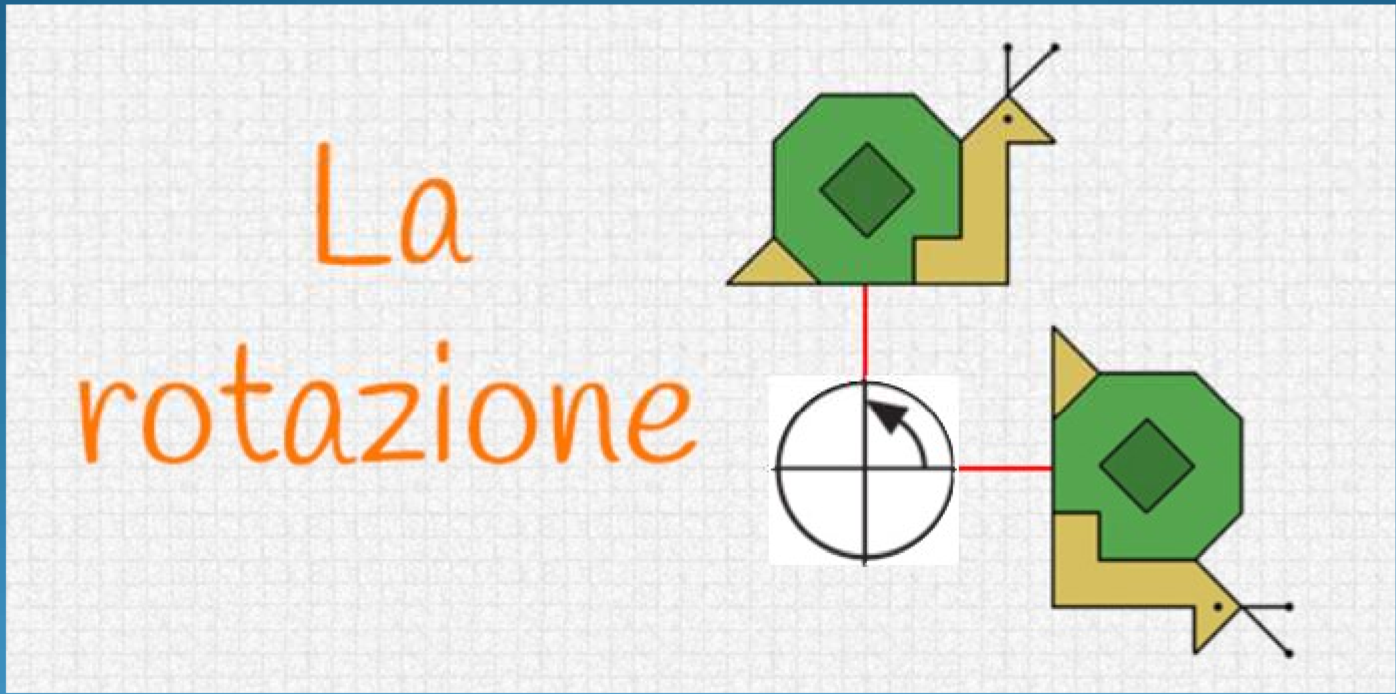
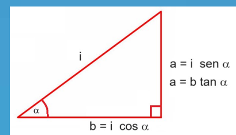
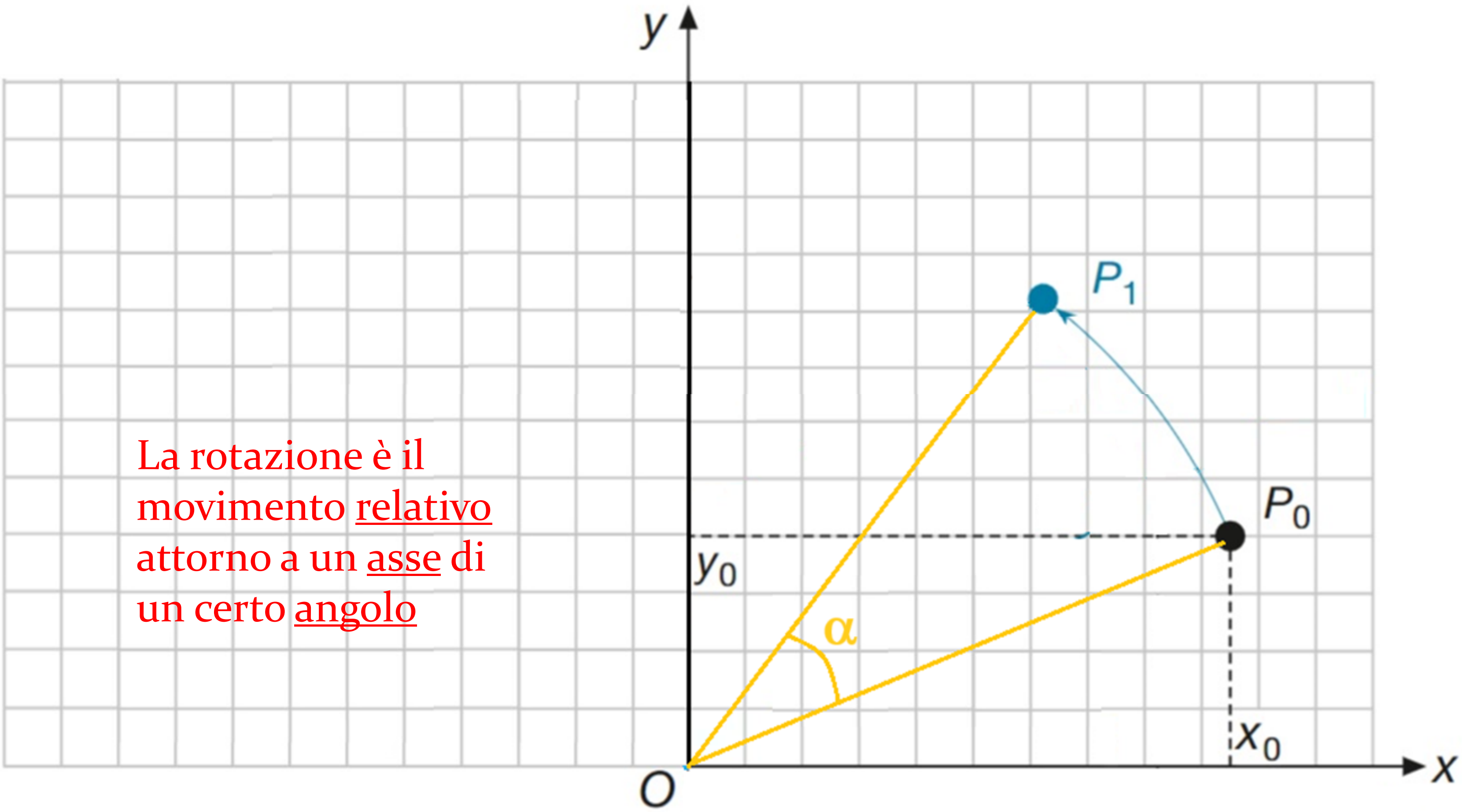
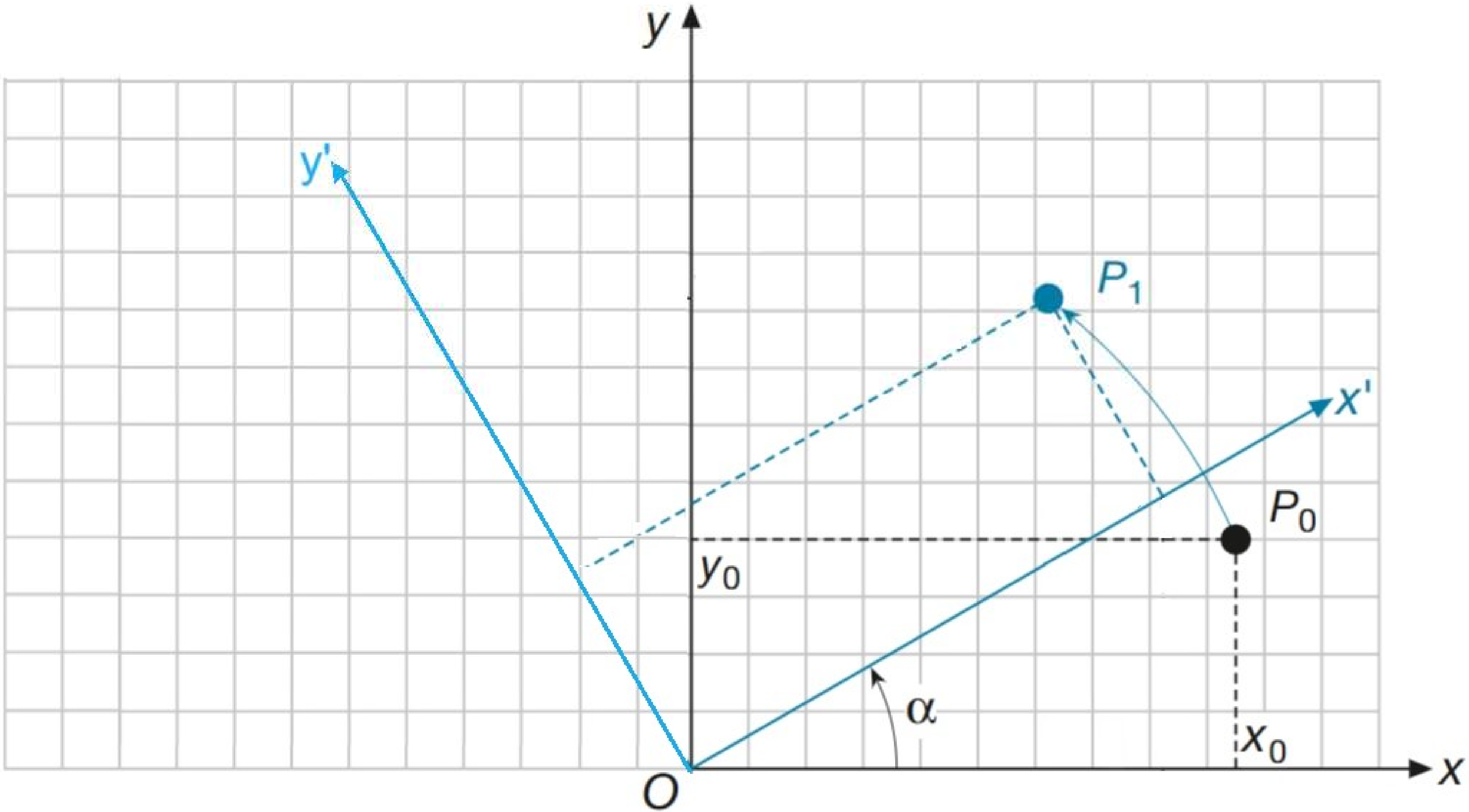


Dimostrazione della matrice di rotazione
e altri teoremi

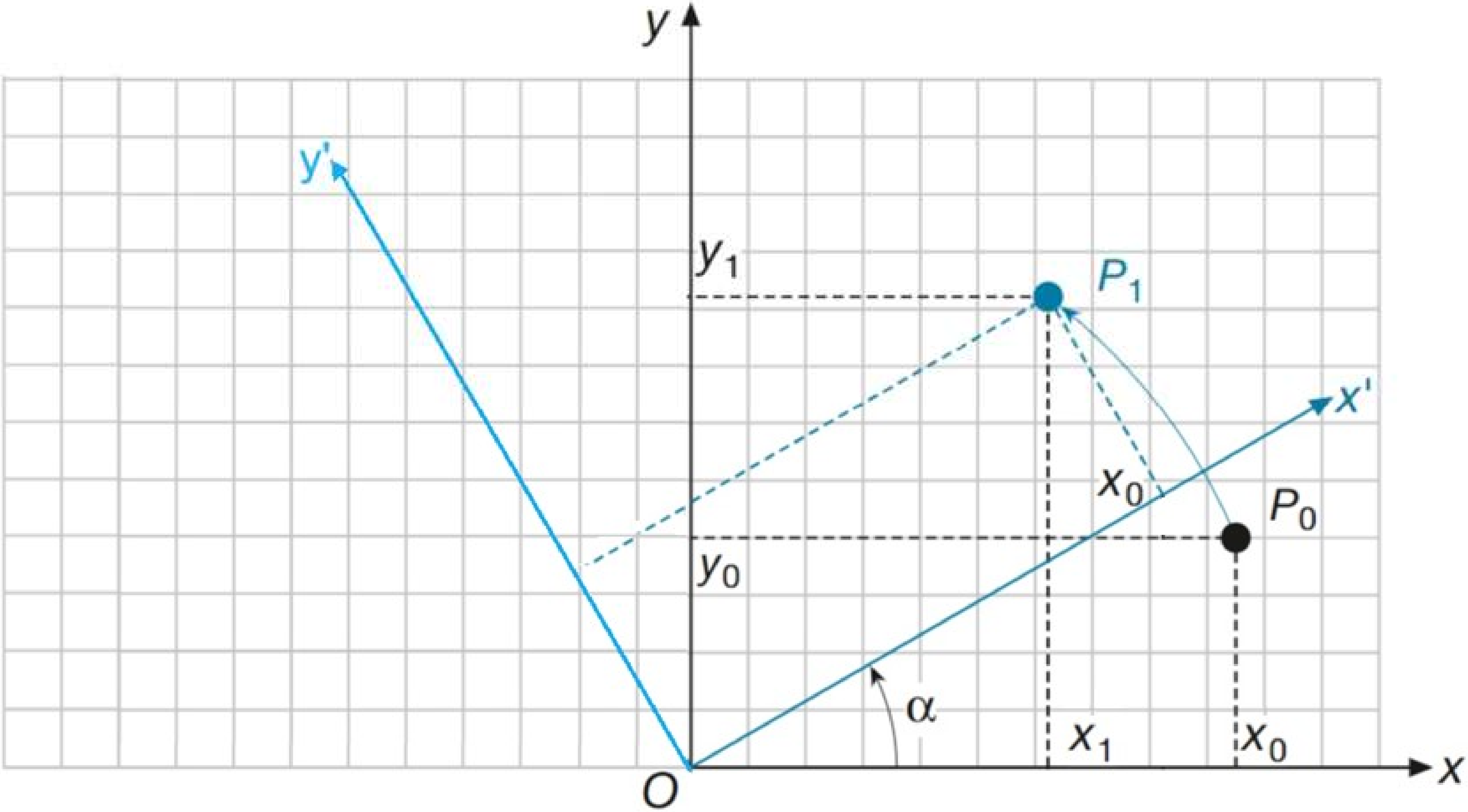




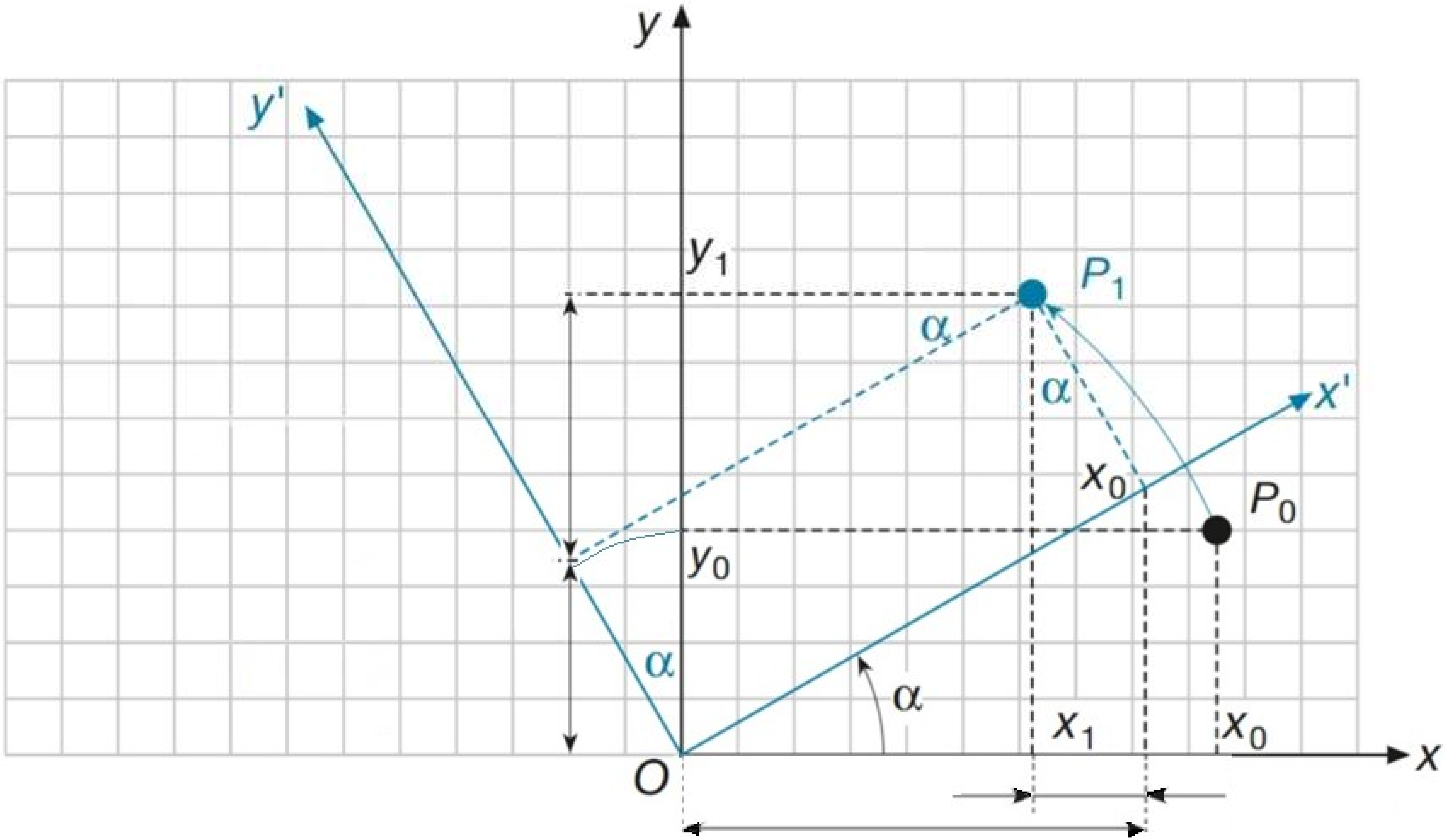
Si intende ruotare il punto P_o (x_o, y_o) attorno all'asse z di un angolo α



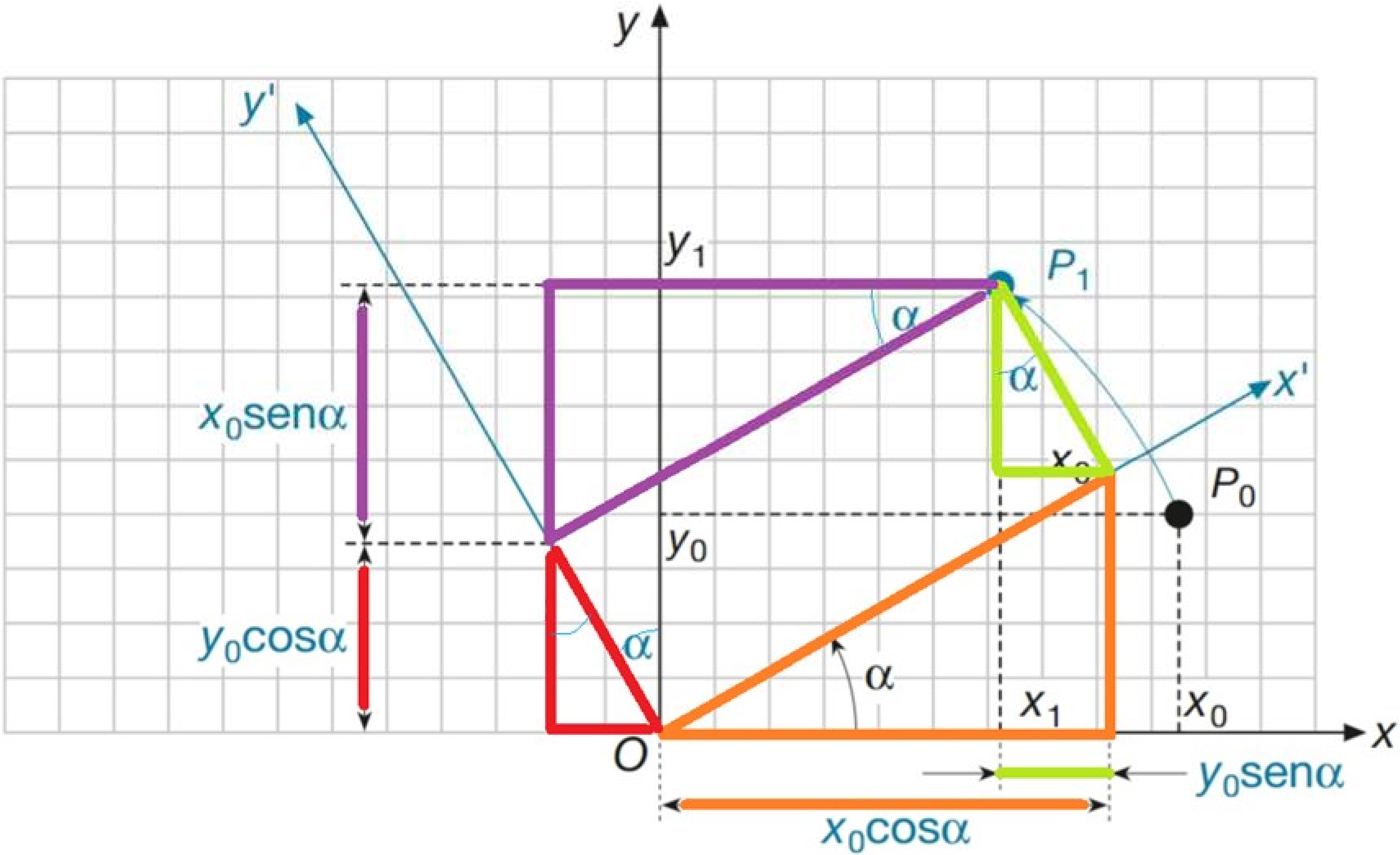
Possiamo interpretare la rotazione come rotazione della terna OXY, che si trascina assi e punto, che diventano P1 e OX'Y' (disegnati in azzurro)



Evidenziamo le coordinate di P_1 ; ci interessa determinare
la formula per ottenere x_1 e y_1 a partire da x_0 , y_0 e α



Tracciamo alcune parallele che ci verranno utili



Evidenziamo alcuni triangoli rettangoli aventi come angolo interno α
e ricaviamo le relazioni tra x_0 e y_0 e x_1 e y_1

Riassumendo: $$x_1 = x_0\cos\alpha - y_0\text{sen}\alpha$$
$$y_1 = x_0\text{sen}\alpha + y_0\cos\alpha$$

che si può anche scrivere (finalmente) in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

in cui:

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \boxed{R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}$$

e, in forma simbolica: $\boxed{\mathbf{P_1} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P_0}}$ in cui

R rappresenta in 2D la matrice di rotazione di α attorno a **z**

N.B.: *per ottenere la posizione finale del punto R si pre-moltiplica*

Qualche esempio di matrici di rotazione in 2D:

- $\mathbf{R}_{z90°}$ = [?]
- $\mathbf{R}_{z30°}$ = [?]
- $\mathbf{R}_{z45°}$ = [?]
- $\mathbf{P}_{o}$ = [9.5 ; 4] $\alpha = 30°$ $\longrightarrow$ $\mathbf{P}_{ruotato}$ = [? ?]
- → lavorare col foglio elettronico, per verificare ogni cosa

Alcune questioni:

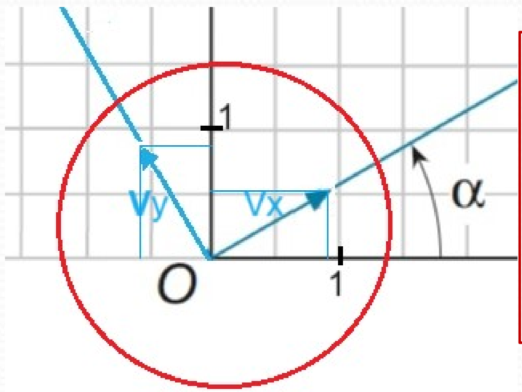
- Come si compongono le Rotazioni in 2D?
- $\mathbf{P_2 = R_1 \cdot R_2 \cdot P_0}$? **NO**, non cosi'!!!
- Ragionando … prima R_1, poi R_2, poi… si deduce la formula:
- $$\mathbf{P_N = \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot P_0}$$
- quindi anche: $\boxed{\mathbf{R_{tot} = \ldots \cdot R_2 \cdot R_1}}$
- notare la pre-moltiplicazione!!
- Le Rotazioni in 2D sono commutative?
- Come si compongono rotazioni con traslazioni ?
- Come si "estrae" l'orientazione dalla matrice di Rotazione?
- cioè: non "dato α trovare $\mathbf{R}_{z\alpha}$" bensì "data $\mathbf{R}_{z\alpha}$ determinare α"
- E se si desidera ruotare attorno a un asse non passante per l'origine ma per il punto $P_R = (x_R; y_R)$? ← super question!

Altre curiosità…

Gli elementi di una matrice di rotazione hanno alcune caratteristiche significative:

- $-1 \leq r_{ij} \leq +1$ (ci sono seni e coseni…)
- $|\mathbf{R}| = 1$
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ (è una matrice "ortogonale")
- ma… cosa rappresenta R^{-1} geometricamente?
- N.B. dei 4 elementi che compaiono nella matrice solo 1 è indipendente, in coerenza col fatto che i parametri di un'orientazione in 2D sono 1 uno solo; qual'è?
- Le colonne di **R** sono i versori degli assi ruotati!

$$R_{Z\theta} = \begin{array}{cc} V_X & V_Y \\ \end{array}$$
$$R_{Z\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Questa non è solo una curiosità ma una cosa potente e non è un caso!

E spiega il fatto che:

$-1 \leq r_{ij} \leq +1$

e in 3D ?

- $x_1 = x_0 \ldots + y_0 \ldots + z_0 \ldots$ (e, in mezzo ai puntini, ci saranno seni e coseni,,,)
- $y_1 = x_0 \ldots + y_0 \ldots + z_0 \ldots$
- $z_1 = x_0 \ldots + y_0 \ldots + z_0 \ldots$
- $\mathbf{R}_{z\alpha} = ?$ $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{R}_{z90°} = ?$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{R}_{x\alpha} = ?$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
- $\mathbf{R}_{y\alpha} = ?$ $\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Alcune questioni, in 3D:

- Come si <u>compongono</u> le Rotazioni in 3D?
- $\mathbf{P_N = \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot P_0}$
- $\boxed{\mathbf{R_{tot} = R_N \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1}}$
- notare la <u>pre</u>-moltiplicazione!!
- Le Rotazioni in 3D sono commutative?

- Come si compongono rotazioni con traslazioni in 3D ?
- come in 2D! ;-)

C'è nella verifica!

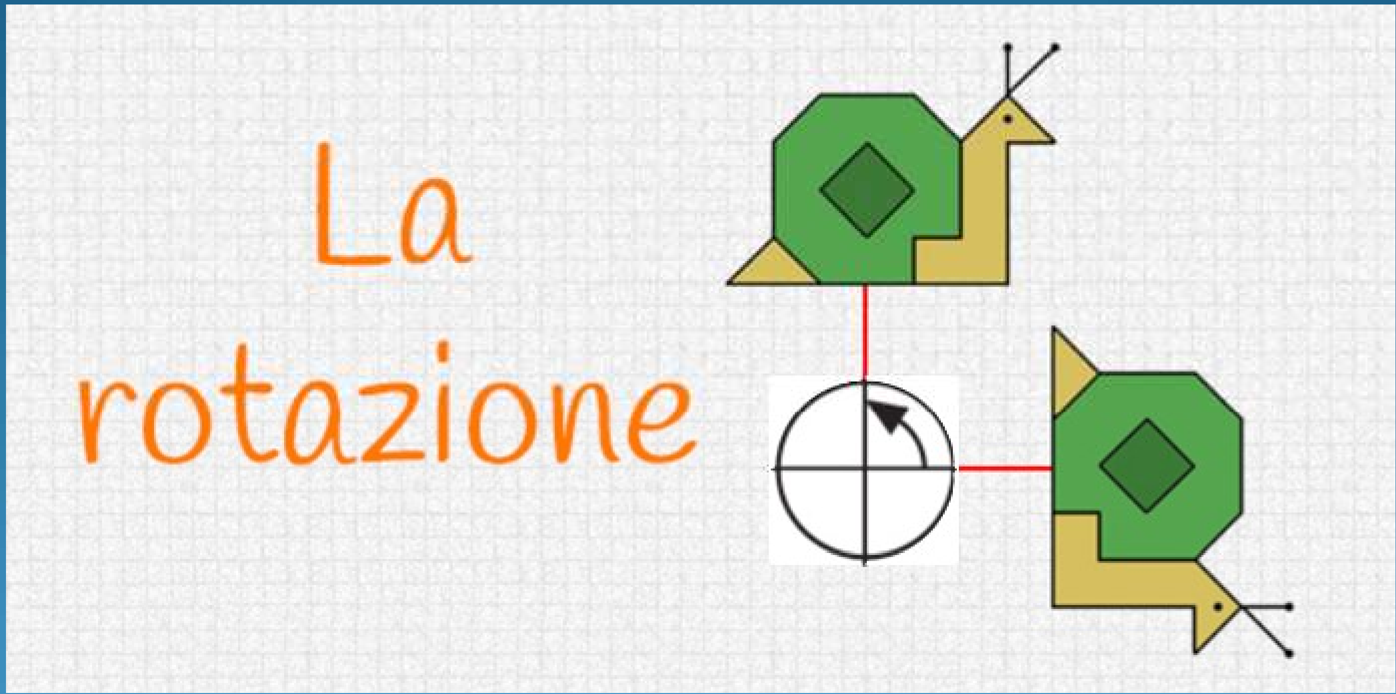
Altre curiosità…

Gli elementi di una matrice di rotazione in 3D hanno alcune caratteristiche significative:

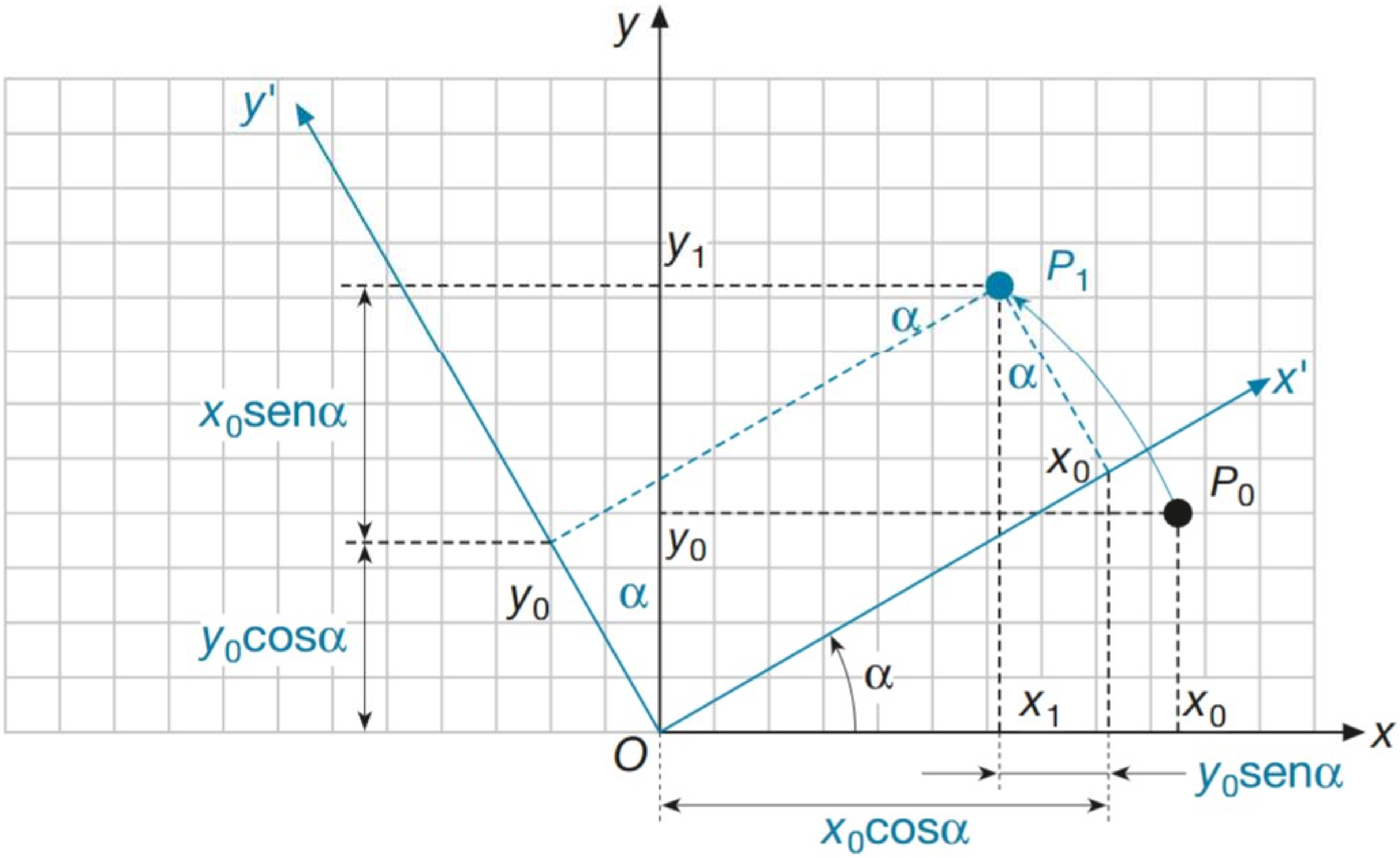
- $-1 \leq r_{ij} \leq +1$ (ci sono seni e coseni…)
- $|\mathbf{R}| = 1$
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$ (è una matrice “ortogonale”)
- Cosa rappresenta R^{-1} geometricamente?
- N.B. dei 9 elementi che compaiono nella matrice solo N sono indipendenti, in coerenza col fatto che i parametri di un’orientazione in 3D sono N; N=…?
- Le colonne di **R** sono i versori degli assi ruotati!

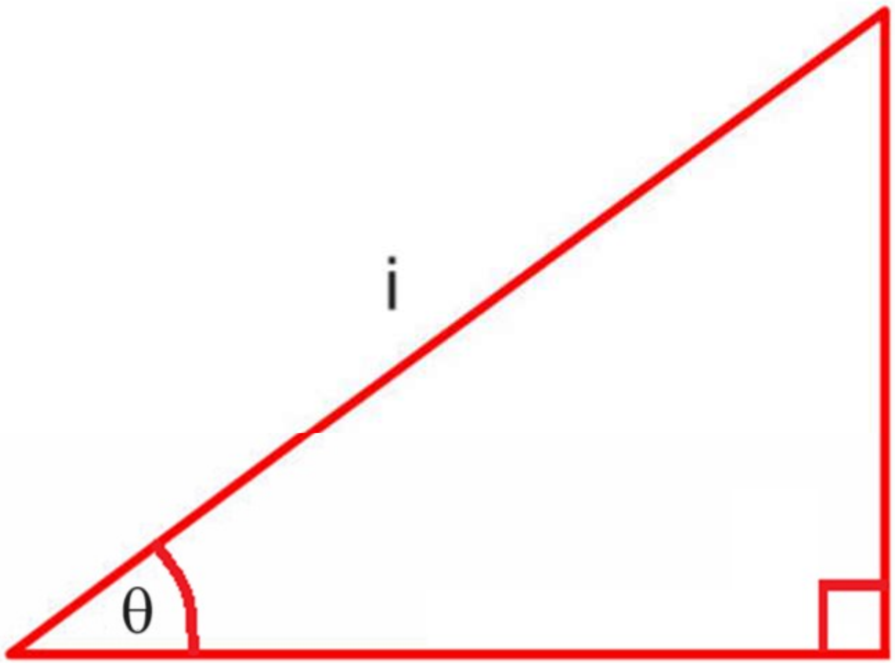
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_X & V_Y & V_Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Potente “strumento” per costruire matrici R di rotazione



Fine slide


y
y'
y_1
P_1
α
α
x'
$x_0\text{sen}\alpha$
x_0
P_0
y_0
y_0
α
$y_0\cos\alpha$
α
x_1
x_0
O
x
$y_0\text{sen}\alpha$
$x_0\cos\alpha$



$c_2 = i \cdot \mathrm{sen}(\theta)$

$c_2 = c_1 \cdot \tan(\theta)$

$c_1 = i \cdot \cos(\theta)$

link alla circonferenza goniometrica