Trasformata di Laplace

La Trasformazione di Laplace è un operazione matematica che permette di passare dal Dominio del Tempo a quello della variabile complessa:

$$\boldsymbol{s = \sigma + j\omega}$$

<u>Casi particolari:</u>

σ = ∅ , ω = ∅ => s = ∅ => <u>Regime continuo</u>

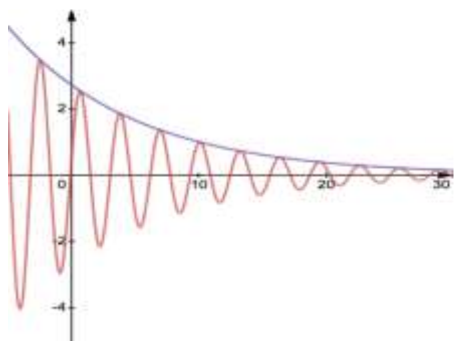
σ = ∅ , ω ≠ ∅ => s = jω => <u>Regime sinusoidale</u>

σ ≠ ∅ , ω = ∅ => s = σ => <u>Regime esponenziale</u>

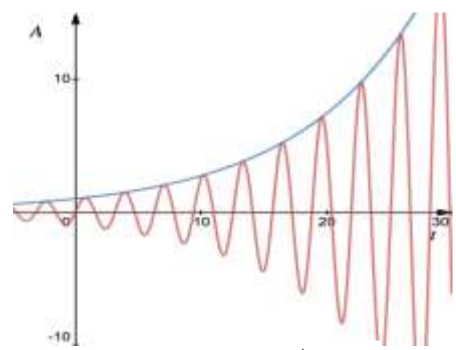
σ ≠ ∅ , ω ≠ ∅ => s = σ + jω => <u>Regime cissoidale</u>

(Se σ > ∅ si hanno oscillazioni di ampiezza crescente)

(Se σ < ∅ si hanno oscillazioni di ampiezza decrescente)



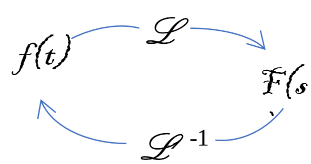
σ < ∅



σ > ∅

L'operazione è definita come: $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{st} dt$

L'operazione inversa invece : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cdot e^{st} dt$

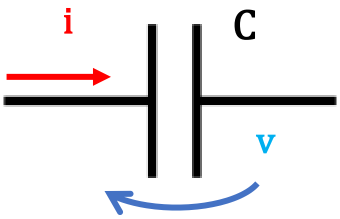


Perché usiamo le Trasformate e le Anti-Trasformate di Laplace ?
Per poter studiare la risposta dei circuiti elettrici a tutti i tipi possibili di eccitazione in ingresso, <u>senza dover risolvere sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore</u>, ma soltanto <u>**equazioni algebriche**</u>.

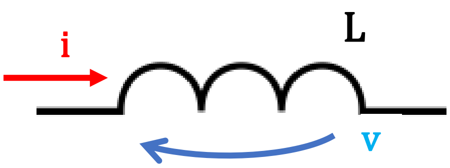
Infatti si sfruttano i 2 teoremi della derivata e dell'integrale, secondo i quali alla equazione di derivazione nel tempo corrisponde la moltiplicazione di F(s) per 's', invece all'operazione di integrazione nel tempo corrisponde la divisione di F(s) per 's', a meno delle condizioni iniziali.

Ma perché vengono fuori le equazioni integro / differenziali ?

Perché nei circuiti elettrici, nei componenti reattivi L e C il legame tra tensione e corrente è di tipo integrale o differenziale.



$$\boxed{i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = C \cdot v'(t)}$$



$$\boxed{v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot i'(t)}$$

Passando alle Trasformate e utilizzando i Teoremi citati, si ottiene:

$$I_c(s) = C \cdot V_c(s) \cdot s \qquad\qquad V_L(s) = L \cdot I_L(s) \cdot s$$

Da cui si ottiene anche:

$$\frac{V_c(s)}{I_c(s)} \triangleq \bar{Z}_c(s) = \frac{1}{s \cdot C} \qquad\qquad \frac{V_L(s)}{I_L(s)} \triangleq \bar{Z}_L(s) = s \cdot L$$

Anche con pochi componenti reattivi L e C si otterrebbero delle equazioni integro-differenziali di ordine superiore, di difficile soluzione.

Sfruttando le Trasformate invece, otteniamo equazioni algebriche, molto più abbordabili.

Finora abbiamo visto solo cosa succede ai legami tra ‘i’ e ‘v’ nei componenti elettrici L, C.

Affrontiamo il discorso completo: abbiamo un sistema RLC, passivo o attivo; diamo in ingresso una tensione variabile, di qualunque forma, e vogliamo determinare la tensione d’uscita.

Utilizzando le Trasformate operiamo così:

Con $G(s) = \frac{V_{OUT}(s)}{V_{IN}(s)}$

$$V_{OUT}(s) = G(s) \cdot V_{IN}(s)$$

Quindi dobbiamo effettuare le seguenti operazioni:

1) Determinare $G(s)$, dato un generico circuito R,L,C considerando eventuali amplificazioni
2) Calcolare $V_{IN}(s)$
3) Moltiplicare $V_{IN}(s)$ per $G(s)$
4) Calcolare $v_{out}(t)$

<u>Obiezione</u>: dobbiamo fare ancora più calcoli che nel Dominio del Tempo?
No, perchè esistono Tabelle universali con Trasformate e Anti-Trasformate di moltissime funzioni, per cui, salvo casi particolari, i punti 2) e 4) richiedono pochissimo tempo

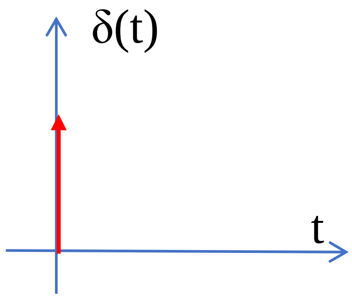
Vediamo i 2 casi più significativi, per noi:

1) Risposta all'impulso (di tensione)

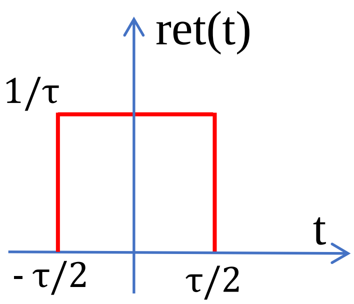
2) Risposta al gradino (di tensione)

Risposta all'impulso

$$\delta\ (s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow V_{OUT}(s)$$

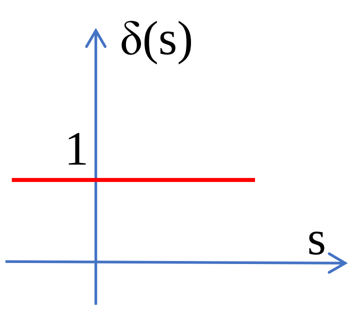


Impulso di Dirac ≜ è il limite per τ → 0 dell'impulso rettangolare di larghezza τ e altezza 1/ τ (Area unitaria)



δ(t) ha altezza → ∞ e larghezza infinitesima (Area unitaria), cioè l'energia associata è unitaria

La Trasformata di δ(t) vale 1, perciò:



$$1 \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow V_{OUT}(s) \equiv G(s)$$

Perciò la risposta all'impulso, $v_{out}\ (t)$, coincide con l'Anti-Trasformata di $G(s) \triangleq g(t)$.

Tutto si riduce quindi a studiare la $G(s)$.

Infatti l'operazione di Anti-Trasformazione dipende dalla posizione dei poli di $G(s)$.

A ogni polo di $G(s)$ corrisponde un termine della $v_{out}\ (t)$

Dato che i poli possono essere di vario tipo (reali, immaginari puri, complessi coniugati), ci saranno termini di diverso tipo.

Da cosa dipende il tipo di polo? Dipende dal tipo di equazione associata a $D(s)$

NB: il polo è una radice del polinomio a denominatore di $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.

Es: $D(s)$ è un trinomio di II° grado: allora dipende tutto dal $\Delta \triangleq \sqrt{b^2 - 4ac}$

- Se $\Delta > \emptyset$ → 2 Radici reali (positive o negative)
- Se $\Delta = \emptyset$ → 2 Radici reali coincidenti
- Se $\Delta < \emptyset$ → 2 Radici immaginarie (complesse coniugate)

Se invece $D(s)$ è un binomio di 2° grado del tipo $s^2 + a$, si avranno :

- Se $a > \emptyset$ → 2 Radici immaginarie
- Se $a < \emptyset$ → 2 Radici reali coincidenti

Tipi di Poli

- **Poli reali negativi** → il termine corrispondente, nel Dominio del Tempo, è esponenziale decrescente ($s = \theta,\ \theta < \emptyset,\ e^{\theta t}$)

- **Poli reali positivi** → il termine corrispondente, nel Dominio del Tempo, è esponenziale crescente ($s = \theta,\ \theta > \emptyset,\ e^{\theta t}$)

- **Poli complessi coniugati** → $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

  1) Parte reale positiva ($\sigma > \emptyset$) → oscillazioni di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ modulate in ampiezza (crescente) dall'esponenziale $e^{\sigma t}$

  2) Parte reale negativa ($\sigma < \emptyset$) → oscillazioni smorzate

- **Poli immaginari coniugati** → oscillazioni di ampiezza costante ($s_{1,2} = \pm j\omega$)

<u>Bisogna però puntualizzare il seguente discorso:</u>

Data la $G(s)$, ne determino i poli; quindi scompongo il denominatore nel <u>prodotto</u> dei vari <u>fattori</u> associati ai singoli poli. Ovvero:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s+\sigma_1)\cdot(s+\sigma_2)\cdot(s+\sigma_3+j\omega)\cdot(s+\sigma_3-j\omega)\cdot(s^2+\omega^2)}$$

Coppia di poli immaginari coniugati

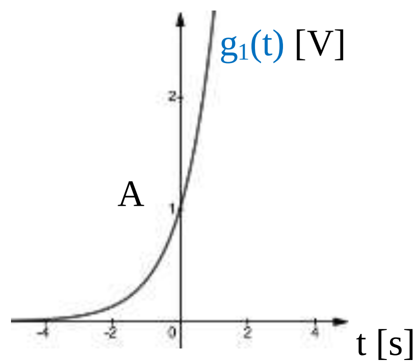
A questo punto, devo <u>scomporre</u> la $G(s)$ nella <u>somma</u> di diversi <u>addendi</u>, ciascuno associato a un determinato polo; ciò viene fatto con metodi algebrici (piuttosto semplici).

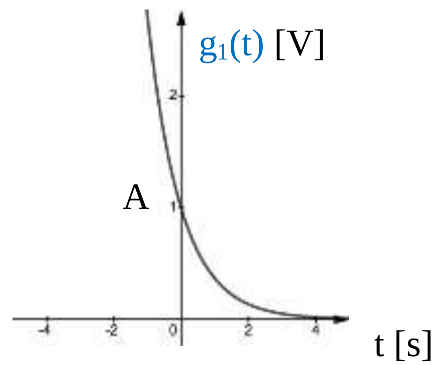
Dopo la <u>scomposizione in frazioni parziali</u>, otterremmo una $G(s)$ di questo tipo:

$$G(s) = \frac{A}{s-\sigma} + \frac{Bs+C}{(S-\sigma+j\omega)\cdot(s-\sigma-j\omega)} + \frac{Ds}{s^2+\omega^2}$$

Anti-Trasformando, da Tabella, otterrò termini temporali di questo tipo:

$\boldsymbol{G_1(s) = \frac{A}{s-\sigma}}$ → $\boldsymbol{g_1(t) = A\cdot e^{\sigma t}}$



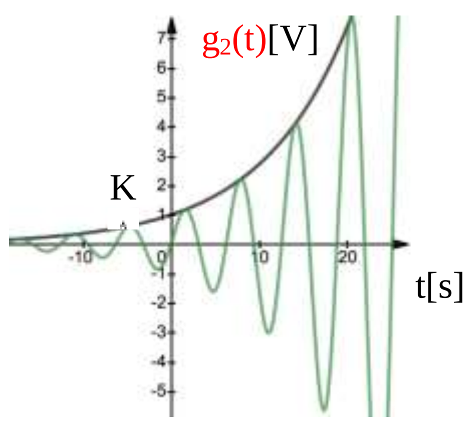


$\boldsymbol{G2(s) = \frac{Bs+C}{(s+\sigma+j\omega)\cdot(s+\sigma-j\omega)}}$

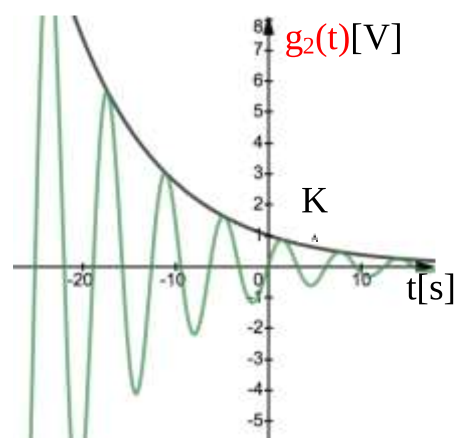
$\boldsymbol{g_2(t) = K\cdot e^{\sigma t}\cdot \sin(\omega t)}$

(K dipende da B e C)

σ > ∅

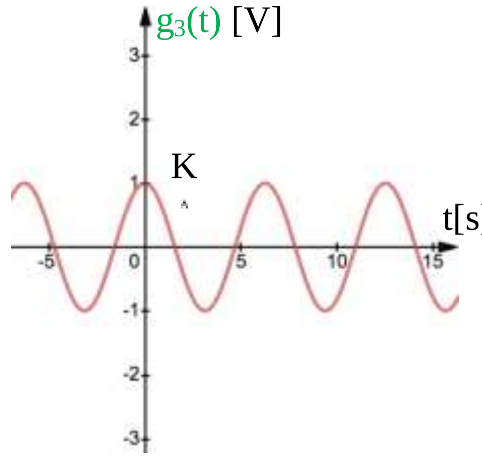


σ < ∅



Nel caso si abbiano due poli immaginari coniugati, cioè un fattore:

$$\frac{Ds}{s^2+\omega^2} \rightarrow g_3(t) = K \cdot \cos(\omega t)$$



Otteniamo cioè oscillazioni di ampiezza costante.

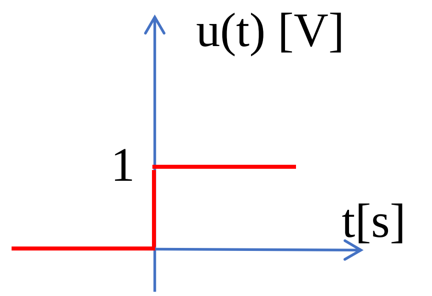
Quindi, per quanto riguarda la **risposta all'impulso**, se il Sistema ha :

- solo **poli reali negativi semplici** (RNS), la sua risposta sarà **APERIODICA** (un esponenziale decrescente per ogni polo) e si estinguerà più o meno rapidamente, a seconda del valore del polo : polo + negativo >>>> esponenziale decrescente + rapido

- **poli complessi coniugati con parte reale negativa**, la sua risposta sarà **cissoidale** (**smorzata**);
  inoltre, + la parte reale (**σ**) è negativa, + rapido è lo smorzamento;
  + grande è la parte immaginaria (**ω**), + piccolo sarà il periodo di oscillazione e viceversa, ovviamente.

Risposta al Gradino

La Trasformata di **u(t)** è $\frac{1}{s}$



V(s) → G(s) → V(s) · G(s)

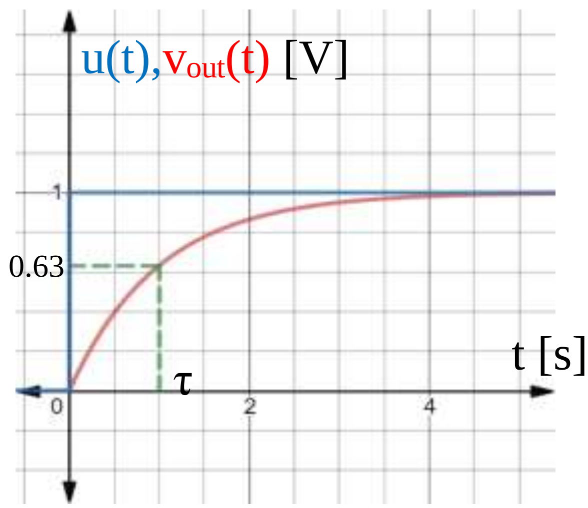
Perciò $\quad V_{OUT}(s) = V(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$

<u>Si introduce un **polo nell'origine**.</u>

Operando come prima, otterremo vari tipi di poli, cioè vari fattori nella $V_{OUT}\ (s)$.

Si scompone in frazioni parziali e si antitrasforma usando le tabelle.

Se il **Sistema è del I° Ordine**, $G(s) = \frac{1}{s+\omega_p}$ e **il polo è reale negativo**, la risposta al gradino è di questo tipo, cioè **APERIODICA** :



La costante di tempo $\boldsymbol{\tau}$

(**tempo dopo il quale** $\boldsymbol{v_{out}(t) = 0,63 \cdot valore\ finale}$)

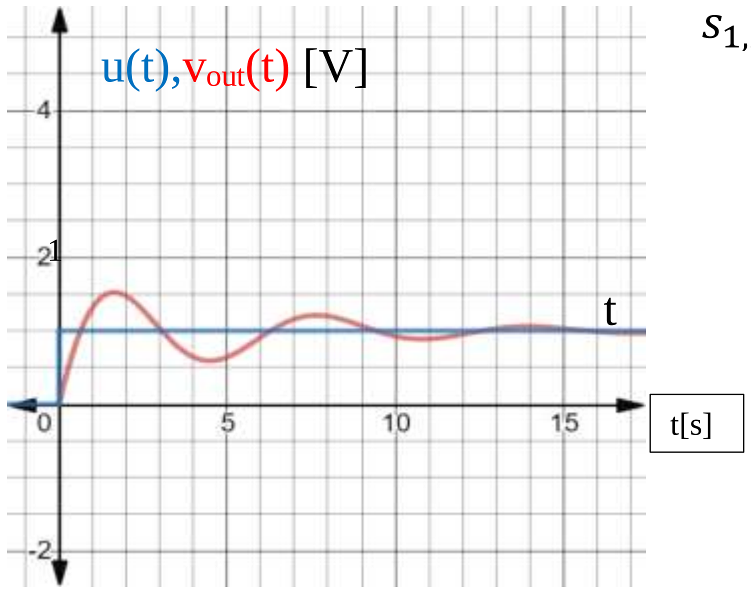
coincide con il reciproco del polo : $\boldsymbol{\omega_p = \frac{1}{\tau}}$

$$v_{out}(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

Polo ≡ limite della Banda Passante (a 3 [dB])

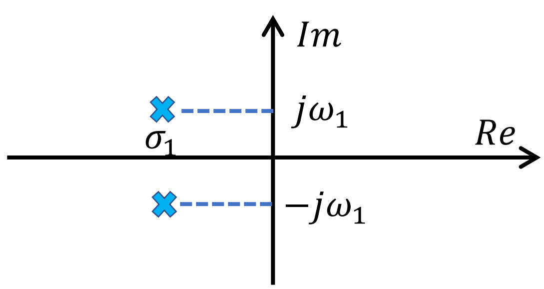
Il Sistema, nel Dominio della frequenza, cioè in Regime Sinusoidale, è un filtro passa-basso.

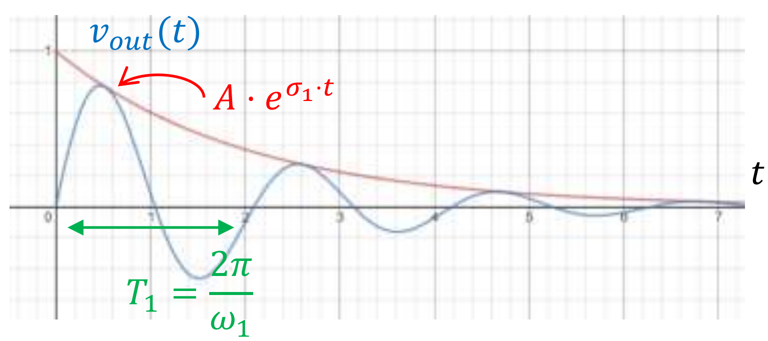
Se il **Sistema è del II° Ordine**, e i poli complessi coniugati hanno **parte reale negativa**, la risposta al gradino sarà di questo tipo : **CISSOIDALE SMORZATA**



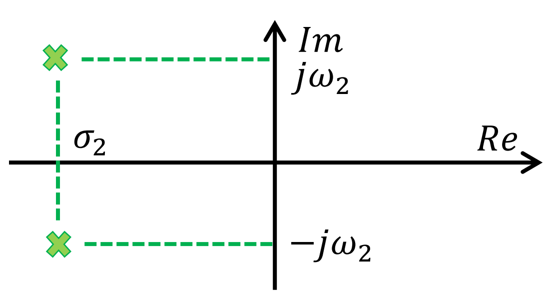
$$s_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1$$

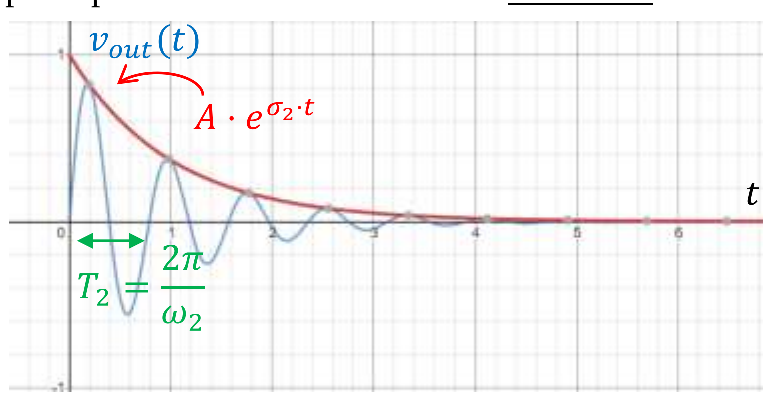
Quanto più i poli sono distanti dall'asse Re, cioè **ω è grande**, tanto più grande è la frequenza delle oscillazioni (periodo piccolo).





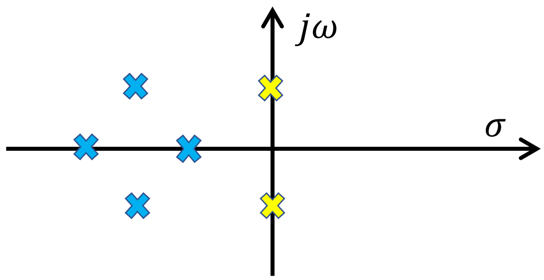
Quanto **più grande è σ** (in modulo), tanto più rapidamente le oscillazioni si <u>smorzano</u>.



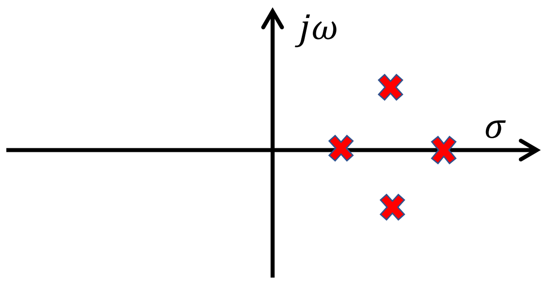


Criterio di Stabilità

Abbiamo perciò visto che se i poli hanno parte reale negativa (cioè stanno **a sinistra nel semipiano di Gauss**), la risposta temporale, **all'impulso unitario**, decresce nel tempo e il sistema avente tale $G(s)$ è stabile.



Se i poli sono sull'asse $j\omega$, il sistema è un **oscillatore** (caso limite di stabilità)



Inaccettabili, per la stabilità, sistemi con $G(s)$ avente poli con **parte reale positiva**, nei quali dando un impulso di durata infinitesima, essi reagiscono dando in uscita oscillazioni di ampiezza crescente!

Tabella delle Trasformate /Anti-Trasformate di Laplace

$\boldsymbol{f(t)}$		$\boldsymbol{F(s)}$	
$K \cdot f(t)$	(prodotto per una costante)	$K \cdot F(s)$	
$f(t - t_0)$	(traslazione nel tempo)	$F(s) \cdot e^{-s \cdot t_0}$	
$f'(t)$	(derivata nel tempo)	$s \cdot F(s) - f(\emptyset)$	$f(\emptyset) =$ Condizioni iniziali di f(t)
$\int f(t)$	(integrale)	$\dfrac{F(s)}{s}$	(derivata della trasformata)
$t \cdot f(t)$	(prodotto per una rampa)	$-\dfrac{d\,F(s)}{d\,s}$	(integrale della trasformata)
$\dfrac{f(t)}{t}$	(divisione nel tempo)	$\int_0^{+\infty} F(s)\,ds$	
δ di Dirac	(impulso unitario)	1	
K · δ	(impulso non unitario)	K	
$\mu(t)$	(gradino unitario)	$1/s$	
$K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$		$\dfrac{K}{s + 1/\tau}$	**<u>Molto importante</u>**: fattore associato a un polo reale negativo, che dà nel <u>tempo</u> un termine esponenziale decrescente
$(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$		$\dfrac{F(s)}{s \cdot (s + 1/\tau)}$	
t	(rampa)	$1/s^2$	
$\sin(\omega \cdot t)$		$\dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$\cos(\omega \cdot t)$		$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$	

Teoremi sulle Trasformate di Laplace

1) La Trasformata di un prodotto per una costante è la Trasformata moltiplicata per la costante:

$$L[k \cdot f(t)] \rightarrow k \cdot F(s)$$

2) La Trasformata di una combinazione lineare è la combinazione lineare delle Trasformate:

$$L[k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)] \rightarrow k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)$$

3) La Trasformata della derivata di una funzione è la Trasformata della funzione moltiplicata per 's', a cui viene tolto il valore della funzione in $\emptyset$ (se diverso da 0):

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \rightarrow s \cdot F(s) - f(\emptyset)$$

4) La Trasformata dell'integrale di una funzione è la trasformata della funzione divisa per 's':

$$L\left[\int f(t)\, dt\right] \rightarrow \frac{F(s)}{s}$$

5) Traslazione nel tempo:

$$L[f(t - t_0)] \Longrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

6) Traslazione in frequenza:

$$F(s - a) \rightarrow L[e^{-st} \cdot f(t)]$$

7) Teorema del valore iniziale:

$$\lim_{t \to 0} f(t) \rightarrow \lim_{t \to \infty} s \cdot F(s)$$

8) Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) \rightarrow \lim_{t \to 0} s \cdot F(s)$$