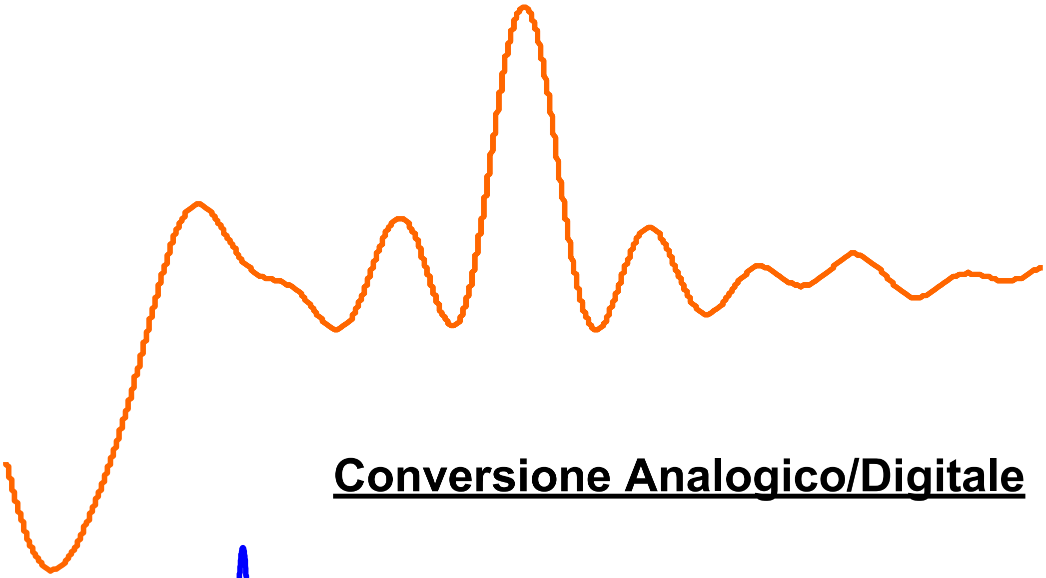
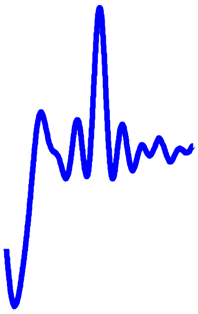


Conversione Analogico/Digitale



Conversione analogico/digitale (A/D)

Per rappresentare numericamente un segnale **continuo** nel **tempo** e nelle **ampiezze** è necessario:

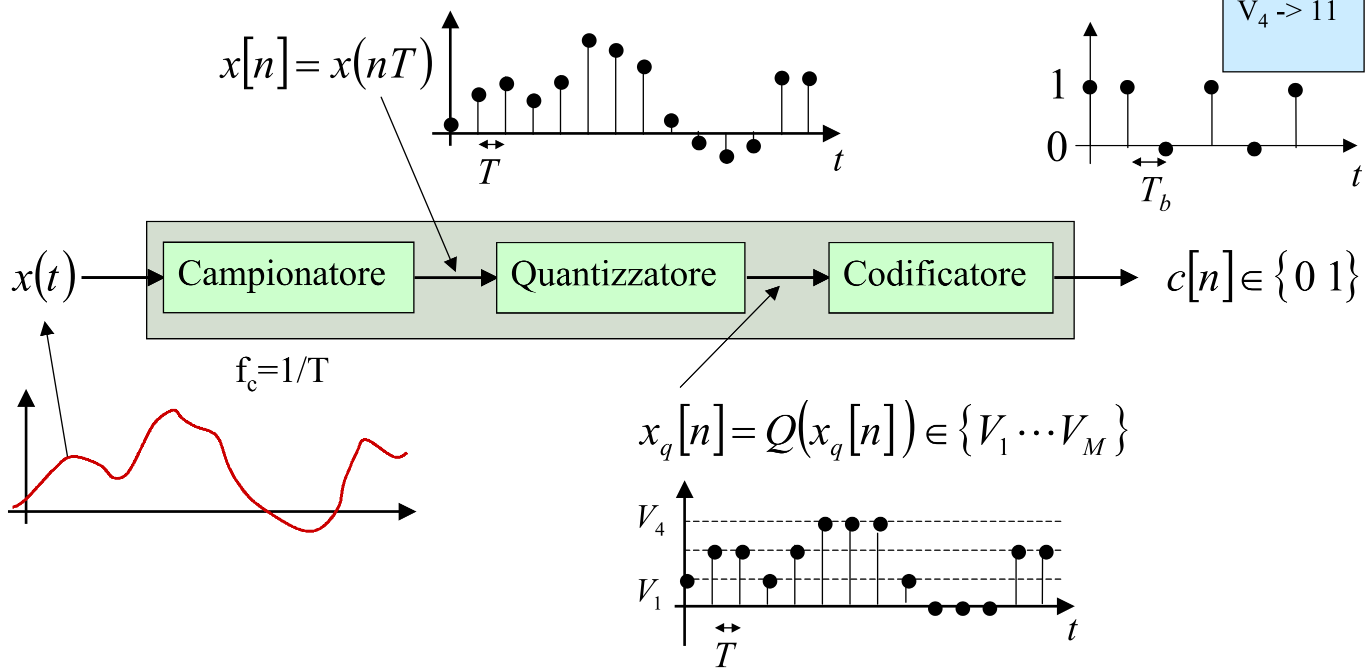
- Campionare il segnale nel tempo.
- Quantizzare le ampiezze dei campioni (rappresentare l'ampiezza di ogni campione utilizzando un numero finito di valori detti livelli di quantizzazione).
- Codificare i valori quantizzati dei campioni (associare ad ogni livello un numero finito di cifre; solitamente si usano cifre binarie, cioe' 'bit').

Questo processo di conversione A/D, che trasforma il segnale originario in una sequenza di bit {0,1}, e' noto come tecnica 'PCM' (Pulse Code Modulation o Modulazione impulsiva codificata).

Schema a blocchi del convertitore A/D

$M=4=2^2$

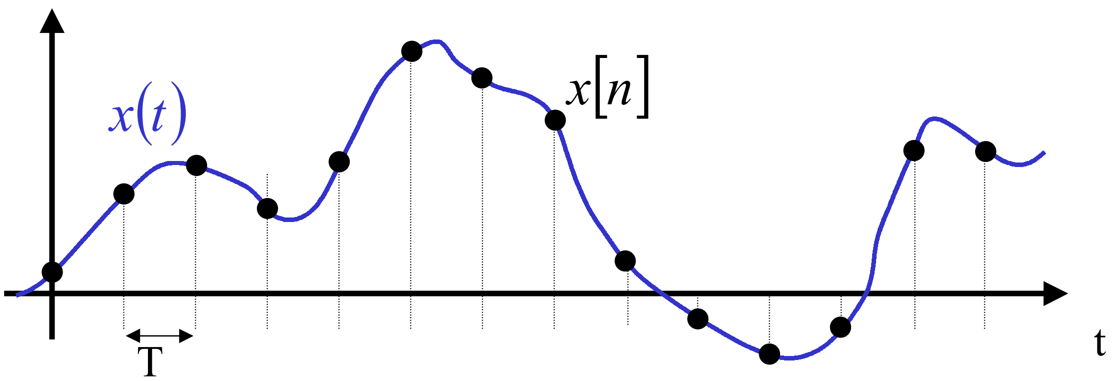
V_1 -> 00
V_2 -> 01
V_3 -> 10
V_4 -> 11



Campionamento

Per rappresentare in forma numerica il segnale tempo-continuo x(t) si esegue anzitutto il campionamento di x(t) a intervalli T.

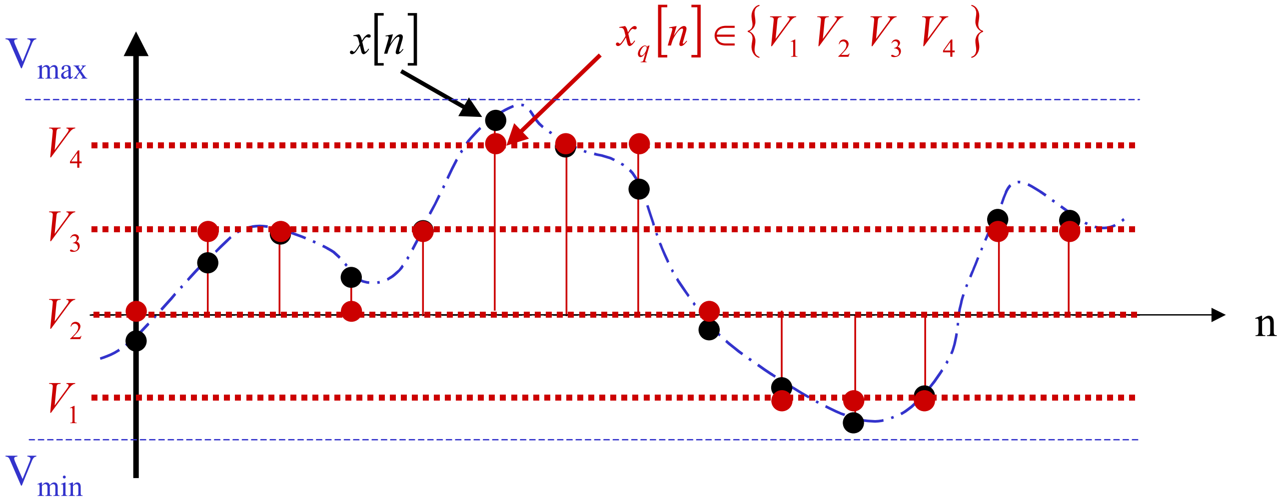
L'intervallo di campionamento e' scelto in modo da rispettare la condizione di Nyquist, per consentire la ricostruzione del segnale tempo-continuo x(t) a partire dai campioni x(nT).



Quantizzazione (1)

Ciascun campione $x[n]=x(nT)$ e' un numero reale che puo' assumere con continuita' qualsiasi valore compreso in un certo intervallo di ampiezze $[V_{min}, V_{max}]$.

Per rappresentare il segnale in forma numerica si approssima il numero reale continuo $x[n]$ con un numero finito (M) di livelli compresi nell'intervallo di ampiezze. Questa operazione e' detta QUANTIZZAZIONE.

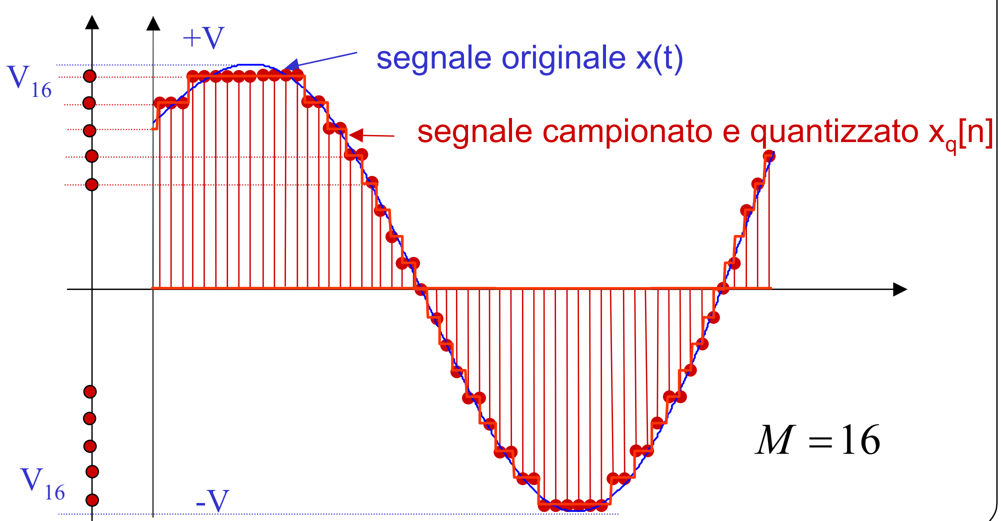


Quantizzazione (2)

Il quantizzatore e' dunque un sistema non lineare che riceve in ingresso il numero reale continuo $x[n]$ e restituisce in uscita il valore piu' vicino a $x[n]$ fra gli M possibili livelli di quantizzazione $V_1, \ldots, V_M$:

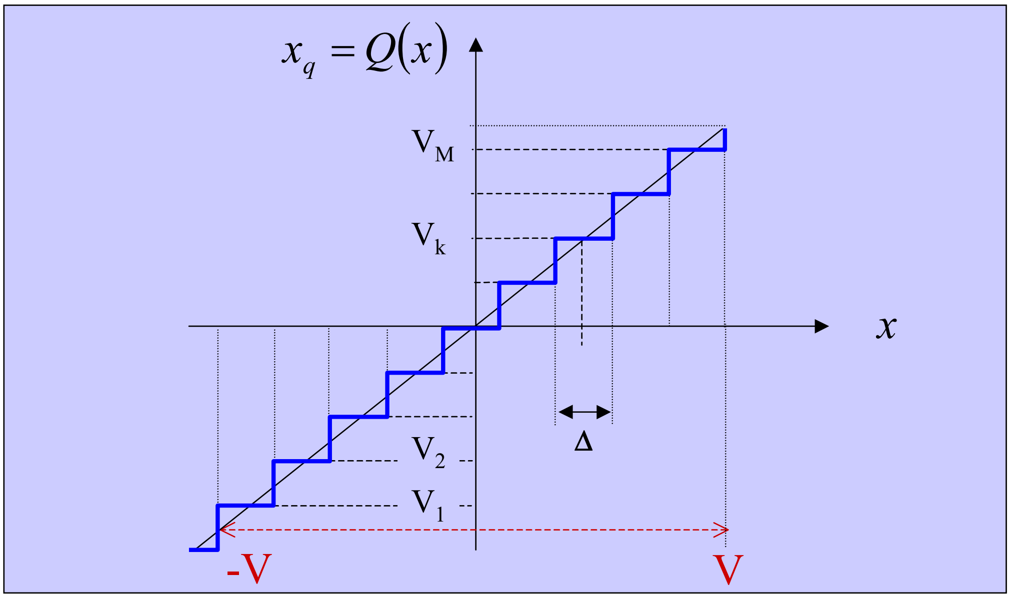
$$x[n] \longrightarrow \boxed{Q(\bullet)} \longrightarrow x_q[n] \in \{V_1 \cdots V_M\}$$

Supponiamo che il segnale x(t) assuma valori in [-V,+V].



Caratteristica ingresso-uscita

La caratteristica ingresso-uscita Q(•) del quantizzatore e' una scalinata a M livelli



Nel caso di livelli di quantizzazione equidistanti (quantizzazione uniforme) l'intervallo di quantizzazione e' $\Delta = 2V/M$.

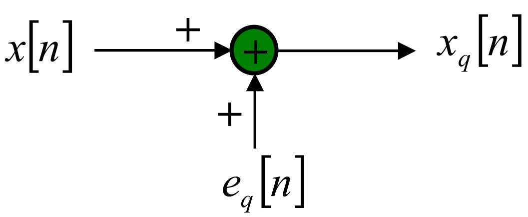
Quantizzatore come sorgente di "rumore"

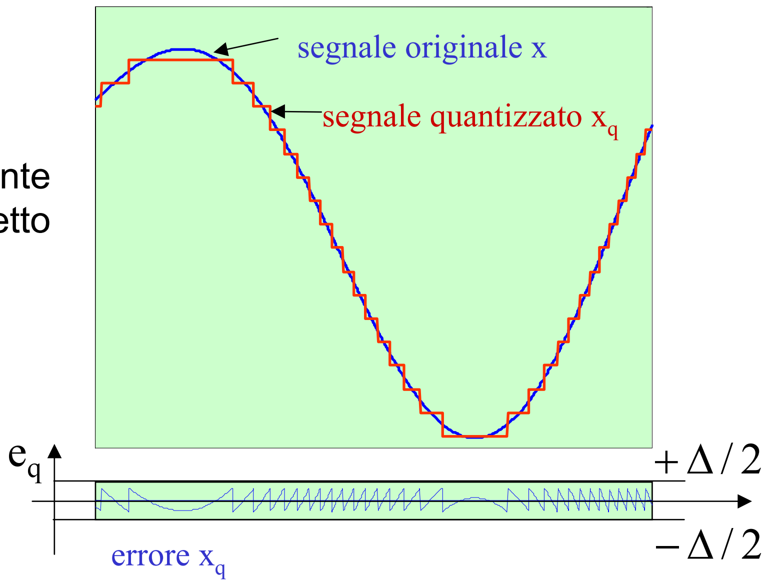
La quantizzazione introduce un errore

$$e_q[n] = x_q[n] - x[n]$$

che puo' essere equivalentemente visto come un disturbo additivo (detto rumore di quantizzazione).

Modello equivalente:

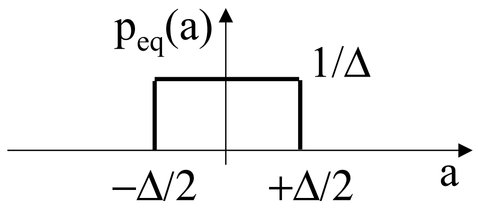




Per M grande gli errori di quantizzazione $e_q[n]$ tendono a diventare variabili casuali incorrelate tra loro e indipendenti da $x[n]$.

Potenza del rumore di quantizzazione

Se il segnale $x[n]$ ha una distribuzione delle ampiezze circa uniforme, l'errore di quantizzazione $e_q[n]$ puo' ritenersi uniformemente distribuito tra $-\Delta/2$ e $+\Delta/2$.



L'errore di quantizzazione puo' quindi essere visto come un processo casuale stazionario bianco a valore medio nullo e varianza (o potenza) uguale a:

$$P_{eq} = \sigma_{eq}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{2V}{M}\right)^2 / 12 = \frac{V^2}{3M^2}$$

Codifica binaria dei campioni quantizzati

I livelli di quantizzazione di un segnale numerico vengono normalmente rappresentati in forma binaria (codifica binaria).

Con K cifre binarie (bit) si possono rappresentare $M = 2^K$ livelli di quantizzazione. Ad ogni livello si associa un codice di K bit.

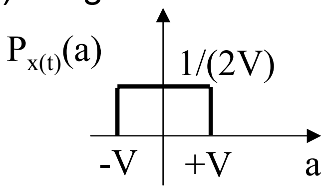
Ad esempio, se $K = 3$, otteniamo $M = 8$ livelli di quantizzazione codificabili (in vario modo) con 3 bit:

	Codifica naturale	Codifica Gray	Codifica "complemento 2"
v_8	111	100	011
v_7	110	101	010
v_6	101	111	001
v_5	100	110	000
v_4	011	010	111
v_3	010	011	110
v_2	001	001	101
v_1	000	000	100

Rapporto segnale-rumore di quantizzazione

Assumiamo che il segnale $x(t)$ (e quindi $x[n]$) abbia una distribuzione delle ampiezze uniforme tra –V e +V. La sua potenza (varianza) e' uguale a

$$P_S = \frac{(2V)^2}{12} = \frac{V^2}{3}$$



Se si utilizzano *K* cifre binarie la potenza del rumore di quantizzazione e'

$$P_{eq} = \frac{V^2}{3M^2} = \frac{V^2}{3}\frac{1}{2^{2K}}$$

e il rapporto fra la potenza del segnale e quella del rumore

$$SNR = \frac{P_S}{P_{eq}} = M^2 = 2^{2K}; \qquad SNR\big|_{dB} = 10\log_{10}\left(2^{2K}\right) = 10\log_{10}(4)\cdot K \approx 6\cdot K$$

=> Per ogni cifra binaria aggiunta l'SNR aumenta di un fattore 4, cioe' 6 dB.

Q a 8 bit $\Rightarrow SNR|_{dB}$=48 dB; Q a 10 bit $\Rightarrow SNR|_{dB}$=60 dB; Q a 16 bit $\Rightarrow SNR|_{dB}$=96 dB;

Bit-rate di un segnale numerico

A valle della codifica binaria il segnale numerico diventa una sequenza di bit che si presentano con una certa cadenza (la *bit rate*) misurata in bit al secondo (bit/s).

Se il segnale tempo-continuo viene campionato con frequenza di $f_c=1/T$ e quantizzato utilizzando *M* livelli, cioe' associando $K=\log_2 M$ bit ad ogni campione, i bit si presentano ogni T_b secondi, con

$$T_b = T/\log_2 M = T/K$$

La bit-rate e' l'inverso di T_b:

$$R_b = 1/T_b = \log_2 M/T = \log_2 M\cdot f_c = K\cdot f_c$$

Ad esempio, per un segnale tempo continuo *x(t)* con frequenza massima di *3.6KHz (segnale telefonico)*, il teorema del campionamento ne impone una frequenza di campionamento f_c maggiore di *7.2KHz*. Utilizziamo quindi f_c *=8KHz* (8000 campioni al secondo). Se quantizziamo il segnale con *M=256* livelli servono *K=8* bit.
Il segnale telefonico numerico avra', dunque, una bit rate di:

$$R = 8\cdot 8000 = 64 \text{ Kbit/sec}$$

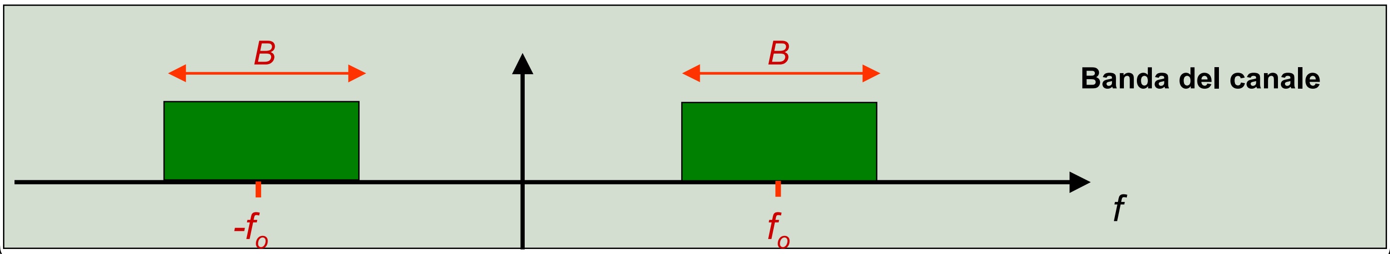
Come si trasmette un segnale numerico

Abbiamo visto che un segnale numerico, a valle della codifica, e' costituito da una sequenza di bit che si presentano con una certa cadenza (la *bit rate*):

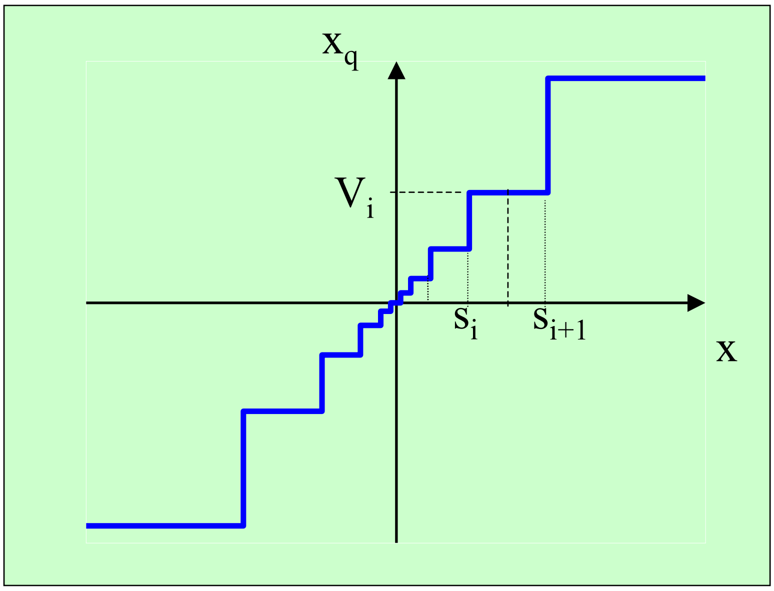
......1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 .....

A questo punto possiamo dimenticare l'origine della sequenza e che i bit vanno letti a gruppi di K, a partire da una certa posizione, per risalire ai campioni del segnale quantizzato $x_q(nT)$.

Si deve trasmettere la sequenza, con la sua *cadenza,* attraverso un canale di trasmissione (*satellite, ponte radio, cavo coassiale, fibra ottica* …) che lascia passare solo segnali $y(t)$ che hanno frequenze comprese nella banda B centrata attorno alla frequenza f_o. Inoltre dovremo trasmettere dei segnali di sincronismo.

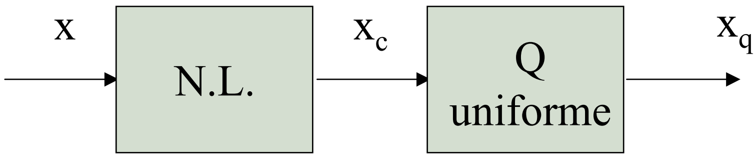


Quantizzazione non uniforme

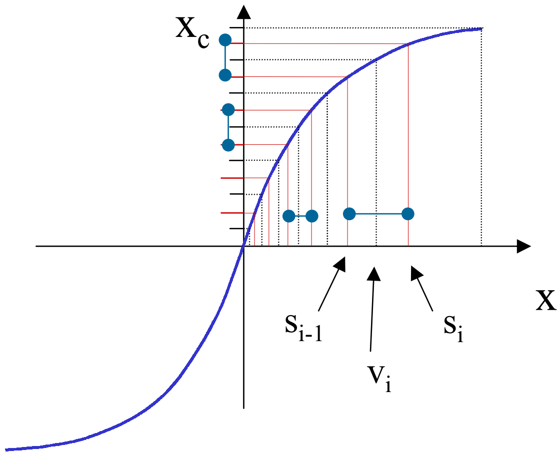


E' utilizzata quando la statistica del segnale in ingresso non è uniforme

Quantizzatore non uniforme: implementazione

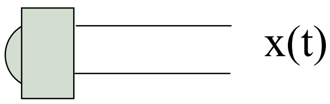


La non-linearità espande gli intervalli più vicini all'origine e comprime quelli verso il valor massimo. La cascata dei due blocchi emula un quantizzatore non lineare.



Applicazione Quantizzazione Non Uniforme - 1

Segnale Telefonico



Microfono

Potenza del segnale fortemente dipendente dal parlatore

Banda **300-3400** Hz
Frequenza Campionamento **f_c=8kHz**
Utilizziamo **K=8** bit per campione (8 Kcamp/s.*8 bit/camp=**64Kbit/sec**)

Nell'ipotesi di segnale con distribuzione d'ampiezza uniforme nell'intervallo [-V,+V], la potenza di segnale $P_1=V^2/3$.

Se si utilizza una quantizzazione uniforme ($\Delta=2V/2^K$), $P_Q=\Delta^2/12$, dunque

$(P_1/P_Q)|_{dB} = SNR|_{dB} = 6K = 6*8 = 48$ dB

Sufficiente per buona qualità segnale (>30dB).

Fissato il passo di quantizzazione Δ, se la potenza del segnale P_S diminuisce di un fattore 100 ($P_s=P_1$-20 [dB]), cosa normalissima, $SNR|_{dB} \approx 28$dB < 30dB.

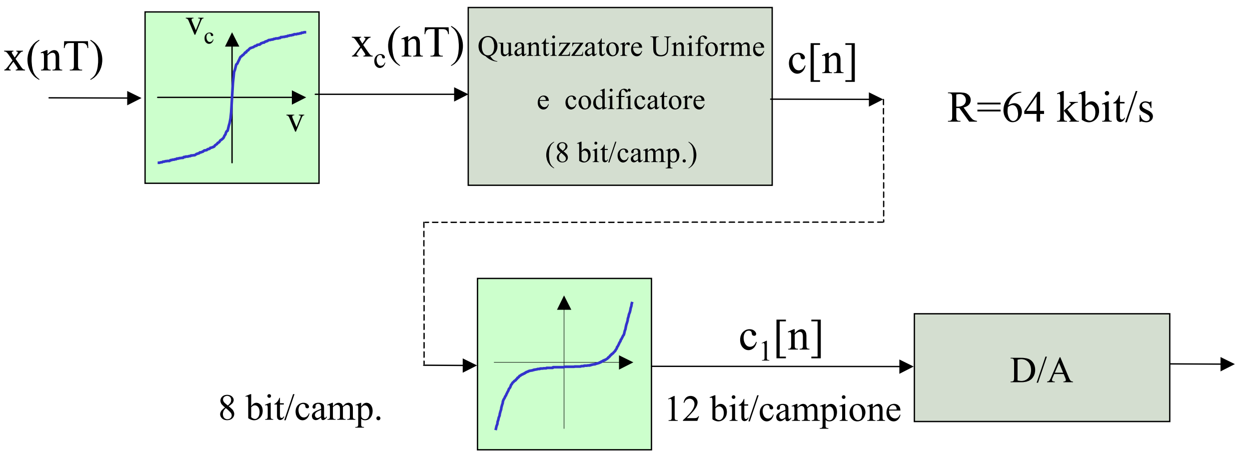
Applicazione Quantizzazione Non Uniforme - 2

Per migliorare le prestazioni in presenza di segnali che possono cambiare significativamente la dinamica:

- Aumentare numero di bit per campione (sono necessari almeno 12 bit per tener conto delle situazioni reali nel caso telefonico)

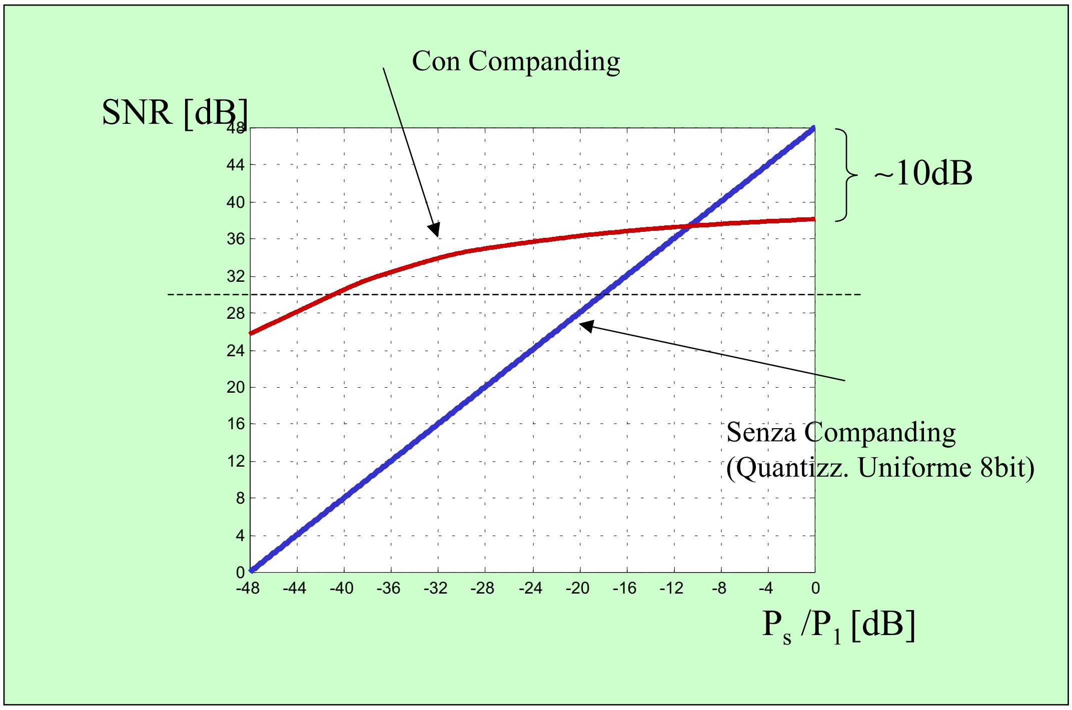
- Utilizzare quantizzatori non uniformi. Segnali con piccola dinamica vedono piccoli intervalli di quantizzazione, segnali con grande dinamica vedono intervalli di quantizzazione grandi. Il quantizzatore non lineare è ottenuto con un blocco non-lineare (compressore) posto a monte di un quantizzatore uniforme. Un blocco inverso al compressore (espansore) è utilizzato dal lato ricostruzione.

Companding (Compression-Expanding) - 1



(che rappresentano, con quantizzazione uniforme, 2^{12} livelli equidistanti)

Companding (Compression-Expanding) - 2



La potenza di segnale P_1 corrisponde ad un segnale che copre tutta la dinamica del quantizz.