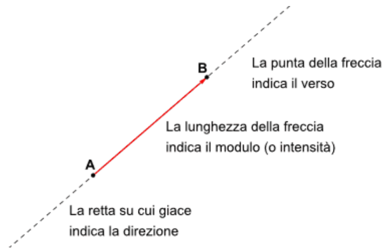
20/1/2019

MS

Robotica Industriale

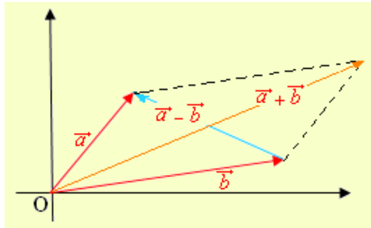
Aspetti matriciali in Robotica – appunti | *prof M. Sante*

VETTORI



Un vettore $\underline{v}$ [1] è un oggetto geometrico caratterizzato da: **modulo** (lunghezza o dimensione) indicato con $|\underline{v}|$, **direzione** e **verso**. Usualmente si disegna come una freccia.

I vettori si compongono (sommano) con la regola del parallelogramma, in cui la somma è la diagonale principale.



La differenza si ricava come operazione inversa della somma; ovvero $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$ si può definire come il vettore che sommato a $\underline{b}$ produce $\underline{a}$; corrisponde alla diagonale secondaria del parallelogramma con lati $\underline{a}$ e $\underline{b}$, con la punta della freccia rivolta al primo vettore.

Nel fare i disegni si disegnino i vettori a partire dall'origine.

Ecco alcune importanti definizioni di operazioni coi vettori

Prodotto per uno scalare $k \cdot \underline{v}$: con $k>0$ è quel vettore con identica direzione e stesso verso di $\underline{v}$, e modulo uguale a $k \cdot |\underline{v}|$; se $k<0$ allora il modulo è $|k| \cdot |v|$ e il verso opposto all'originale

Prodotto scalare tra due vettori che formano un angolo θ: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos\theta$; tale operazione è commutativa; il prodotto scalare è un numero (uno "scalare"). Il prodotto scalare tra due vettori perpendicolari dà come risultato 0. Non si confonda "prodotto scalare" con "prodotto per uno scalare"

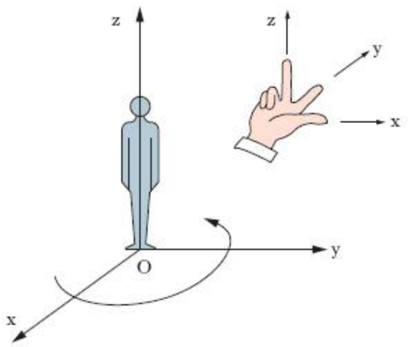
Prodotto vettoriale tra due vettori che formano un angolo θ: $\underline{a} \wedge \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \sin\theta\ \underline{n}$ dove $\underline{n}$ è la normale al piano individuato da $\underline{a}$ e $\underline{b}$; il prodotto vettoriale è un vettore; il verso si deduce con la regola della mano destra; tale prodotto non è commutativo ($\underline{b} \wedge \underline{a}$ presenta modulo e direzioni identiche ma verso opposto). Il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli dà come risultato 0.

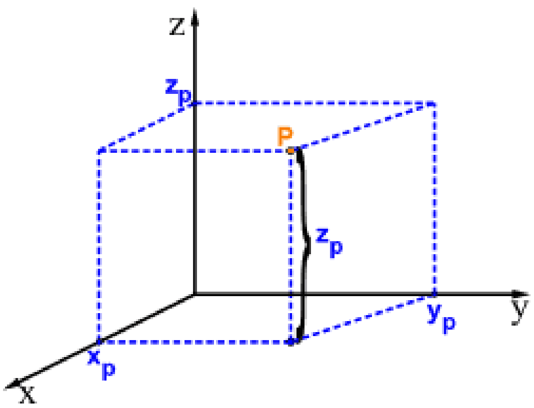
VETTORI E TERNE CARTESIANE

Una terna cartesiana è un insieme costituito da un'origine O e da 3 vettori $\underline{v}_x$, $\underline{v}_y$, $\underline{v}_z$ di lunghezza unitaria (detti "versori") tra loro ortogonali, emergenti da O, che definiscono le direzioni x, y, z di un sistema di coordinate cartesiane; spesso la terna viene indicata con OXYZ a rappresentarne gli elementi costituenti. I 3 versori sono orientati secondo la regola della mano destra (figura in basso a sinistra). Il prodotto scalare tra due versori qualunque è 0, mentre $\underline{v}_x \wedge \underline{v}_y = \underline{v}_z$ e così via ciclicamente.

Dato il vettore $\underline{a}$ le sue coordinate si ottengono facendo il prodotto scalare del vettore con i versori, ovvero:

$a_x = \underline{a} \cdot \underline{v}_x \qquad a_y = \underline{a} \cdot \underline{v}_y \qquad a_z = \underline{a} \cdot \underline{v}_z$





[1] Di norma un vettore viene rappresentato con la barra superiore (ā); nel testo è inferiore ($\underline{a}$) per comodità del redattore

VETTORI & MATRICI

Un vettore può essere rappresentato graficamente con una freccia che emerge dall'origine degli assi cartesiani; la punta del vettore individua un punto, con le sue coordinate; un vettore si può quindi rappresentare analiticamente con una tripla di numeri ordinati (x, y, z) che sono le coordinate del punto terminale (la freccia). In notazione matriciale un vettore viene rappresentato con una matrice 3x1 (in verticale); per comodità di scrittura nei testi viene riportata in orizzontale, come trasposta, per esempio: $[3,4,5]^T$ o più in generale $[x,y,z]^T$.

Un vettore di lunghezza unitaria è diretto nel piano (x,y) secondo la bisettrice del primo quadrante; quali sono le sue coordinate in 2D? Tale vettore si "alza" di 45° sul piano cartesiano, verso la 3ª dimensione; quali sono le sue coordinate (x,y,z)?

Ci sono interessante risvolti analitici. Il prodotto di un vettore per uno scalare diventa il prodotto di una matrice per uno scalare. Per quanto riguarda il prodotto scalare tra due vettori <u>a</u> e <u>b</u> si può dimostrare che è uguale a ($a_x*b_x+a_y*b_y+a_z*b_z$) e quindi si può eseguire con le matrici, considerando la trasposta del primo vettore, così: $a^T \cdot b$ Il modulo del vettore si ottiene con la formula: $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, estensione in 3D del teorema di Pitagora; si dimostra facilmente che: $|\underline{a}| = \sqrt{(\underline{a} \cdot \underline{a})} = \sqrt{(a^T \cdot a)}$

Quanto vale il modulo del vettore dell'esercizio precedente in 2D e in 3D?

Due vettori hanno coordinate: $[1,2,3]^T$ e $[3,2,1]^T$; quanto vale l'angolo che formano?

VETTORI, TRASLAZIONI E MATRICI

<u>Una traslazione $\mathbb{T}$ è uno spostamento lungo una direzione&verso di una certa quantità</u>; <u>una traslazione cambia la posizione di un corpo</u>/punto. Una traslazione può convenientemente essere rappresentata con un vettore; quindi può essere trattata con le matrici 3x1.

In Robotica è usuale avere a che fare con le Traslazioni perché i movimenti indotti dai giunti prismatici modificano la posizione dell'estremità del segmento robotico lungo una certa direzione; inoltre il posizionamento dell'end-effector di un braccio robotico equivale a portare tale estremità in un determinato punto, si tratta quindi di una traslazione.

Dato un punto P di coordinate (Px,Py,Pz) che rappresenteremo con la matrice P di tipo 3x1, e data una traslazione $\mathbb{T}$ anch'essa rappresentata da una matrice 3x1, le coordinate del punto traslato si ottengono con la formula matriciale: $\mathbf{P}_{\mathbf{traslato}} = \mathbf{P} + \mathbb{T}$

In presenza di due o più traslazioni la formula diventa:

$$\boxed{\mathbf{P}_{\mathbf{traslato}} = \mathbf{P} + \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 + \ldots}$$

Le traslazioni sono trasformazioni commutative ovvero, indipendentemente dall'ordine con cui vengono eseguite, portano allo stesso risultato finale; anche le somme tra matrici sono commutative, le cose tornano e la formula di sopra ha validità generale.

Un escursionista segue un sentiero che porta a una cima seguendo le indicazioni che ha trovato in Internet. Rispetto all'auto (OXY, con Y= direzione Nord) l'inizio del sentiero si trova a $[10,0]^T$ con coordinate espresse in ettometri. Le indicazioni dicono di seguire il sentiero a N per 1 km, poi a E per un altro km, poi a S per l'ultimo km. Trovare analiticamente le matrici di traslazione ($\mathbb{T}1$, $\mathbb{T}2$, $\mathbb{T}3$) dei singoli spostamenti; comporle in un'unica matrice di traslazione complessiva $\mathbb{T}$ e infine trovare analiticamente il punto di arrivo. Successivamente disegnare i vettori sulla *carta e verificare se le proprie conclusioni sono consistenti. Arrivati a destinazione descrivere la posizione dell'auto rispetto alla cima (ragionare bene su questa richiesta).*

Un escursionista segue un sentiero che porta a una cima seguendo le indicazioni che ha trovato in Internet. Rispetto all'auto (OXY) l'inizio del sentiero si trova a $[0,20]^T$ con coordinate espresse in ettometri; le indicazioni dicono di seguire il sentiero a NO per 1 km, poi a NE per un altro km, poi a SE per gli 300m. Trovare analiticamente le matrici di traslazione ($\mathbb{T}1$, $\mathbb{T}2$, $\mathbb{T}3$) dei vari spostamenti; comporle in un'unica matrice di traslazione complessiva $\mathbb{T}$; trovare analiticamente il punto di arrivo. Successivamente disegnare i vettori sulla carta e verificare se le proprie conclusioni sono consistenti. Descrivere la posizione dell'auto rispetto alla cima.

Un escursionista segue un sentiero che porta a una cima seguendo gli azimut che ha trovato in Internet. Rispetto all'auto (OXY) l'inizio del sentiero si trova a $[5,5]^T$ (le coordinate sono espresse in ettometri); le indicazioni dicono di seguire il sentiero con azimut 30° per 1 km, poi a 60° per 500m, poi a 90° per 800m. Trovare analiticamente le matrici di traslazione ($\mathbb{T}1$, $\mathbb{T}2$, $\mathbb{T}3$) dei vari spostamenti; comporle in un'unica matrice di traslazione complessiva $\mathbb{T}$; trovare analiticamente il punto di arrivo. Successivamente disegnare i vettori sulla carta e verificare se le proprie conclusioni sono consistenti. Descrivere la posizione dell'auto rispetto alla cima.

In Robotica è usuale avere a che fare con la <u>Traslazione (e/o Rotazione) di una terna cartesiana</u>. L'idea origina dal fatto che se penso a un corpo <u>rigido</u> in movimento rispetto a un sistema di riferimento sono interessato a definire la sua posizione e la sua orientazione (**P&O**) nello spazio; pensando di ancorare una terna x'y'z' al corpo, fissata in un punto O' che scelgo io, la posizione e orientazione del corpo sono descritte dalla posizione e orientazione di questa terna O'x'y'z'. Per quanto riguarda la posizione sarà definita dalla traslazione O-O'; per quanto riguarda l'orientazione si vedrà più avanti.

Vediamo un tipico contesto di applicazione. In un sistema di riferimento OXYZ è presente un corpo rigido,; al corpo àncoro una terna "mobile" O'x'y'z' e per il momento la faccio coincidere con OXYZ. Un generico punto P del corpo ha coordinate (Px,Py,Pz) sia in OXYZ sia in O'x'y'z'. Successivamente il corpo viene spostato, solidalmente con la sua terna mobile; alla fine dello spostamento si avrà il corpo (e parimenti la sua terna mobile) in un'altra posizione e con un'altra orientazione; le coordinate di P rispetto O'x'y'z' restano invariate, ma cambiano rispetto OXYZ. Se ci limitiamo per ora al solo movimento di traslazione le coordinate del punto dopo lo spostamento si possono trovare con la formula precedente, quella incorniciata, nella quale $\mathbb{T}$ =OO'.

D'ora in poi le cose si complicheranno un po' perché ogni volta che parliamo delle coordinate di un punto dovrà essere ben chiaro in quale sistema di riferimento sono determinate. Per esempio, tornando alla formula precedente: $\mathbf{P_{traslato} = P +} \mathbb{T}$ sapreste dire a quali sistemi di riferimento si riferiscono $P_{traslato}$ e P? OXYZ oppure O'x'y'z'? E per concludere: a quale sistema sarà riferita $\mathbb{T}$?

ROTAZIONI E MATRICI

Più o meno tutti hanno presente il concetto di rotazione: <u>una rotazione è un movimento attorno a un asse di rotazione di un certo angolo θ</u>; es.: un oggetto si muove attorno all'asse z di 90°; oppure: un oggetto ruota attorno alla bisettrice del primo quadrante di 60°. Nel caso di rotazioni si adotta la convenzione in figura: messo il pollice in linea con direzione e verso dell'asse, le altre dita specificano il verso di rotazione convenzionale rispetto al quale sono misurati gli angoli.

Una rotazione cambia l'orientazione di un corpo. A seguito di una rotazione può cambiare anche la posizione di un corpo (o di un punto[2]). Le rotazioni possono essere combinate, una di seguito all'altra, secondo un certo ordine. Il movimento risultante di più rotazioni successive si può sempre rappresentare con un'unica rotazione attorno a un certo asse di un certo angolo[3].

In Robotica è usuale avere a che fare con le Rotazioni perché i movimenti indotti dai giunti rotoidali modificano la posizione dell'estremità del segmento robotico facendolo ruotare attorno all'asse di rotazione del giunto.

Come si può descrivere una rotazione? Gli angoli di Eulero o gli angoli RPY[4] descrivono un'orientazione, qualunque essa sia, come una sequenza di 3 rotazioni base, caratterizzate da 3 angoli, attorno a 3 assi; quindi in ballo ci sono 3 angoli (3 parametri) di rotazione. In sintesi: una rotazione è completamente definita da 3 parametri (3 angoli).

Per descrivere analiticamente una rotazione di un corpo si usa considerare una terna cartesiana-fissa e una terna-mobile, inizialmente coincidente con quella fissa e ancorata al corpo da ruotare; una rotazione del corpo è una rotazione della terna mobile, lascia invariate le origini delle terne, muove gli assi della terna mobile e ne cambia l'orientazione. Chiamiamo la terna fissa OXYZ e la terna mobile O'x'y'z' inizialmente solidali; si ruoti come si vuole O'x'y'z' attorno a OXYZ, mantenendo bloccato O' in O; alla fine i versori di O'x'y'z' punteranno in determinate direzioni; ebbene: i versori x'y'z'descrivono compiutamente l'orientazione di O'x'y'z'. Essendo 3 i versori di O'x'y'z'avremo descritto la rotazione con l'insieme di 3 vettori, ovvero di 3 matrici 3x1; se le affianchiamo si ottiene una matrice ℝ di tipo 3x3 con chiaro significato dei suoi elementi: la prima colonna rappresenta le coordinate del primo versore mobile ($\underline{v}_{x'}$) rispetto alla terna fissa, la seconda colonna rappresenta $\underline{v}_{y'}$, la terza $\underline{v}_{z'}$. In sintesi:

$$\begin{bmatrix} v_{x'X} & v_{y'X} & v_{x'X} \\ v_{x'Y} & v_{y'Y} & v_{x'X} \\ v_{x'Z} & v_{y'Z} & v_{x'X} \end{bmatrix}$$

La notazione è pesante; con un esempio forse si capisce meglio:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La prima colonna dice che il versore $\underline{v}_{x'}$ della terna mobile (quello incorniciato) è stato ruotato e ora le sue coordinate sono $[0\ 1\ 0]^T$; la sua punta ora si trova tutta in direzione Y (vedi il rosso). La seconda colonna descrive le nuove coordinate del versore $\underline{v}_{y'}$ sono $[-1\ 0\ 0]^T$; stesso discorso per l'ultimo versore.

Giocando in 2D la matrice avrebbe dimensioni 2x2; all'inizio conviene fare gli esempi in 2D, per poi estenderli.

Una rotazione nello spazio 3D è completamente definita da una matrice 3x3 costruita secondo le convenzioni prima esposte. Facendo degli esempi si noterebbe che gli elementi della matrice di rotazione sono numeri reali con modulo ≤1 (infatti si tratta della proiezione di un vettore di lunghezza unitaria lungo un determinato asse). Inoltre, benché le matrici contengano 9 elementi, di essi solo 3 sono realmente indipendenti; ciò si spiega con i vincoli sul modulo unitario dei versori (3 vincoli) e sull'ortogonalità reciproca tra i versori (altre 3 condizioni). Pertanto, con questi vincoli, i parametri di una rotazione 3D sono

[2] *Quando si parla di un punto – tipicamente adimensionale – non ha senso parlare di orientazione. Però ha senso parlare di rotazione di un punto; un punto può essere ruotato attorno ad un generico asse, cambiando così la sua posizione*

[3] *È il teorema di Eulero*

[4] *Angoli di Eulero e angoli RPY sono due convenzioni che descrivono un'Orientazione mediante 3 rotazioni successive attorno agli assi "correnti"*

9-3-3 = 3 , e la cosa torna perfettamente con le caratteristiche già enunciate di una rotazione. Tradotto per noi: non è che se mi invento una matrice 3x3 con numeri a caso essa rappresenti sicuramente una rotazione; per esempio: se un elemento di tale matrice fosse maggiore di 1 sono certo che essa non descrive una rotazione.

Interpretare geometricamente le altre due colonne della matrice precedente. Interpretare geometricamente tutta la matrice e la rotazione che essa rappresenta.

Scrivere la matrice $\mathbb{R}$ di rotazione in 2D di 90° (per convenzione l'asse di rotazione è quello che "spunta" dal piano cartesiano e dall'origine, con verso rivolto all'osservatore[5] e si prendono gli angoli in senso antiorario); si operi dapprima disegnando la terna O'x'y' ruotata e successivamente ricavando le coordinate dei versori di O'x'y'

Scrivere in 2D la matrice $\mathbb{R}$ di rotazione di un generico angolo Θ

Scrivere in 2D la matrice unitaria $\mathbb{R}$ (quella che corrisponde a una rotazione nulla, con Θ=0°)

Scrivere in 3D la matrice $\mathbb{R}$ di rotazione di 90° attorno all'asse z; ripetere con l'asse x e poi con l'asse y

Scrivere la matrice $\mathbb{R}$ di rotazione in 3D di un generico angolo Θ attorno all'asse z; ripetere con l'asse x e poi con l'asse y

<u>La matrice di rotazione $\mathbb{R}$</u> non solo "rappresenta" la rotazione, ma <u>consente di fare i calcoli sulle rotazioni</u>!! Per esempio si può determinare la posizione di un punto dopo una rotazione utilizzando $\mathbb{R}$. Basta fare il classico prodotto tra matrici; facendo il prodotto $\mathbb{R}$xP si ottengono le coordinate del punto ruotato; analogamente a quanto detto per la traslazione possiamo scrivere $P_{ruotato} = \mathbb{R} x P$

Esempio: per ruotare il punto P $[3,4,5]^T$ in 3D di 90° attorno all'asse z dobbiamo eseguire il seguente prodotto:

$$P_{ruotato} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Calcolare le coordinate di $P_{ruotato}$

Eseguendo più rotazioni $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, … il risultato complessivo si ottiene combinando le singole operazioni con il calcolo matriciale:

$$\boxed{P_{ruotato} = \ldots x \mathbb{R}_2 x \mathbb{R}_1 x P}$$

N.B.: Attenzione all'ordine: prima si esegue $\mathbb{R}_1$ su P poi, ottenute le nuove coordinate si procede con la successiva rotazione; quindi le rotazioni successive si applicano a sinistra del prodotto (in gergo si dice "pre-moltiplicare").

Il prodotto tra matrici non è commutativo, ma associativo sì; pertanto nella formula $P_{ruotato} = \mathbb{R}_2 x \mathbb{R}_1 x P$ si può eseguire dapprima il prodotto $\mathbb{R}_2 x \mathbb{R}_1$ e poi moltiplicare per P, e il risultato non cambia. Sappiamo che combinando 2 rotazioni si ottiene ancora una rotazione, pertanto il prodotto $\mathbb{R}_2 x \mathbb{R}_1$ costituisce una matrice di rotazione! Possiamo quindi scrivere: $\mathbb{R}_2 x \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_{TOT}$. Una cosa a cui prestare attenzione è l'ordine di scrittura, perché $\mathbb{R}_2 x \mathbb{R}_1 \neq \mathbb{R}_1 x \mathbb{R}_2$; in altri termini: ricordarsi sempre che la rotazione successiva deve pre-moltiplicare.

Calcolare la rotazione complessiva ottenuta ruotando dapprima attorno a z di 90° e successivamente attorno a y di 45°. Rieseguire il calcolo invertendo l'ordine delle 2 rotazioni; commentare i risultati.

[5] *Se pensiamo a un vettore come una freccia con punta e coda, capiamo perché un vettore che "entra" (si tuffa) nel piano del foglio o che"esce" (emerge) dal piano del foglio venga rappresentato con questi simboli:* $\otimes$ $\odot$

Calcolare la rotazione complessiva ottenuta ruotando dapprima attorno a x di 90°, poi attorno a y di 90° e infine a attorno a z di 90°; commentare i risultati.

Le matrici di rotazione hanno proprietà interessanti e comode; per esempio <u>la matrice inversa di $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}^T$</u> !! in gergo matematico le matrici con questa proprietà ($\mathbb{R}^{-1}=\mathbb{R}^T$) si dicono “ortogonali”. <u>L’inversa di una matrice $\mathbb{R}$ rappresenta la rotazione contraria</u>; ovvero combinando prima $\mathbb{R}$ e poi $\mathbb{R}^{-1}$ si ritorna alla posizione iniziale; ovvero $\mathbb{R}^{-1}\mathrm{x}\mathbb{R}$ è la matrice identità $\mathbb{I}$; si ottiene lo stesso risultato calcolando $\mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}^{-1}$ (meno male); è un caso particolare che non viola la regola generale di non-commutatività del prodotto matriciale. Per la cronaca, le matrici di rotazione di cui ci occupiamo hanno determinante 1.

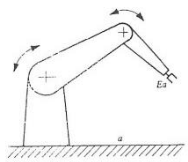
calcolare la matrice di rotazione 3D attorno all’asse z di -90°; successivamente verificare se coincide con l’inversa (o la trasposta) della matrice di rotazione di 90° attorno all’asse z

ROTOTRASLAZIONI (movimenti composti)

Come nella realtà anche nel calcolo matriciale si possono combinare rotazioni con traslazioni, senza problemi, nell’ordine che si vuole. Si parte da P, si applica a sinistra la prima rotazione/traslazione, e si procede così, sempre applicando a sinistra la nuova trasformazione; quello che si ottiene sono le coordinate di P rototraslate, rispetto al sistema di riferimento OXYZ. Una combinazione di rotazioni e traslazioni risulta alla fine come un’unica complessiva rototraslazione.

Scrivere la rototraslazione ottenuta ruotando attorno a z di 90° e poi traslando di [1, 2, 3]; si prosegua ruotando attorno a x di 45°

Considerate la figura a destra; è rappresentato un braccio robotico con due segmenti (link) e due giunti (joint) rotoidali. Ci sono parti mobili, rotanti. L’estremità del braccio (la pinza, l’”end effector” [6]) ruota attorno al secondo giunto che, a sua volta, ruota attorno al primo giunto. Possiamo mettere 3 terne: la prima OXYZ solidale con la parte fissa, quella agganciata al piano; la seconda O’x’y’z’ in fondo al primo link, la terza O”x”y”z” in fondo al secondo link, dal polso. È tipica la richiesta di descrivere la posizione dell’end effector rispetto alla terna fissa. Esso avrà P” come coordinate rispetto a O”x”y”z”; per sapere le coordinate rispetto O’x’y’z’ (ovvero P’) e conoscendo la rotazione $\mathbb{R}$’ che porta la terna O’x’y’z’ nella terna ”x”y”z”attorno a O’ e poi la traslazione $\mathbb{T}$’ che porta O’ in O”; si opera matricialmente come segue: P’ = $\mathbb{R}$’P” + O’O” [7]



Un calcolo analogo deve essere realizzato per ottenere le coordinate rispetto alla terna fissa, definendo la rotazione $\mathbb{R}$ attorno a O e la traslazione $\mathbb{T}$ che porta O in O’; senza entrare nei dettagli si può intuire che i termini aumentano a ogni traslazione; per eseguire 2 rototraslazioni sono necessari 3 termini; con 3 rotazioni si arriva a 4, insomma non è il massimo; quando i gradi di libertà saranno ancora maggiori (tipicamente 6) i termini di tale polinomio diventano troppi (7) e complicano i calcoli; a meno che…

TRASFORMAZIONI OMOGENEE

Le trasformazioni omogenee sono uno strumento matematico matriciale molto utilizzato in grafica, ottica e robotica. Senza entrare nei dettagli definiamo le coordinate omogenee di un punto/vettore/traslazione per quello che servono in Robotica; secondo questa convenzione <u>le coordinate omogenee di un</u>

[6] *Si può pensare anche a un ugello che spruzzi collante, a una punta saldante, a un mandrino di un trapano ecc.*

[7] *Le affermazioni qui esposte andrebbero ampiamente motivate, ma porterebbero a un inutile appesantimento del discorso; tenere ben presente che <u>si agisce prima con la rotazione e successivamente con la traslazione</u>*

punto/vettore/traslazione normalmente rappresentato con $[x,y,z]^T$ assumono la forma $[x,y,z,1]^T$; parliamo quindi di una matrice 4x1; la novità è la quarta coordinata. Nei versori (che individuano una direzione) la quarta coordinata assume valore 0; pertanto il versore dell'asse X ha coordinate $[1,0,0,0]^T$, quello dell'asse Y $[0,1,0,0]^T$, quello dell'asse Z $[0,0,1,0]^T$. Una traslazione, rappresentata da un vettore, diventa una matrice 4x1. I 3 versori che formano una terna diventano una matrice 4x3 con la quarta riga nulla; allo stesso modo una rotazione, rappresentata da 3 versori, risulta ancora come una matrice 4x3.

La terna cartesiana fondamentale (il riferimento fisso) specifica i 3 versori base e l'origine; mettendo insieme tali informazioni otteniamo la matrice omogenea 4x4 seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove si riconoscono tratteggiati i versori degli assi a sinistra e l'origine O a destra.

Le coordinate omogenee consentono di rappresentare una generica rototraslazione mediante un'unica matrice 4x4 chiamata "trasformazione omogenea" $\mathbb{Q}$[8] nella quale le prime tre colonne rappresentano la rotazione – la prima da effettuarsi – , l'ultima colonna la traslazione – da effettuarsi successivamente[9]. Combinare più rototraslazioni corrisponde a moltiplicare matrici omogenee 4x4, ottenendo così come risultato finale ancora una matrice 4x4; ~~viene così superato il problema di avere polinomi con troppi termini~~.

Attenzione: d'ora in poi con le trasformazioni omogenee una rotazione è una matrice 4x4, una traslazione è anch'essa una matrice 4x4; combinare rotazioni e traslazioni corrisponde a moltiplicare matrici 4x4 N.B.: non c'è più la somma per le traslazioni!!

Attenzione: le matrici omogenee di roto-traslazione non hanno le proprietà della cugine di tipo 3x3; pertanto non hanno determinante unitario e la trasposta non coincide con l'inversa (non sono ortogonali).

Scrivere la trasformazione omogenea della traslazione unitaria lungo la bisettrice degli assi x-y. Scrivere la trasformazione omogenea della rotazione di 90° attorno z. Scrivere la trasformazione omogenea della rototraslazione di 90° attorno z e di traslazione unitaria lungo la bisettrice degli assi x-y

Interpretare geometricamente (= descrivere i movimenti) le seguenti trasformazioni omogenee:

$$\mathbb{Q}1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{Q}2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{Q}3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{Q}4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In Robotica la trasformazione omogenea è utilizzata per descrivere sistemi di riferimento (terne) e i loro movimenti relativi (rototraslazioni); è caratterizzata dall'avere come quarta riga sempre [0,0,0,1] .

Tutte le rototraslazioni e gli esercizi precedenti di questa dispensa possono essere rieseguiti utilizzando trasformazioni omogenee con matrici 4x4.

Verificare o dimostrare che una matrice $\mathbb{Q}$ moltiplicata per un qualunque punto espresso in coordinate omogenee o per qualunque altra trasformazione omogenea produce ancora una matrice omogenea (cioè l'ultima riga sarà 1 nel caso di punti o [0,0,0,1] nel caso di rototraslazioni)

[8] *Abbiamo scelto la lettera Q perché ricorda la rotazione (con il cerchio) e la traslazione (con la gambetta)*
[9] *La precisazione è doverosa; eseguire $\mathbb{R}$ e poi $\mathbb{T}$ non è lo stesso che eseguire $\mathbb{T}$ e poi $\mathbb{R}$*

RUOTARE ATTORNO AGLI ASSI FISSI O AGLI ASSI CORRENTI

Quando si fanno rotazioni successive si può ruotare intorno agli assi fissi (come già spiegato), oppure si può ruotare intorno agli assi correnti. Spieghiamo meglio: consideriamo una terna mobile O'x'y'z' inizialmente coincidente con la terna fissa OXYZ; ruotiamo una prima volta la terna mobile di un certo angolo intorno ad un certo asse fisso; chiamiamo questa trasformazione $\mathbb{Q}_1$ perché stiamo giocando con le trasformazioni omogenee; la rotazione successiva può essere effettuata ancora attorno agli assi fissi (pensiamo a Z) oppure, perché no?, attorno a un altro asse, magari uno della terna mobile (pensiamo a z'); nulla ce lo vieta[10]. Conosciamo la matrice omogenea di rotazione di 90° attorno all'asse Z:

$$\mathbb{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cosa interessante e il succo del discorso è questo: se la seconda rotazione avviene rispetto all'asse Z la rotazione complessiva è: $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_1$ la qual cosa è già nota dalla teoria precedente; se invece la seconda rotazione avviene attorno a z' la rotazione complessiva si ottiene così: $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$; in gergo e generalizzando: <u>se la rotazione risulta attorno agli assi fissi la matrice di rotazione deve essere pre-moltiplicata; se è riferita agli assi correnti deve essere post-moltiplicata</u>. La matrice $\mathbb{Q}_2$ che già conoscevamo andrebbe ridefinita come la matrice di rotazione di 90° attorno a un generico asse z; questo asse z sarà Z (asse fisso) se facciamo una pre-moltiplicazione, sarà invece z' (asse corrente) se operiamo una post-moltiplicazione. Queste considerazioni di fatto ribadiscono un concetto che non è stato sottolineato nei passaggi precedenti, ovvero che una rotazione (come pure una traslazione) è un movimento <u>relativo</u> e quindi bisogna sempre specificare (se non è sottinteso) rispetto a quale riferimento si ruota o trasla; il problema emerge con evidenza quando si tratta di rotazioni; infatti le traslazioni sono per loro natura operazioni commutative e quindi traslare prima o dopo non cambia l'effetto risultante; con le rotazioni prima o dopo fa differenza. Per non farsi confondere e per sintetizzare bene questi concetti utilizzare lo slogan sottolineato qualche riga sopra.

PASSARE DA UNA TERNA A UN'ALTRA

Il movimento che porta una terna a sovrapporsi ad un'altra terna è una rototraslazione. All'inizio può sembrare praticamente impossibile scrivere la matrice omogenea $\mathbb{Q}$ che rappresenta tale movimento ma la cosa è meno proibitiva di quanto sembra.

Per prima cosa dobbiamo introdurre un concetto: <u>si definisce **normale**[11] **comune** a due assi quella retta che risulta perpendicolare a entrambi gli assi</u>. Nel caso di assi paralleli o sovrapposti ci sono infinite normali comuni; nel caso di assi convergenti[12] (in un punto) o "sghembi"[13] esiste una sola normale comune. Il segmento di normale comune delimitato dai due assi costituisce la distanza minima tra i due assi.

Nella figura seguente sono rappresentate le terne $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ e $O_ix_iy_iz_i$, (ci vuole un po' di sforzo di immaginazione per i limiti della rappresentazione in 2D di elementi 3D. La figura dimostra come passare da una terna all'altra mediante 4 passaggi, con l'unico vincolo che <u>x_i deve essere allineato con la normale comune, a uscire</u>.

Ecco i passaggi:

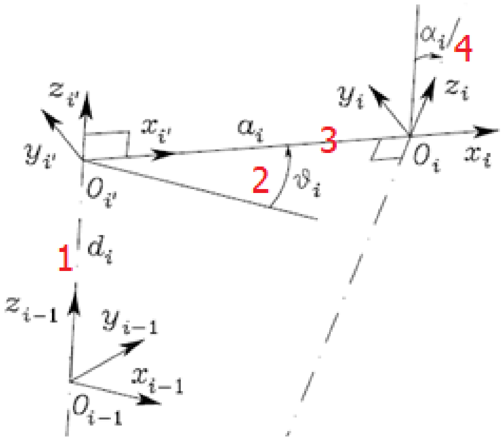
[10] i teoremi di Eulero e di Chasles assicurano che una generica rotazione attorno a un asse può essere ottenuta mediante rotazioni base attorno agli assi principali X, Y e Z; da questo punto di vista z' è un asse come tanti altri e non si perde in generalità

[11] "normale" è da intendersi come sinonimo di "perpendicolare"

[12] Il verso della normale comune si determina col prodotto vettoriale dei versori degli assi

[13] Due assi sono sghembi se non sono complanari (=non sono contenuti su uno stesso piano)

0. si individua la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i (a_i)
1. si trasla $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ lungo l'asse z_{i-1} di una quantità pari a d_i sino a portare O_{i-1} sulla normale comune (punto siglato con $O_{i'}$)
2. si ruota attorno a $z_{i-1}=z_{i'}$ di un angolo θ_i la terna corrente affinché l'asse $x_{i'}$ punti lungo la normale comune
3. si trasla la terna corrente di a_i lungo la normale comune sino a che le origini si sovrappongano
4. si ruota attorno a x_i la terna di un angolo α_i affinché gli assi z si sovrappongano (se già sovrapposti α_i=0)



Questi 4 passaggi sono caratterizzati dai 4 parametri <u>d_i θ_i a_i α_i</u> che <u>sono chiamati parametri di Denavit-Hartenberg (**DH**).</u> I movimenti sono relativi alle terne correnti e quindi possiamo scrivere la matrice complessiva post-moltiplicando le matrici dei singoli movimenti. Tenendo presente che rotazione e traslazione relativi allo stesso asse sono movimenti "commutativi[14]", si moltiplicano 2 matrici omogenee parziali di roto-traslazione per ottenere quella complessiva, chiamata **matrice DH**:

$$\begin{bmatrix} cos\theta i & -sin\theta i & 0 & 0 \\ sin\theta i & cos\theta i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ai \\ 0 & cos\alpha i & -sin\alpha i & 0 \\ 0 & sin\alpha i & cos\alpha i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta i & -sin\theta i \cdot cos\alpha i & sin\theta i \cdot sin\alpha i & ai \cdot cos\theta i \\ sin\theta i & cos\theta i \cdot cos\alpha i & -cos\theta i \cdot sin\alpha i & ai \cdot sin\theta i \\ 0 & sin\alpha i & cos\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nei testi si utilizzano alcune convenzioni che aiutano la lettura e alleggeriscono la scrittura delle funzioni sinusoidali; praticamente al posto della funzione seno si trova S, e al posto del coseno si trova C; gli angoli vengono apposti in pedice[15]. La matrice DH assume la forma:

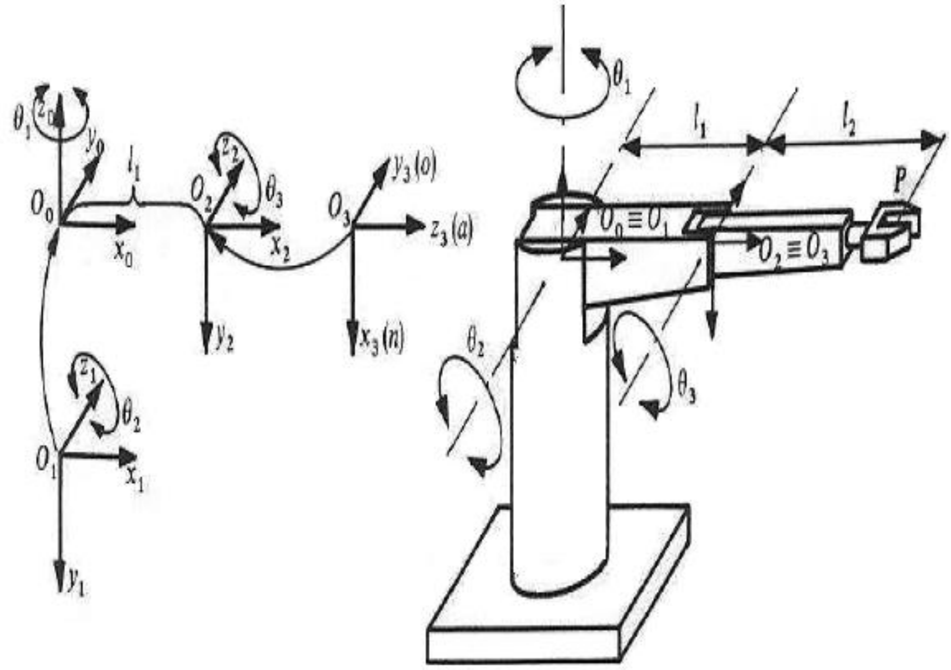
$$\begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In Robotica le trasformazioni appena viste sono il pane quotidiano. Grazie alla convenzione di Denavit-Hartenberg (che vedremo più avanti) si fissano le terne ai giunti del robot; una volta fissate le terne (operazione non banale) si individuano i parametri DH e si costruisce la matrice DH per ogni joint/link del robot; infine si moltiplicano le matrici così ottenute nel corretto ordine per ottenere la matrice complessiva del robot. Alla fine <u>un robot è modellizzato con una sola matrice omogenea</u>! E conterrà 4 parametri per ogni giunto del robot. Per come è costruito, un singolo giunto robotico consente un unico grado di libertà (DoF = Degree of Freedom); quando si sente parlare di un robot 3 DoF significa che ha 3 giunti, che possono essere rotoidali e/o prismatici.

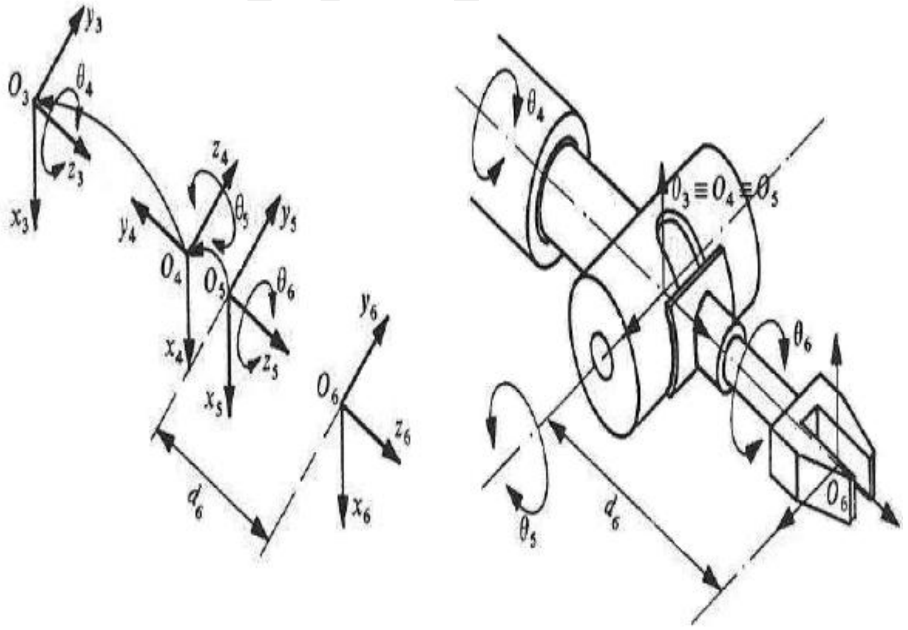
[14] È vero, provare per credere; un'eccezione che – come si suol dire –conferma la regola…

[15] Quando si gioca solo con θ si trova anche: $\cos\theta_1 \equiv C_1$ $\sin\theta_1 \equiv S_1$ $\cos(\theta_1+\theta_2) \equiv C_{12}$ $\sin(\theta_1+\theta_2) \equiv S_{12}$ Inoltre: $C_{12} = C_1C_2 - S_1S_2$ e $S_{12} = S_1C_2 - C_1S_2$

Nelle due figure seguenti sono presenti due robot 3DOF; le terne sono già indicate. Dopo aver individuato i 4 parametri DH di ogni movimento delle terne, scrivere la matrice-modello del robot.



Le frecce arcuate che connettono le origini O_0 e O_1, come pure O_2 e O_3, stanno a indicare che le origini sono coincidenti, sovrapposte.

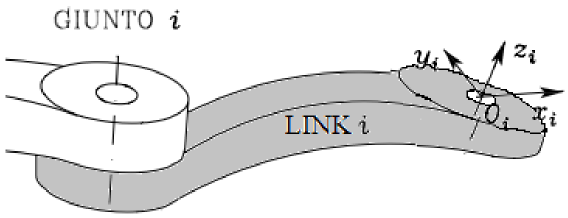


Questa configurazione robotica è denominata "polso sferico";
si trova spesso in fondo al braccio, per determinare l'orientazione dell'end-effector

CONVENZIONE DI DENAVIT-HARTENBERG

La convenzione di Denavit-Hartenberg stabilisce un metodo per fissare le terne ai giunti robotici; se si segue tale convenzione si ottiene alla fine la tabella DH dei giunti di un determinato braccio robotico; questa è la base per scrivere il modello del braccio. La difficoltà di applicazione del metodo risiede nella varietà delle conformazioni dei giunti.

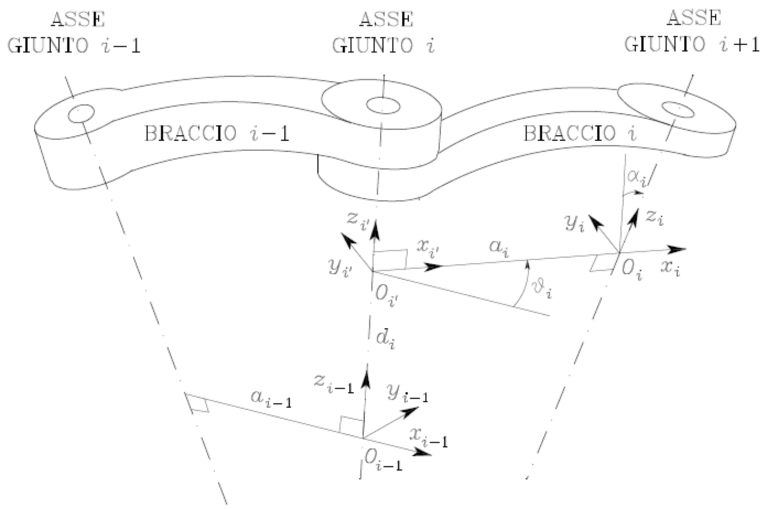
Nel seguito prestare molta attenzione agli indici; se si considera un link generico, esso inizia col giunto i, prosegue col link i e termina con la terna i che, se non è la terna terminale, va a finire sul giunto i+1;



come conseguenza, al giunto i è ancorata la terna i-1 (questa cosa genera un po' di confusione, ma è una convenzione seguita in Robotica, va applicata)

Vediamo prima la convenzione e poi degli esempi concreti, facendo riferimento alla figura qui sotto.

- ⇒ si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto i+1
- ⇒ si individua O_i all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i, e con O'_i si indica l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- ⇒ si assume l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i col verso che va dal giunto i al giunto i+1 (a uscire)
- ⇒ si sceglie l'asse y_i in modo da completare una terna destrorsa



Permane un margine di ambiguità (e di libertà) nei casi seguenti:

- con riferimento alla terna 0 (la prima, "base frame" o terna fissa): la sola direzione dell'asse z_0 risulta specificata: si possono quindi scegliere arbitrariamente O_0 e x_0
- con riferimento alla terna n (l'ultima): solo x_n risulta soggetto a vincolo (deve essere $\perp$ a z_{n-1}): infatti non vi è giunto n+1 per cui non è definito z_n che si può scegliere arbitrariamente (cmq $\perp x_n$)
- quando i due assi z_{i-1} e z_i sono paralleli: la normale comune tra di essi non è univocamente definita
- quando i due assi z_{i-1} e z_i si intersecano: il verso (non la direzione) di x_i è arbitrario; si sceglie di assumere la direzione del prodotto vettoriale dei due assi z
- quando il giunto i è prismatico: la sola direzione dell'asse z_{i-1} è determinata;

Con i dovuti adattamenti ai casi appena esposti, l'applicazione di questa convenzione determina i 4 parametri di una trasformazione dalla terna di un giunto alla successiva.

Nota: E nei casi in cui la convenzione DH non si può applicare? Un po' di fatica in più; si è detto che definire posizione e orientazione P&O nello spazio di un oggetto comporta l'impostazione di 6 parametri; con DH se ne considerano 4, quindi stiamo trattando casi particolari (quelli dovuti al vincolo che "x_i sia allineato con la normale comune"). Resta quindi da aggiustare il caso di x_i non allineato con la normale comune; se non è allineato significa che, dall'ultimo movimento eseguito, bisognerà traslare la terna lungo z_i sino a raggiungere O_i dopodiché ruotare attorno a z_i per raggiungere la sovrapposizione completa delle due terne; due movimenti => due ulteriori parametri da considerare.