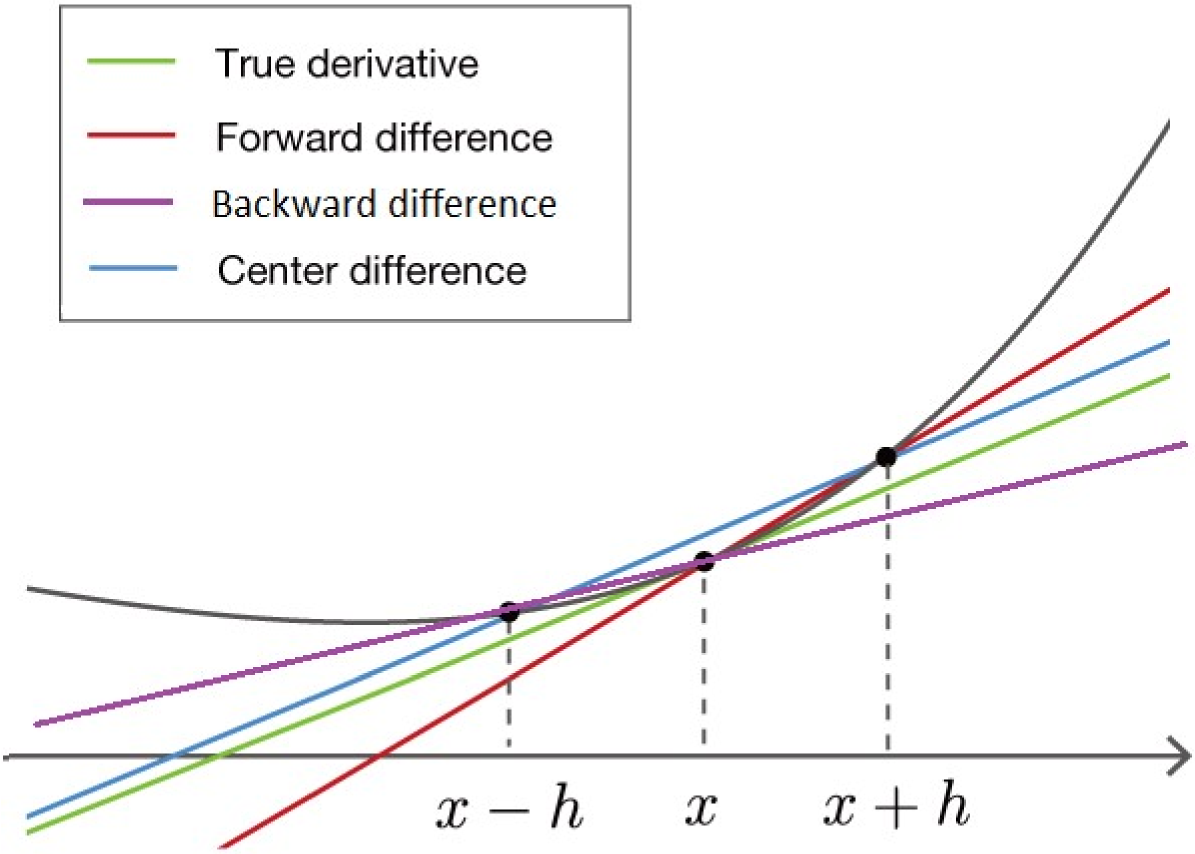
DIFFERENZIAZIONE NUMERICA

(Prof. Fischetti Pietro)

Si vuol calcolare numericamente le equazioni differenziali.

Metodo di approssimazione di Eulero



Forward difference (FD):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+\Delta x}) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Backward difference (BD):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-\Delta x})}{\Delta x}$$

Central difference (CD):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+\Delta x}) - f(x_{i+\Delta x})}{2\Delta x}$$

Dove:

x_i: punto di interesse

Δx: e' il passo

X_{i+1}: punto successivo al punto di interesse

X_{i-1}: punto precedente al punto di interesse

Esempio:

Approssimare la derivata di:

$$f(x) = x^2 + 2x \quad nel\ punto\ x = 3$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

In questo caso avremo:

$x_i=3$, $\Delta x=1$, $X_{i+1}=4$, $X_{i-1}= 2$, f(2)=8, f(3)=15, f(4)=24

quindi:

Forward difference (FD):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{1}$$

$$f'(3) \cong \frac{f(4) - f(3)}{1} = \frac{24 - 15}{1} = 9$$

Backward difference (BD):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{1}$$

$$f'(3) \cong \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{15 - 8}{1} = 7$$

Central difference (CD):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i+1})}{2 \cdot 1}$$

$$f'(3) \cong \frac{f(4) - f(2)}{2} = \frac{24 - 8}{2} = 8$$

RIPASSO

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Teorema di Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x) \cdot h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x) \cdot h^3}{3!} + O(h^4)$$

Da cui segue:

$$f'(x)h \cong f(x+h) - f(x) - \frac{f^{(2)}(x) \cdot h^2}{2!}$$

segue:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f^{(2)}(x) \cdot h^{\cancel{2}}}{2!\,\cancel{h}}$$

Infine:

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f^{(2)}(x) \cdot h}{2}$$

Quindi per piccoli valori di h il rapporto incrementale approssima la derivata con errore limitato da Mh/2 dove M e' il limite su |f''(x)| per x compreso tra x_0 e x_0+h.

Forward difference (FD):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f'(x)h = f(x+h) - f(x) + +O(h^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Backward difference (BD):

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f'(x)h = f(x) - f(x-h) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

Central difference (CD):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} - \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)h^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \cdots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Riepilogo:

Forward Difference:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

Backward Difference:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

Central Difference:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Da cui: FD e BD hanno un accuratezza simile mentre CD una accuratezza migliore.

ESEMPIO:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \qquad (a\ x = 0.5\ e\ step\ size\ h = 0.5\ e\ poi\ h = 0.25)$$

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

$$\Rightarrow f'(0.5) = -0.9125$$

h=0.5

f(x):f(0.5)=0.925, f(x-h): f(0)=1.2 f(x+h): f(1.0)=0.2

FD:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{-0.9125 + 1.45}{-0.9125}\right| = 58.9\%$$

BD:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{-0.9125 + 0.55}{-0.9125}\right| = 39.7\%$$

CD:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{-0.9125 + 1.0}{-0.9125}\right| = 9.6\%$$

h=0.25

f(x):f(0.5)=0.925, f(x-h): f(0.25)=1.1035 f(x+h): f(0.75)=0.6363

FD:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.6363 - 0.925}{0.25} = -1.155$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{-0.9125 + 1.155}{-0.9125}\right| = 26.5\%$$

BD:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.1035}{0.25} = -0.714$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{-0.9125 + 0.714}{-0.9125}\right| = 21.7\%$$

CD:

$$f'(0.5) \cong \frac{0.6363 - 1.1035}{0.5} = -0.934$$

$$|\varepsilon_t| = \left|\frac{-0.9125 + 0.934}{-0.9125}\right| = 2.4\%$$

Esempio:Utilizzare FD per approssimare la derivata di f(x)=lnx a x0=1.8 usando h=0.1, h=0.05 e h=0.01 e si determini il limite per l'errore di approssimazione:

$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Soluzione:

FD:

$$\frac{f(1.8 + h) - f(1.8)}{h}$$

Con h=0.1 si ha:

$$\frac{\ln 1.9 - \ln 1.8}{0.1} = \frac{0.64185389 - 0.58778667}{0.1} = 0.5406722$$

Poiche' :

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

e:

$$1.8 < \xi < 1.9$$

Il limite per l'errore di approssimazione e':

$$\frac{|hf''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2} < \frac{0.1}{2(1.8)^2} = 0.0154321$$

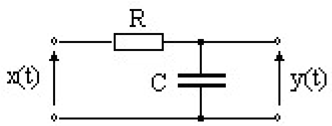
h	f(1.8+h)	$\frac{f(1.8+h) - f(1.8)}{h}$	$\frac{\lvert h \rvert}{2(1.8)^2}$
0.1	0.64185389	0.5406722	0.0154321
0.05	0.61518564	0.5479795	0.0077160
0.01	0.59332685	0.5540180	0.0015432

Figura riepilogativa:

ESEMPIO - Circuito RC

Cerchiamo il sistema discreto corrispondente ad un sistema continuo del primo ordine.

Un sistema del primo ordine e' ad esempio un circuito RC:



la cui equazione differenziale e':

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Passando al caso discreto utilizzando Eulero BD:

$$RC\left[\frac{y(nT) - y(nT-T)}{T}\right] + y(nT) = x(nT)$$

con semplici passaggi si ottiene:

$$y(nT) = \frac{1}{1 + T/RC}\,y(nT-T) + \frac{T/RC}{1 + T/RC}\,x(nT)$$

Cioe':

$$y(0\cdot T)=\frac{1}{1+T/RC}y(0\cdot T-T)+\frac{T/RC}{1+T/RC}x(0\cdot T)$$
$$y(1\cdot T)=\frac{1}{1+T/RC}y(1\cdot T-T)+\frac{T/RC}{1+T/RC}x(1\cdot T)$$
$$y(2\cdot T)=\frac{1}{1+T/RC}y(2\cdot T-T)+\frac{T/RC}{1+T/RC}x(2\cdot T)$$

....

ponendo:

$$a_1=\frac{-1}{1+T/RC}$$

$$b_0=\frac{T/RC}{1+T/RC}$$

si ottiene la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(nT)=-a_1 y(nT-T)+b_0 x(nT)$$

RC – Simulazione in Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def GenSquare(A = 1.,B=0,dc = 0.5,f = 1000,R = 16.*1024,    N = -1):
   i=0
   t =0.
   Ts = 1./R
   samplesPerPeriod=0
   x=[]
   if(0!=f):
      if (N < 0):
         N=int(R/f)
      samplesPerPeriod = int(R / (f))
   else:
      samplesPerPeriod = N
   firstLength = int(dc * samplesPerPeriod)
   for i in range(N):
      k = i % samplesPerPeriod
      x.append( A if k < firstLength else B)
   return x


Rs = 16.*1024   #Freq. di campionamento
T=1./Rs

R=1000.
C=1.E-6
```

```
tau=R*C

print tau,T,1./tau,1./T

if((1./T)<2*(1./tau)):
   print "Warning: Time Sampling insufficient"
f=1./(20E-3)   #Freq. del segnale
NCycles=1 #Numero di periodi del segnale generato
N=int(Rs / (f))*NCycles #Simulazione:Numero di campioni
x=GenSquare(N=N,f=f,R=Rs)

t = np.linspace(0, NCycles*1./f, int(N))
y = [0] * N
for i in range(N):
   if(i>0):#Circuito RC + Eulero BD
      y[i]=(1./(1.+T/(R*C)))*y[i-1]+(T/(R*C))/(1+T/(R*C))*x[i]

plt.plot(t, x)
plt.plot(t, y)
plt.xlabel('t, s')
plt.ylabel('V')
plt.ylim(-0.1, 1.1)
plt.grid()
plt.show()
```

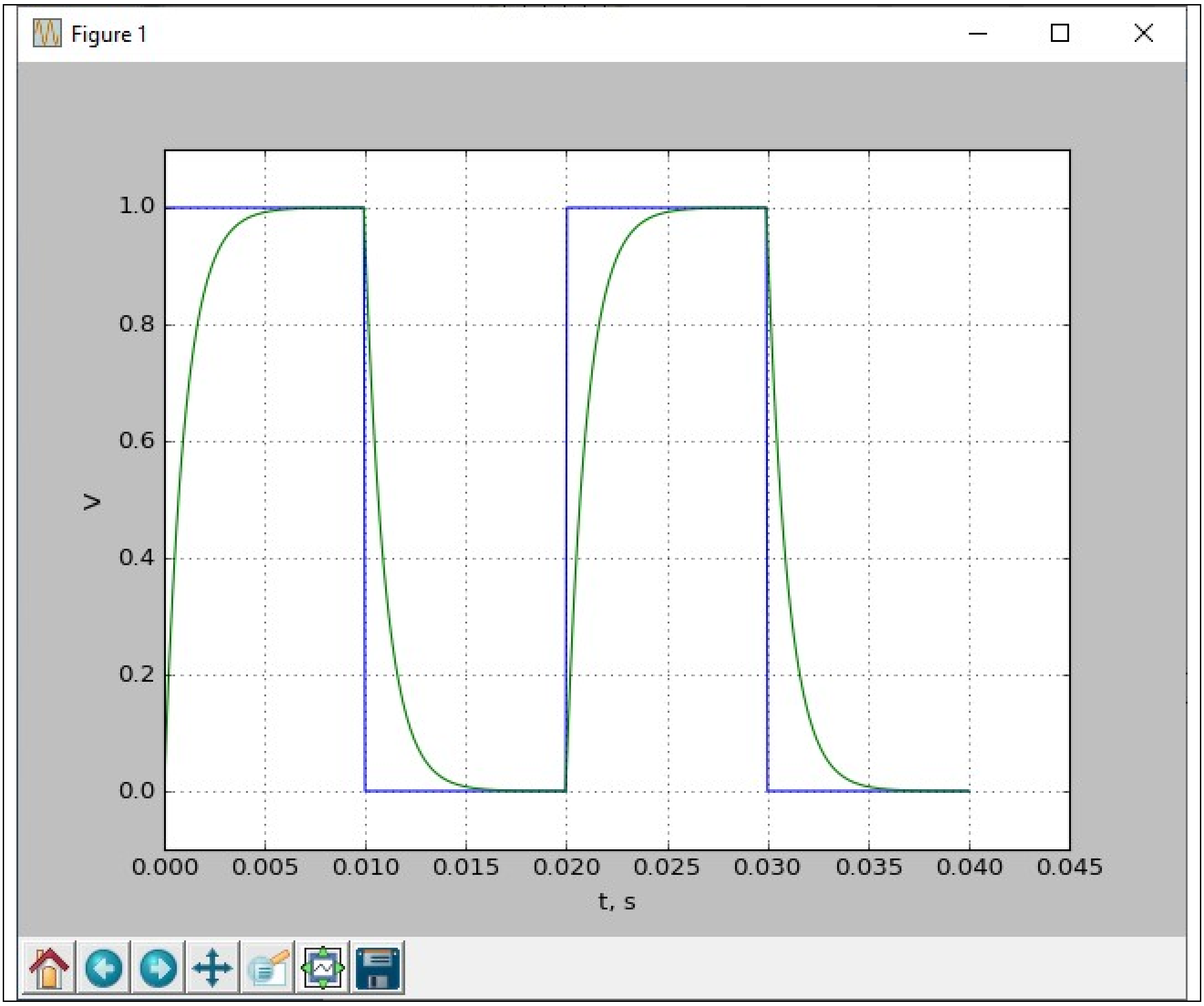


Figure 1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
V
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0.040
0.045
t, s