giunto si ha:

$$S_{2a} = \frac{0 \cdot (600 + 500 \cdot 1) - (1100/1) \cdot 500 \cdot 0}{500^2 + 600^2 + 2 \cdot 500 \cdot 600 \cdot 1} = 0 \rightarrow C_1 = 1, C_3 = 0$$

$$S_{2b} = \frac{0*(600 + 500*1) - (1100/-1)*500*0}{500^2 + 600^2 + 2*500*600*1} = 0 \rightarrow C_1 = -1, C_3 = 0$$

$$C_{2a} = \frac{1100/1 - 500*0*0}{600 + 500*1} = 1 \rightarrow C_1 = 1, C_3 = 0$$

$$C_{2b} = \frac{1100/-1 - 500*0*0}{600 + 500*1} = -1 \rightarrow C_1 = -1, C_3 = 0$$

e quindi:

$$\theta_{2a} = \text{ATAN2}(1, 0) = 0^\circ$$

$$\theta_{2b} = \text{ATAN2}(1, 0) = 180^\circ$$

**6.5.4. Polso sferico**

Si consideri il polso sferico di fig. 19 descritto nel paragrafo 5.5.4 e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

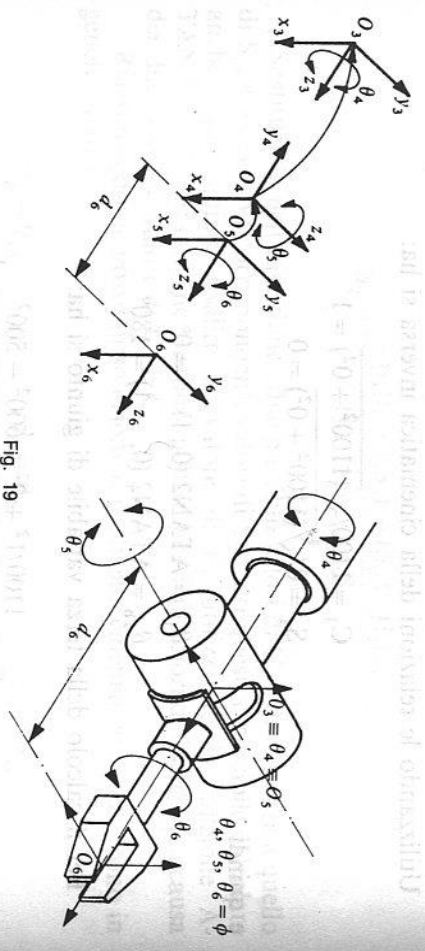


Fig. 19

Il polso sferico permette di orientare gli oggetti nello spazio e quindi, aggiungendogli a monte una struttura che sia in grado di posizionarlo si ottiene un robot completo a sei gradi di libertà. Questo permette di considerare il procedimento che verrà sviluppato come la seconda delle due tappe in cui è possibile suddividere la risoluzione della cinematica inversa di un robot completo.

Per determinare il valore assunto dalle variabili di giunto, bisognerà utilizzare i valori delle componenti dei versori della terna di estremità rispetto al riferimento base.

Nota la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità (la sesta) rispetto a quella di base (la terza), tali componenti sono contenute nella sottomatrice di orientazione.

L'equazione matriciale da utilizzare sarà quindi:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

Nessuna delle nove relazioni si presta per ricavare in modo esplicito qualche variabile di giunto; conviene quindi tentare una premoltiplicazione che isoli a sinistra, ad esempio, la variabile \$\theta\_4\$. Limitandosi a considerare la sottomatrice di orientazione e premoltiplicando entrambi i membri per l'inversa della matrice \$A\_4\$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} C_4 n_x + S_4 n_y & C_4 o_x + S_4 o_y & C_4 a_x + S_4 a_y \\ -n_x & -o_x & -a_x \\ -S_4 n_x + C_4 n_y & -S_4 o_x + C_4 o_y & -S_4 a_x + C_4 a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 C_6 & -C_5 C_6 & S_5 \\ S_5 C_6 & -S_5 C_6 & -C_5 \\ S_6 & C_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Uguagliando gli elementi [3, 3] delle due matrici sopra riportate si ottiene un'equazione in cui compare come unica variabile \$\theta\_4\$:

$$-a_x S_4 + a_y C_4 = 0$$

da cui è facile ottenere i due possibili valori di \$\theta\_4\$ che la soddisfano:

$$\theta_{4a} = \text{ATAN2}(a_y, a_x)$$

$$\theta_{4b} = \text{ATAN2}(-a_y, -a_x) = \theta_{4a} + 180^\circ$$

La variabile \$\theta\_5\$ può essere ricavata uguagliando gli elementi [1, 3] e [2, 3] che danno rispettivamente il seno e il coseno di tale angolo:

$$S_5 = C_4 a_x + S_4 a_y$$

$$C_5 = a_y$$

Sostituendo i due possibili valori di \$\theta\_4\$ si ottengono in corrispondenza le due soluzioni:

$$\theta_{5a} = \text{ATAN2}(a_x C_4 + a_y S_4, a_y) \rightarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_{5b} = \text{ATAN2}(a_x C_4 + a_y S_4, a_y) = -\theta_{5a} \rightarrow \theta_{4b}$$

Con analogo procedimento è possibile determinare la variabile \$\theta\_6\$ eguagliando gli elementi [3, 1] e [3, 2] che danno rispettivamente il seno e il coseno di tale angolo:

$$S_6 = -S_4 n_x + C_4 n_y$$

$$C_6 = -S_4 o_x + C_4 o_y$$

Sostituendo i due possibili valori di  $\theta_4$  si ottengono in corrispondenza le due soluzioni:

$$\begin{aligned} \theta_{6a} &= \text{ATAN2}(-S_4 n_x + C_4 n_y, -S_4 O_x + C_4 O_y) && \leftarrow \theta_{4a} \\ \theta_{6b} &= \text{ATAN2}(-S_4 n_x + C_4 n_y, -S_4 O_x + C_4 O_y) = \theta_{6a} + 180^\circ && \leftarrow \theta_{4b} \end{aligned}$$

### Esempio

Dato il polso sferico di fig. 19, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo l'orientazione dei tre versori degli assi della terna associata alla pinza:

$$\begin{array}{lll} n_x = 1 & O_x = 0 & a_x = 0 \\ n_y = 0 & O_y = 1 & a_y = 0 \\ n_z = 0 & O_z = 0 & a_z = 1 \end{array}$$

Utilizzando le equazioni della cinematica inversa si ha:

$$\theta_4 = \text{ATAN2}(a_y, a_x) = \text{ATAN2}(0, 0) = \text{indeterminato}$$

In realtà ci si trova di fronte ad una situazione degenera del polso sferico riconoscibile dal fatto che gli assi  $z_3$  e  $z_6$  sono paralleli. Gli assi di rotazione del quarto e del sesto giunto sono paralleli e quindi il numero di gradi di libertà indipendenti del polso scende a due.

### Esempio

Dato il polso sferico di fig. 20, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo l'orientazione dei tre versori degli assi della terna associata alla pinza:

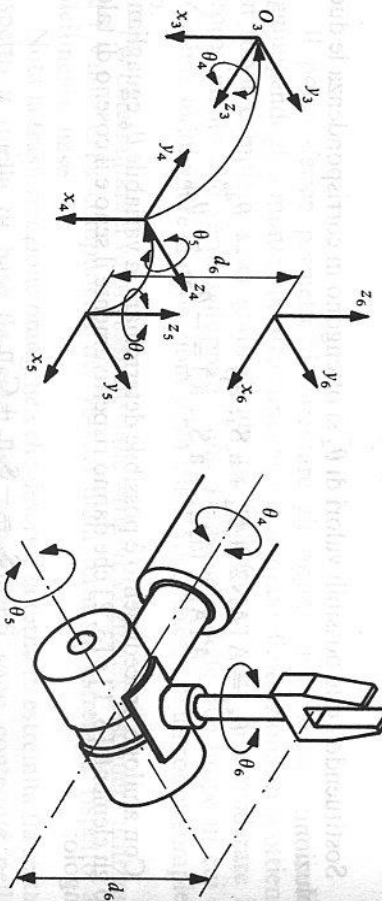


Fig. 20

$$\begin{array}{lll} n_x = 0 & O_x = 0 & a_x = -1 \\ n_y = 0 & O_y = 1 & a_y = 0 \\ n_z = 1 & O_z = 0 & a_z = 0 \end{array}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$\begin{aligned} \theta_{4a} &= \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ \\ \theta_{4b} &= \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ \end{aligned}$$

Sostituendo i due possibili valori di  $\theta_4$  nelle relazioni che danno  $\theta_5$  se ne ottengono i due possibili valori:

$$\begin{aligned} \theta_{5a} &= \text{ATAN2}(1, 0) = 90^\circ \leftarrow \theta_{4a} \\ \theta_{5b} &= \text{ATAN2}(-1, 0) = -90^\circ \leftarrow \theta_{4b} \end{aligned}$$

Analogamente si determinano i due possibili valori per la variabile  $\theta_6$ :

$$\begin{aligned} \theta_{6a} &= \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ \leftarrow \theta_{4a} \\ \theta_{6b} &= \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ \leftarrow \theta_{4b} \end{aligned}$$

#### 6.5.5. Robot a sei gradi di libertà

Questo esempio è da ritenersi facoltativo ai fini del completamento del programma didattico e va considerato come uno strumento di approfondimento.

La risoluzione della cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà permette di padroneggiare il problema relativamente a quasi tutte le strutture dei robot industriali.

Come esempio si consideri il robot antropomorfo di fig. 21, descritto nel paragrafo 5.5.5.

La presenza del polso sferico consiglia di spezzare la soluzione della cinematica inversa nei suoi sottoproblemi di posizionamento ed orientazione.

Per quanto riguarda il posizionamento bisogna cercare un punto le cui coordinate soddisfino contemporaneamente le condizioni di dipendere solo dai primi tre giunti e di essere ricavabile dalla posizione e dall'orientamento della terna di estremità.

Nell'esempio proposto tale punto può essere individuato nell'origine  $O_4$  della quarta terna. Infatti la sua posizione è funzione solo dei primi tre giunti e le sue coordinate possono essere calcolate perché esso si trova sull'asse  $z_6$ , nella direzione negativa, alla distanza  $d_6$  da  $O_6$ .

Utilizzando la solita terminologia per dare la posizione e l'orientamento della terna di estremità, le coordinate di  $O_4$  saranno:

$$\begin{aligned} p_x^1 &= p_x - a_x d_6 \\ p_y^1 &= p_y - a_y d_6 \\ p_z^1 &= p_z - a_z d_6 \end{aligned}$$

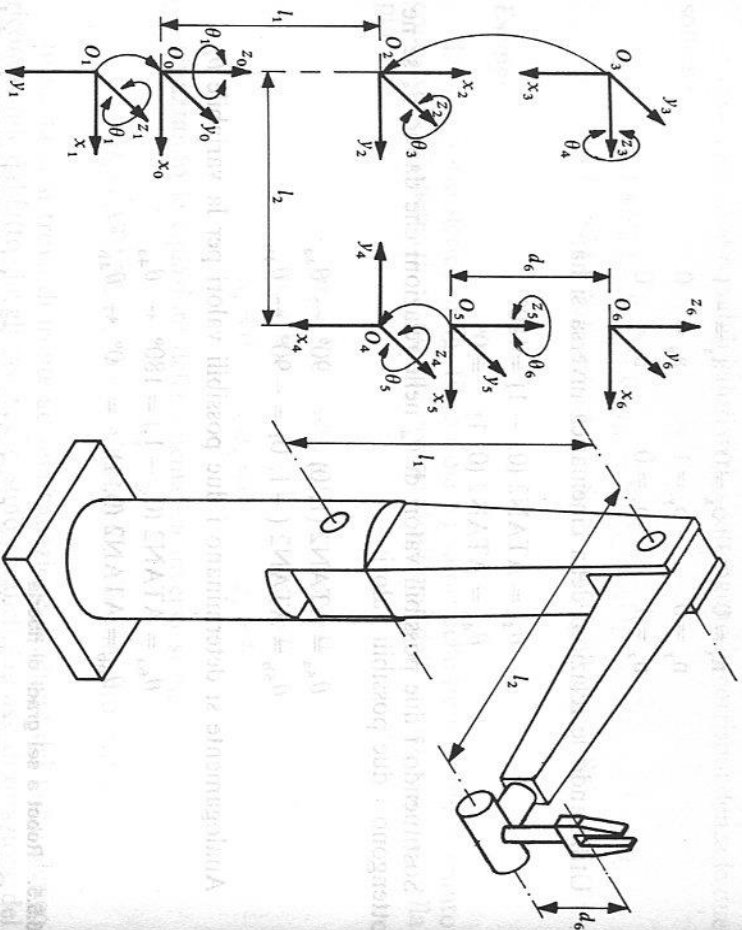


Fig. 21

Le relazioni che danno l'ascissa, l'ordinata e la quota di  $O_4$  sono contenute ordinatamente negli elementi (1, 4), (2, 4), (3, 4) della matrice  $A_1 A_2 A_3 A_4$  che da la posizione e l'orientamento della quarta terna rispetto al riferimento.

Quindi le tre equazioni da cui esplicitare le relazioni della cinematica inversa per i primi tre giunti sono:

$$\begin{aligned} p_x^1 &= l_2 C_1 S_{23} + l_1 C_1 C_2 = C_1 (l_1 C_2 + l_2 S_{23}) \\ p_y^1 &= l_2 S_1 S_{23} + l_1 S_1 C_2 = S_1 (l_1 C_2 + l_2 S_{23}) \\ p_z^1 &= l_2 C_{23} - l_1 S_2 = -l_1 S_2 + l_2 C_{23} \end{aligned}$$

Trattandosi di relazioni accoppiate conviene cercare di esplicitare ad esempio  $\theta_1$  premoltiplicando l'equazione cinematica per l'inversa della trasformazione  $A_1$ :

$$(A_1^{-1}) P \&O = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

Ricordando che le equazioni che interessano sono quelle che danno la posizione di  $O_4$ , sarà sufficiente calcolare la quarta colonna della matrice:

$$(A_1^{-1}) P \&O = A_2 A_3 A_4$$

In quanto le trasformazioni descritte da  $A_5$  e  $A_6$  non la modificano.

Eseguito le opportune moltiplicazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1 &= S_{23} l_2 + C_2 l_1 \\ -p_z^1 &= -C_{23} l_2 + l_1 S_2 \\ -S_1 p_x^1 + C_1 p_y^1 &= 0 \end{aligned}$$

L'ultima espressione permette di ricavare immediatamente  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned} \theta_{1a} &= \text{ATAN2}(p_y^1, p_x^1) \\ \theta_{1b} &= \text{ATAN2}(-p_y^1, -p_x^1) = \theta_{1a} + 180^\circ \end{aligned}$$

È buona norma cercare di verificare, quando è possibile, se i risultati ottenuti sono intuitivamente convincenti. In questo caso si è trovato che le coordinate  $p_x^1, p_y^1$  di  $O_4$ , risultato della sua proiezione nel piano  $X_0 Y_0$ , danno l'angolo di rotazione  $\theta_1$ , come era logico attendersi (fig. 21). Anche l'esistenza della doppia soluzione era prevedibile dopo quanto visto al par. 6.4.3.

Per determinare  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , noto  $\theta_1$ , rimangono a disposizione le due relazioni:

$$\begin{aligned} S_{23} l_2 + C_2 l_1 &= C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1 \\ -C_{23} l_2 + S_2 l_1 &= -p_z^1 \end{aligned}$$

Queste due equazioni sono già state affrontate e risolte nel par. 6.4.3. relativo al robot antropomorfo a tre gradi di libertà e quindi ci si limiterà a riproporre i risultati precedentemente ricavati:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1)^2 + (p_z^1)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} \\ C_3 &= + / - \sqrt{(1 - S_3^2)} \end{aligned}$$

Noti  $S_3$  e  $C_3$  si calcola l'angolo  $\theta_3$ :

$$\begin{aligned} \theta_{3a} &= \text{ATAN2}(S_3, C_3) \\ \theta_{3b} &= \text{ATAN2}(S_3, -C_3) = 180^\circ - \theta_{3a} \end{aligned}$$

Noti  $C_3$  e  $S_3$  è ora possibile determinare i valori di  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{-p_z^1 (l_1 + l_2 S_3) + (C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1) l_2 C_3}{l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 S_3} \\ C_2 &= \frac{p_z^1 / C_1 - l_2 S_2 C_3}{l_1 + l_2 S_3} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione che dà  $S_2$  i due possibili valori di  $C_3$  e di  $C_1$ , oltre a quello di  $S_3$ , si ricavano i corrispondenti valori di  $S_2$ ; noti questi è possibile

calcolare  $C_2$  e quindi risalire al valore di  $\theta_2$  utilizzando la funzione ATAN2 ( $S_2, C_2$ ). Si noti che esistono quattro possibili valori di  $C_2$  ed  $S_2$ , a causa dei due possibili di  $C_1$  e  $C_3$ .

Individuati i valori di  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  le matrici  $A_1, A_2, A_3$  sono da ritenersi note e conviene portarle al primo membro dell'equazione cinematica:

$$A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} P \& O = A_4 * A_5 * A_6 = \begin{bmatrix} n'_x & o'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & o'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & o'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mentre il termine a sinistra è noto, quello a destra è funzione di  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ . Quest'ultimo coincide con la trasformazione omogenea che descrive la cinematica diretta del polso sferico per quanto riguarda la sottomatrice di orientazione. Pertanto la soluzione del problema sarà del tutto simile a quella svolta nel paragrafo precedente. Le relazioni che si ottengono sono:

$$\begin{aligned} \theta_{4a} &= \text{ATAN2}(a'_y, a'_x) &&= \theta_4 + 180^\circ \\ \theta_{4b} &= \text{ATAN2}(-a'_y, -a'_x) && \\ \theta_5 &= \text{ATAN2}(a'_x C_4 + a'_y S_4, a'_y) &&\leftarrow \theta_{4a} \\ \theta_5 &= \text{ATAN2}(a'_x C_4 + a'_y S_4, a'_y) &&= -\theta_5 \quad \leftarrow \theta_{4b} \\ \theta_6 &= \text{ATAN2}(-n'_x S_4 + n'_y C_4, -O'_x S_4 + O'_y C_4) &&\leftarrow \theta_{4a} \\ \theta_6 &= \text{ATAN2}(-n'_x S_4 + n'_y C_4, -O'_x S_4 + O'_y C_4) &&= \theta_6 + 180^\circ \leftarrow \theta_{4b} \end{aligned}$$

### Esempio

Dato il robot di fig. 21, calcolare i valori delle sei variabili di giunto conoscendo la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto al riferimento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e il valore dei tre parametri:

$$\begin{aligned} l_1 &= 600 \text{ mm} \\ l_2 &= 500 \text{ mm} \\ d_6 &= 150 \text{ mm} \end{aligned}$$

Per poter utilizzare le relazioni della cinematica inversa bisogna conoscere le coordinate di  $O_4$ :

$$\begin{aligned} p_x^1 &= 500 - 0 * 150 = 500 \\ p_y^1 &= 0 - 0 * 150 = 0 \\ p_z^1 &= 750 - 1 * 150 = 600 \end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$\begin{aligned} \theta_{1a} &= \text{ATAN2}(0, 500) = 0^\circ \\ \theta_{1b} &= \text{ATAN2}(0, -500) = 180^\circ \end{aligned}$$

Per il calcolo della terza variabile di giunto si ha:

$$S_3 = \frac{(1 * 500 + 0 * 0)^2 + 600^2 - 600^2 - 500^2}{2 * 600 * 500} = 0$$

$$C_3 = + / - 1$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \theta_{3a} &= \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ \\ \theta_{3b} &= \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ \end{aligned}$$

Per il calcolo della seconda variabile di giunto si ha:

$$S_2 = \frac{-600 * (600 + 500 * 0) + (1 * 500 + 0 * 0) * 500 * 1}{500^2 + 600^2 + 2 * 500 * 600 * 0} = -0.1803 \quad \leftarrow \theta_{1a}, \theta_{3a}$$

$$C_2 = \frac{500/1 - 500 * -0.1803 * 1}{600 + 500 * 0} = 0.9836$$

$$S_2 = -1 \quad \leftarrow \theta_{1a}, \theta_{3b}$$

$$C_2 = 0 \quad \leftarrow \theta_{1b}, \theta_{3a}$$

$$S_2 = -1 \quad \leftarrow \theta_{1b}, \theta_{3b}$$

$$C_2 = 0 \quad \leftarrow \theta_{1a}, \theta_{3b}$$

$$S_2 = -0.1803 \quad \leftarrow \theta_{1b}, \theta_{3a}$$

$$C_2 = -0.9836 \quad \leftarrow \theta_{1a}, \theta_{3b}$$

e quindi:

$$\theta_{2a} = \text{ATAN2}(-0.1803, 0.9836) = -10.3874^\circ$$

$$\theta_{2b} = \text{ATAN2}(-1, 0) = -90^\circ$$

$$\theta_{2c} = \text{ATAN2}(-1, 0) = -90^\circ$$

$$\theta_{2d} = \text{ATAN2}(-0.1803, -0.9836) = -169.6126^\circ$$

Le quattro soluzioni, relativamente ai primi tre giunti sono pertanto:

$$\begin{array}{ll} \theta_{1a} = 0^\circ & \theta_{2a} = -10,3874^\circ & \theta_{3a} = 0^\circ \\ \theta_{1b} = 0^\circ & \theta_{2b} = -90^\circ & \theta_{3b} = 180^\circ \\ \theta_{1c} = 180^\circ & \theta_{2c} = -90^\circ & \theta_{3c} = 0^\circ \\ \theta_{1d} = 180^\circ & \theta_{2d} = -169,6126^\circ & \theta_{3d} = 180^\circ \end{array}$$

Sostituendo i valori ricavati per le prime tre variabili nella relazione:

$$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}P \& O = A_4A_5A_6$$

si ricava la trasformazione omogenea che descrive la posizione e l'orientamento della stessa terra rispetto alla terza.

Considerando solo la sottomatrice di orientazione sarà possibile determinare i valori delle ultime tre variabili di giunto procedendo in modo analogo a quanto fatto per il polso sferico (par. 6.5.4.).

## 6.6. Generalità sul controllo delle traiettorie

*La traiettoria di un robot è la linea descritta nello spazio dalla sua estremità funzionale, nel movimento dalla configurazione iniziale a quella finale.*

Il robot è un sistema meccanico i cui movimenti possono essere liberamente programmati e quindi il controllo dei suoi movimenti è di importanza fondamentale.

Prima di imporre al robot un qualsiasi tipo di movimento è necessario assicurarsi che, durante tale movimento, nessuna delle sue parti entri in contatto con gli oggetti che lo circondano (vincolo degli oggetti).

Si tratta poi di definire quali movimenti dell'estremità funzionale servono per realizzare il compito a cui il robot è dedicato. Nei casi più semplici interessa che il robot modifichi la configurazione della sua struttura in modo da cambiare la posizione e l'orientamento della sua estremità funzionale da una condizione iniziale (ex. coordinate di presa di una parte) ad una finale (ex. coordinate di deposito della stessa). In altre parole interessano il punto di partenza e di arrivo ma non la traiettoria con cui essi vengono collegati (vincolo delle posizioni iniziali e finali).

Nella maggioranza dei casi è invece necessario controllare anche la traiettoria descritta dall'estremità del robot (vincolo del percorso).

Il controllo dei movimenti di un robot può essere definito in due fasi: nella prima si cerca una traiettoria che soddisfi il vincolo degli ostacoli e nella seconda ne viene controllata l'esecuzione.

Per quanto riguarda la prima fase è sufficiente dire che le traiettorie vengono in genere studiate sul campo e quindi risulta relativamente semplice fare in modo che siano libere da collisioni. Va tuttavia sottolineato che si cominciano ad utilizzare dei programmi di simulazione che permettono di pianificare le traiettorie. I vantaggi di un tale approccio sono notevoli in quanto, potendo

lavorare in simulazione, si possono facilmente provare più traiettorie e diverse organizzazioni della stazione robotizzata in modo da migliorarne le prestazioni. Imposti i vincoli degli ostacoli, rimane il problema di controllarne la corretta esecuzione, che può essere realizzato sia a livello dei giunti che nello spazio cartesiano.

### 6.6.1. Controllo del movimento a livello dei giunti

*Quando interessano soltanto le posizioni di inizio e fine della traiettoria si hanno a disposizione due insiemi di variabili di giunto che rappresentano la configurazione di partenza e quella finale della struttura. Il controllo si limita ad imporre ad ogni giunto uno spostamento che porti il valore della sua variabile da quello di partenza a quello finale.*

Poiché in generale gli spostamenti dei giunti saranno di entità diversa l'uno dall'altro il controllo si preoccupa anche di programmare accelerazioni e velocità di ognuno di essi in modo che tutti terminino il loro movimento contemporaneamente in modo da ottenere un «moto coordinato».

Questo controllo si presenta molto semplice ma l'impossibilità di imporre una determinata traiettoria al robot lo rende praticamente inutilizzabile per molte applicazioni industriali.

*Desiderando controllare completamente la traiettoria, il movimento del robot deve essere pianificato dando, in funzione del tempo, una legge che descriva gli spostamenti di ogni giunto e i valori iniziali e finali delle loro variabili.*

*La traiettoria viene realizzata con una sequenza di movimenti coordinati tra una successione di punti intermedi così ravvicinati da garantire che gli spostamenti dalla legge desiderata risultino contenuti.*

L'algoritmo di controllo che genera la sequenza dei punti intermedi si presenta relativamente semplice. Innanzitutto viene definito un intervallo di tempo, detto di campionamento, che intercorre tra un punto e il successivo. Il controllo sarà quindi un algoritmo ciclico che, ogni volta che trascorre un intervallo di campionamento, verifica dapprima se il robot ha raggiunto la posizione finale e, in caso negativo, calcola un nuovo punto intermedio sfruttando le funzioni che definiscono la traiettoria.

Affinché questo algoritmo di controllo risulti efficiente è necessario che le funzioni che descrivono gli spostamenti dei giunti permettano di calcolare agevolmente e in modo deterministico, dato un generico  $t$ , il valore della variabile di giunto. Questo significa ad esempio che sono da evitare quelle funzioni che forniscono il valore della variabile di un giunto un modo iterativo o che ne fanno corrispondere più di uno ad uno stesso valore di  $t$ . Inoltre è fondamentale che le funzioni siano continue per evitare che tra un intervallo di campionamento e il successivo ci siano variazioni troppo grandi che non potrebbero essere realizzate dagli attuatori del robot. Infatti le accelerazioni raggiungibili dai giunti sono limitate e quindi, data la velocità iniziale, lo spazio percorribile nell'intervallo di campionamento non potrà essere arbitrariamente grande. Le relazioni che vincolano i possibili spostamenti dei giunti del robot

alle prestazioni dei loro attuatori (coppia ...) e alle caratteristiche della struttura (masse, inerzie, ...) sono detti «vincoli dinamici».

Il principale vantaggio del controllo dei movimenti a livello dei giunti è la semplicità in quanto la traiettoria è stabilita fornendo direttamente le leggi di variazione delle variabili che devono essere controllate. Questo fatto garantisce inoltre che il peso computazionale per la pianificazione della traiettoria è minimo e quindi può essere eseguito in tempo reale.

#### 6.6.2 Controllo dei movimenti nello spazio cartesiano

*La traiettoria e i suoi punti iniziali e finali vengono descritti al controllo in riferimento allo spazio cartesiano.*

Questa modalità di controllo è di gran lunga più diffusa dell'altra perché è più semplice definire delle traiettorie corrette nello spazio cartesiano piuttosto che in quello dei giunti. D'altra parte, qualora si rendesse necessario conoscere i valori delle variabili di giunto corrispondenti ad una certa posizione ed orientamento della estremità, basterà richiamare la routine di soluzione della cinematica inversa.

*Quando interessano le posizioni di inizio e fine della traiettoria il controllo conoscerà soltanto la posizione e l'orientamento della terna di estremità corrispondenti alla configurazione di partenza e a quella finale della struttura.*

In questo caso il controllo dapprima calcola i valori delle variabili di giunto corrispondenti alle posizioni iniziale e finale della terna di estremità e quindi impone ad ogni giunto lo spostamento che gli compete. Poiché in generale gli spostamenti dei giunti saranno di entità diversa l'uno dall'altro il controllo si preoccupa anche di programmare accelerazioni e velocità di ognuno di essi in modo che tutti terminino il loro movimento contemporaneamente così da realizzare un moto coordinato.

Tale semplice controllo è tuttavia quasi sempre non utilizzabile in applicazioni pratiche in quanto molto spesso è indispensabile poter vincolare il robot a seguire un certo percorso.

*Desiderando controllare completamente la traiettoria, il movimento del robot deve essere pianificato fissando, in funzione del tempo, una legge che descriva la posizione e l'orientamento della terna di estremità, oltre a specificare le condizioni di partenza e di arrivo.*

Anche in questo caso la traiettoria viene realizzata con una sequenza di movimenti coordinati tra una successione di punti intermedi così ravvicinati, che gli scostamenti dalla legge desiderata risultano contenuti. L'algoritmo di controllo che genera la sequenza dei punti intermedi si presenta più complesso rispetto a quello utilizzato lavorando a livello dei giunti. Infatti, ad ogni intervallo di controllo, oltre a determinare la posizione e l'orientamento della terna di estremità esso deve convertire le posizioni cartesiane nei corrispondenti valori delle variabili di giunto risolvendo un problema di cinematica inversa. Questo aumento del carico computazionale obbliga ad adottare elaboratori più veloci e costosi per mantenere immutati gli intervalli di controllo.

Gli algoritmi di controllo possono essere concettualmente divisi in quelli che operano a livello della terna di estremità e quelli che lavorano a livello dei giunti.

Lavorando al livello della terna di estremità il controllo opera quasi sempre nello spazio cartesiano: la traiettoria è campionata a intervalli di tempo costante e il segnale di errore inviato agli attuatori per comandare i movimenti è calcolato in base alla differenza, espressa in coordinate cartesiane, tra la posizione da raggiungere e quella effettivamente occupata dalla terna di estremità.

I controlli di movimenti nello spazio cartesiano che lavorano a livello dei giunti approssimano la traiettoria della terna di estremità con delle funzioni che danno al variare del tempo i valori ideali delle variabili di giunto. Il segnale di errore da inviare agli attuatori è in questo caso proporzionale alla differenza tra la posizione teorica e quella reale, entrambe espresse in coordinate dei giunti. Tra i due approcci quello cartesiano è da preferirsi in quanto si presenta di più chiara comprensione e permette precisioni maggiori non dovendo essere introdotte approssimazioni.

Tuttavia, dal momento che per ora è impossibile ottenere una misura diretta della posizione e dell'orientamento della terna di estremità, sarà necessario eseguire praticamente in tempo reale delle trasformazioni tra lo spazio cartesiano e quello dei giunti. Si ricordi inoltre che questa conversione non è univoca e quindi vanno calcolate più soluzioni tra cui scegliere quella da adottare. La scelta viene in genere fatta in base al criterio dell'adiacenza, si sceglie cioè, tra tutte le soluzioni possibili, quella che comporta i minori movimenti per i giunti. Vale la pena di sottolineare che ogni giunto dovrà avere un suo peso relativo in quanto è palesemente diverso, ad esempio, ruotare di un certo angolo uno dei giunti del polso rispetto a muovere della stessa quantità uno di quelli principali. Questo carico computazionale può costringere ad allungare gli intervalli di controllo diminuendo l'accuratezza con cui viene eseguita la traiettoria richiesta. Inoltre, nel caso in cui si debba tener conto di vincoli dinamici, si dovrebbero combinare vincoli a livello cartesiano (la traiettoria) e a livello dei giunti ( quelli dinamici).

La somma di questi svantaggi fa sì che nella pratica sia più diffuso il secondo che si presenta computazionalmente più veloce e in grado di lavorare semplicemente con i vincoli dinamici.

L'unico vero svantaggio è la perdita di precisione dovuta agli errori introdotti dalle funzioni approssimanti che, qualora fossero molto complesse, aumenterebbero i tempi di elaborazione riducendo quindi il vantaggio più significativo di questo approccio.