

Analisi di Fourier

Un segnale temporale, come appunto dice il nome, esiste nel dominio del tempo.

Lo studio di questi segnali e delle loro proprietà, però, può essere fatto utilizzando vari metodi e alcuni permettono di analizzare meglio certe caratteristiche rispetto ad altri.

Per questo in certi casi i segnali vengono proiettati in domini diversi da quello del tempo.

Queste proiezioni avvengono tramite delle trasformazioni che rappresentano il segnale in domini virtuali, che rendono più semplice e facile l'analisi che si vuole compiere.

Una di queste proiezioni è ottenuta tramite la trasformata di Fourier, che utilizza il dominio della frequenza nel quale il segnale è rappresentato come un insieme di molte (eventualmente infinite) oscillazioni sinusoidali con diversa frequenza, ampiezza e fase.

La trasformata di Fourier deve il suo nome al suo inventore il celebre matematico e fisico francese Jean Baptiste Joseph Fourier, conosciuto soprattutto per le sue famose **serie** (serie di Fourier), la trasformata (appunto la trasformata di Fourier) e per la sua legge sulla conduzione del calore.

Nato ad Auxerre, il 21 marzo 1768, da una modesta famiglia francese, rimase orfano di entrambi i genitori prima dei dieci anni e fece i suoi primi studi nella scuola militare di Auxerre, dove tentò di intraprendere, senza successo, la carriera militare.

Successivamente entrò nel collegio dei Benedettini di Saint Benoît-sur-Loire dove continuò la sua istruzione, era indirizzato verso la carriera ecclesiastica quando, nel 1789, in Francia scoppiò la Rivoluzione francese, alla quale partecipò rischiando di essere ghigliottinato durante il periodo del Terrore, ma fu salvato dalla caduta di Robespierre.

Entrò quindi nella École Normale Supérieure, dove ebbe come professori personaggi di spicco, come Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge e Pierre-Simon Laplace.

Fourier partecipò, come altri scienziati, alla campagna d'Egitto di Napoleone nel 1798, dove ricoprì anche un importante ruolo di diplomatico.

Al suo ritorno in Francia, nel 1801, fu nominato da Napoleone prefetto dell'Isère, con sede a Grenoble. Fu proprio in questa città che condusse i suoi esperimenti sulla propagazione del calore, che gli consentirono di modellizzare l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche. Questi lavori furono pubblicati nel 1822 nel libro "Teoria analitica del calore", ma furono molto contestati, poiché la sua analisi metteva in discussione le teorie matematiche cui aderivano senza riserve i suoi contemporanei.

Molti dei grandi matematici francesi del primo Ottocento, tra cui Lagrange, Laplace, Legendre, Biot e Poisson, si rifiutavano di accettare la tesi di Fourier, secondo la quale qualunque distribuzione iniziale di temperatura poteva essere scomposta in una semplice somma aritmetica di un'oscillazione fondamentale e delle sue armoniche superiori.

Anche l'idea di Eulero era in disaccordo con quelle di Fourier, benché il matematico svizzero avesse già ipotizzato che alcune funzioni si potessero rappresentare come somma di sinusoidi. Accadde dunque che, quando Fourier sostenne la sua tesi a una seduta dell'Accademia francese delle scienze, Lagrange si alzò in piedi e la dichiarò impossibile. Nonostante ciò, l'Accademia non poté ignorare la portata dei risultati e gli conferì un premio.

Fourier morì a Parigi il 16 maggio 1830, in suo onore è stato intitolato l'omonimo cratere sulla Luna e il suo è uno dei 72 nomi di cittadini francesi riportati sulla Torre Eiffel.

Tra i suoi maggiori contributi figurano, per l'appunto: la teorizzazione della serie di Fourier e la conseguente trasformata di Fourier in matematica; la formulazione della legge costitutiva lineare per la conduzione termica e la legge di Fourier in termodinamica.

Lo sviluppo in serie di Fourier si è rivelato non solo uno degli strumenti più importanti di calcolo, ma soprattutto la strada maestra per lo studio dei fondamenti dell'analisi matematica nel XIX secolo.

La sua relazione integrale, nota come trasformata di Fourier inoltre, è fondamentale per lo studio delle equazioni differenziali.

Il suo teorema, il teorema di Fourier, consente di ricondurre i segnali, anche quelli non sinusoidali e con una forma "strana", ad una somma di semplici segnali sinusoidali. L'unica imposizione, per applicare il teorema di Fourier è che i segnali devono essere di tipo periodico.

I segnali si definiscono periodici quando il loro andamento nel tempo si ripete sempre uguale a sé stesso dopo ogni particolare intervallo detto periodo T . La frequenza fondamentale f_0 è l'inverso del periodo e si misura in Hertz, $1 \text{ [Hz]} = [\text{sec}^{-1}]$. Si definisce pulsazione fondamentale $\omega_0 = 2\pi f_0$ e si misura in rad/s.

Lo studio di tali segnali periodici, ma non sinusoidali, si può effettuare semplicemente applicando il teorema di Fourier:

una grandezza periodica, di periodo T , può essere rappresentata come somma di una infinità di funzioni sinusoidali.

Ognuna di queste funzioni sinusoidali, prende il nome di armonica e l'insieme delle armoniche è detto spettro. Ne segue che, una qualsiasi grandezza periodica di periodo T può essere rappresentata dalla seguente somma di funzioni sinusoidali chiamata serie di Fourier:

$$v(t) = V_m + V_{1M} \sin(\omega t + \varphi_1) + V_{2M} \sin(2\omega t + \varphi_2) + V_{3M} \sin(3\omega t + \varphi_3) + V_{4M} \sin(4\omega t + \varphi_4) + \dots + V_{nM} \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$$

Dove:

V_m è il valore medio della grandezza $v(t)$ e costituisce l'offset;

V_{1M} è l'ampiezza della componente fondamentale con pulsazione uguale alla grandezza periodica, che si otterrà in uscita, e viene chiamata anche armonica fondamentale o portante;

V_{nM} è l'ampiezza dell'armonica ennesima;

φ_1 è la fase dell'armonica fondamentale;

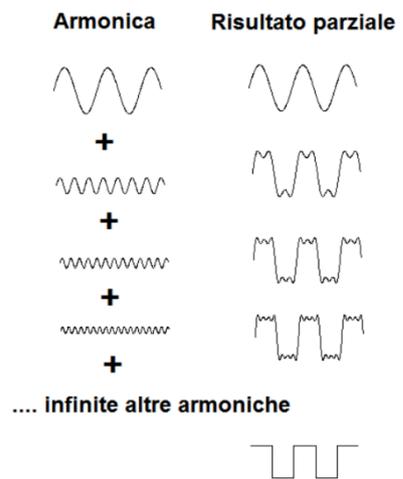
φ_n è la fase dell'armonica ennesima;

$v(t)$ è la grandezza periodica che si otterrà in uscita, data dalla somma delle componenti sinusoidali insieme a quella continua.

In altre parole, il teorema di Fourier dimostra come una grandezza periodica sia costituita, ad eccezione del termine costante V_m (valore medio), da una somma di infinite grandezze sinusoidali: la prima con pulsazione e frequenza $\omega_0 = 2\pi f_0$ $f_0 = 1/T$ e le altre con frequenze (o pulsazioni) che sono multiple intere della frequenza fondamentale f_0 . Il valore medio della grandezza V_m è costante e viene anche chiamato componente continua e costituisce l'offset della grandezza periodica di uscita.

Il risultato di una somma armonica sarà un'onda periodica, con lo stesso periodo dell'armonica fondamentale, di forma generica, non sinusoidale, e con media nulla. Se la somma armonica si estende ad infiniti termini si parla allora più correttamente di serie armonica.

La teoria di Fourier dice che il segnale può essere costituito da armoniche, di frequenza multipla della fondamentale f_0 (la frequenza del segnale periodico), cosinusoidali o sinusoidali, in base al fatto se il segnale periodico è pari, quindi assume valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate ($f(x) = f(-x)$) o dispari, quindi assume valori simmetrici rispetto all'origine ($f(x) = -f(-x)$).



Di conseguenza:

- se è pari le armoniche sono cosinusoidali con ampiezza B_k , quelle corrispondenti ai k pari si annullano e quelle corrispondenti ai k dispari hanno segni alterni, precisamente quella per $k=1$ positiva, quella per $k=3$ negativa e così via;
- se è dispari, le armoniche sono sinusoidali di ampiezza A_k , quelle corrispondenti ai k pari si annullano e quelle corrispondenti ai k dispari hanno tutte segno positivo, decrescente secondo una ben precisa formula.

In questa relazione andrò ad analizzare, attraverso la teoria di Fourier, l'onda quadra, sia con la formula del coseno sia con quella del seno.

Le formule, per l'ampiezza, sono rispettivamente:

- per il coseno

$$B_k = 2 * V_{pp} * \frac{\tau}{T} * \frac{\sin\left(k\pi * \frac{\tau}{T}\right)}{k\pi * \frac{\tau}{T}} = 2 * V_{pp} * \frac{\tau}{T} * \frac{\sin\left(k\pi * \frac{\tau}{T}\right)}{k\pi * \frac{\tau}{T}} \rightarrow B_k = \frac{2 V_{pp}}{k\pi} * \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

- per il seno

$$A_k = \frac{V_{pp}}{k\pi} * [1 - \cos(k\pi)]$$

Grazie alle formule possiamo capire perché i pari si annullano.

Infatti, se osserviamo le formule notiamo:

- $1 - \cos(k\pi)$, nella cosinusoidale;
- $\sin(k\pi/2)$, nella sinusoidale.

Dalle nozioni trigonometriche sappiamo che:

- $\cos(2k\pi) = 1$;
- $\sin(k\pi) = 0$.

Di conseguenza essendo k un numero pari (e considerando h come $k/2$) avremmo che:

- nel coseno si otterrà un multiplo di 2π , quindi $1 - \cos(h * 2\pi) = 1 - 1 = 0$;
- nel seno otterremo un multiplo di π , quindi $\sin(h * 2\pi/2) = \sin(h\pi) = 0$.

Per questo consideriamo solo i valori per i k dispari.

Oltre ad analizzare l'onda quadra, andrò a verificare, solo per il coseno, come aumentando il numero di armoniche la $v_{out}(t)$ diventi sempre più simile all'onda quadra corrispondente.

Per primo ho analizzato le armoniche cosinusoidali.

Poiché volevo ottenere come risultato un'onda quadra di range $+5 \div -5$ [V] e di frequenza 1[kHz], la formula del coseno diventava:

$$B_k = \frac{2 * 10}{k\pi} * \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{20}{k\pi} * \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Ho disegnato sette circuiti per osservare come cambiava la $v_{out}(t)$ a mano a mano che aggiungevo le armoniche.

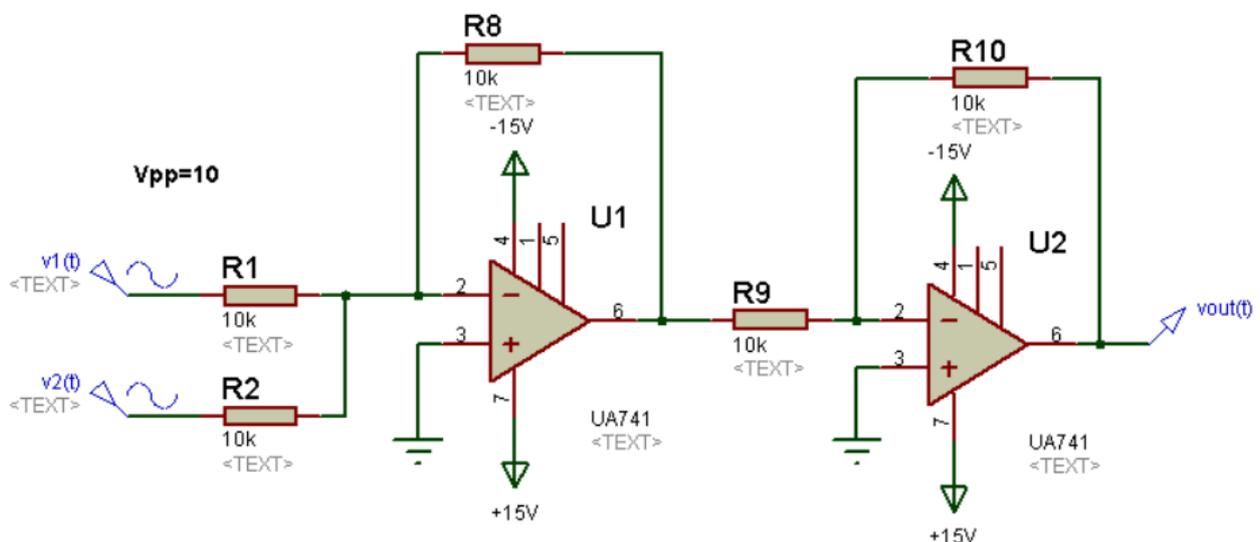
In ogni circuito il numero di armoniche aumenta, il primo ne ha 2, poi aumentano fino ad arrivare a 7 e successivamente c'è un salto fino ad ottenere 15 armoniche.

Nel circuito con solo due ingressi di tensione ho calcolato la portante e B3 (insieme a questi due calcoli è inserito anche quello di B2 per mostrare che nei pari il risultato è 0):

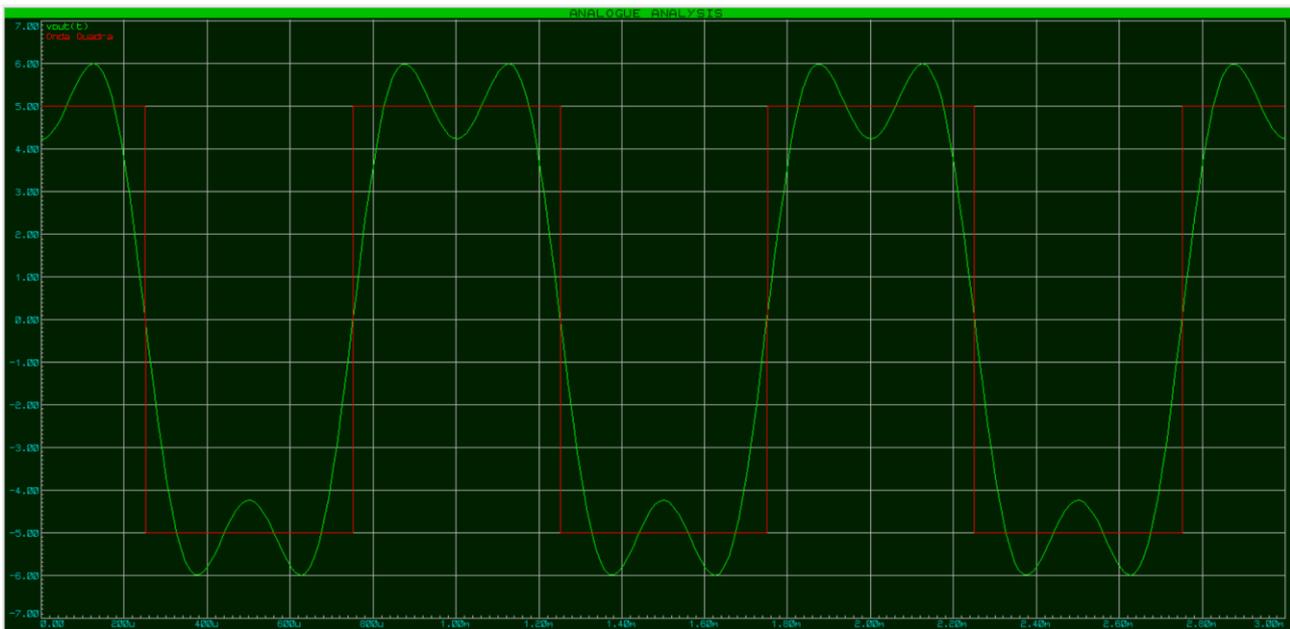
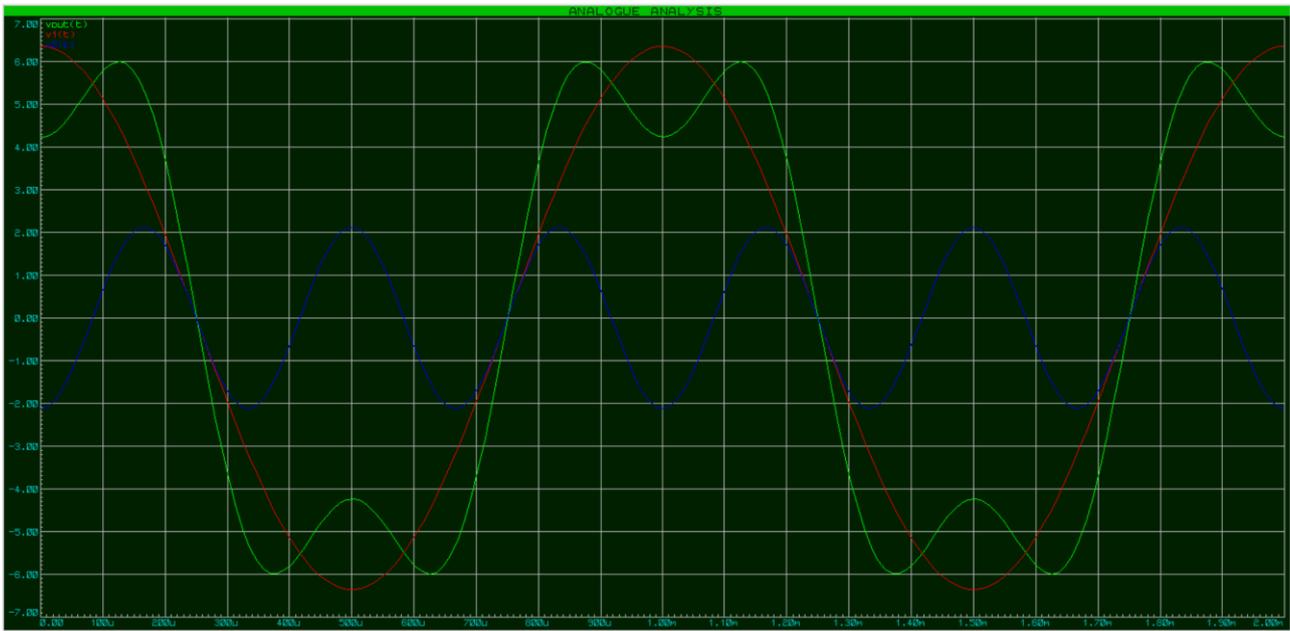
$$B_1 = \frac{20}{\pi} * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6,3662 * 1 \cong 6,37 \text{ [V]} \quad f=1[\text{kHz}]$$

$$B_2 = \frac{20}{2\pi} * \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 3,1831 * 0 = 0 \text{ [V]} \quad f=2[\text{kHz}]$$

$$B_3 = \frac{20}{3\pi} * \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2,12207 * (-1) \cong -2,12 \text{ [V]} \quad f=3[\text{kHz}]$$

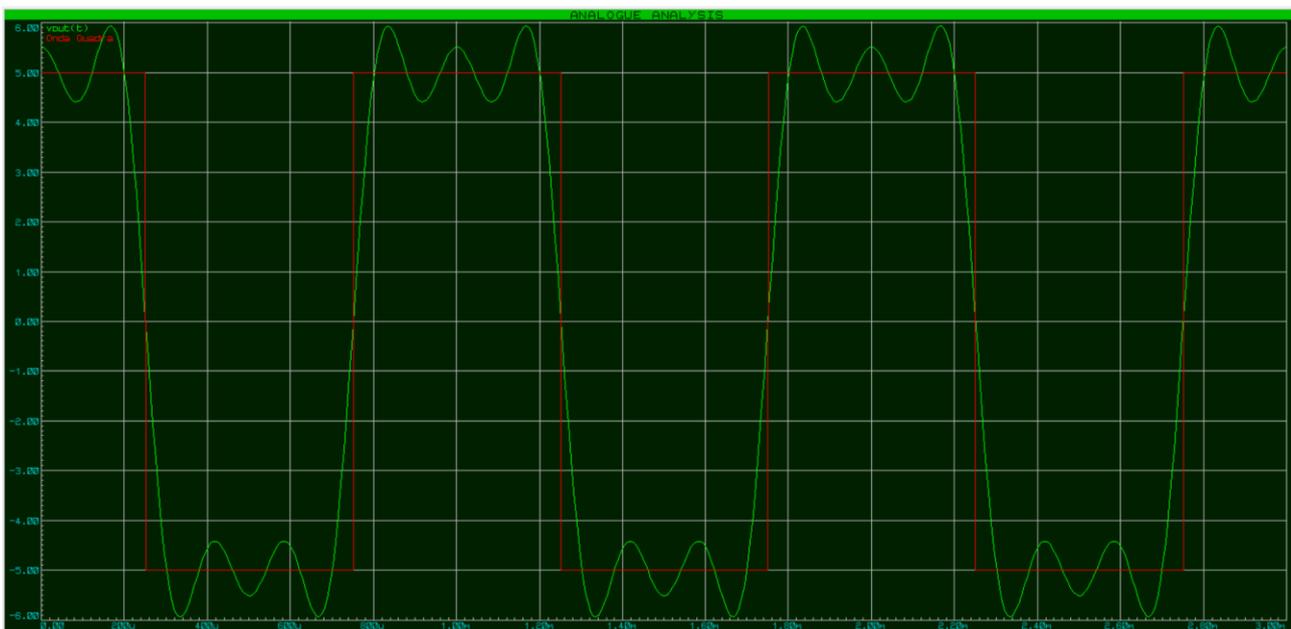
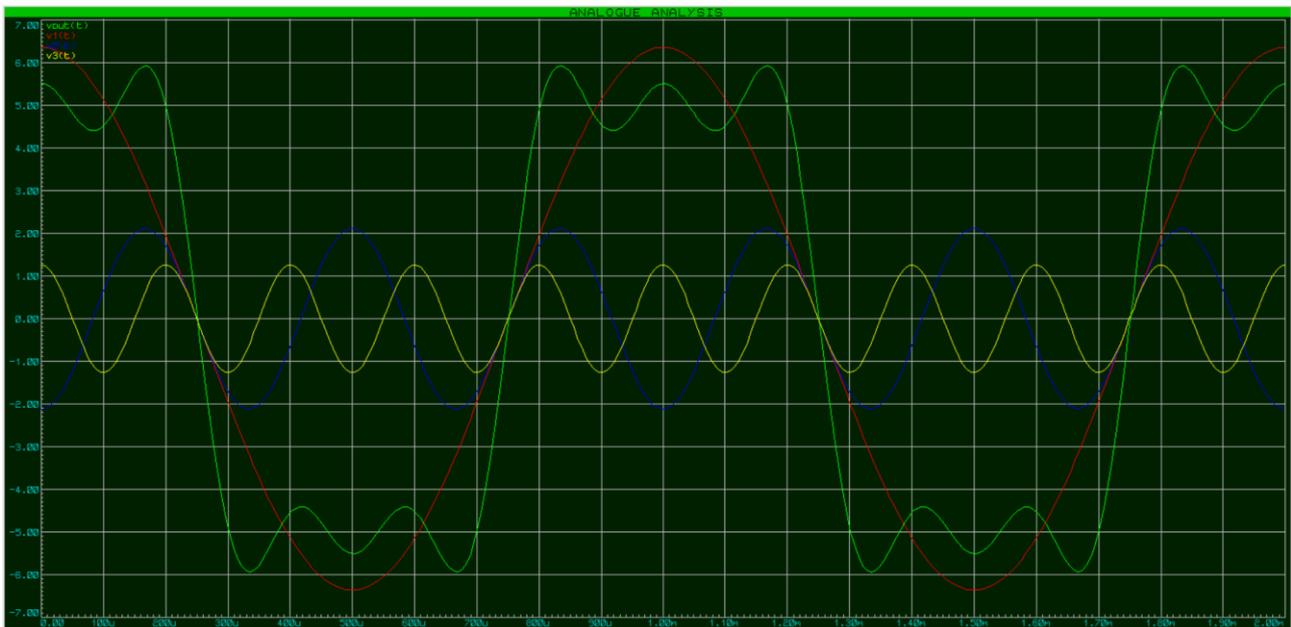
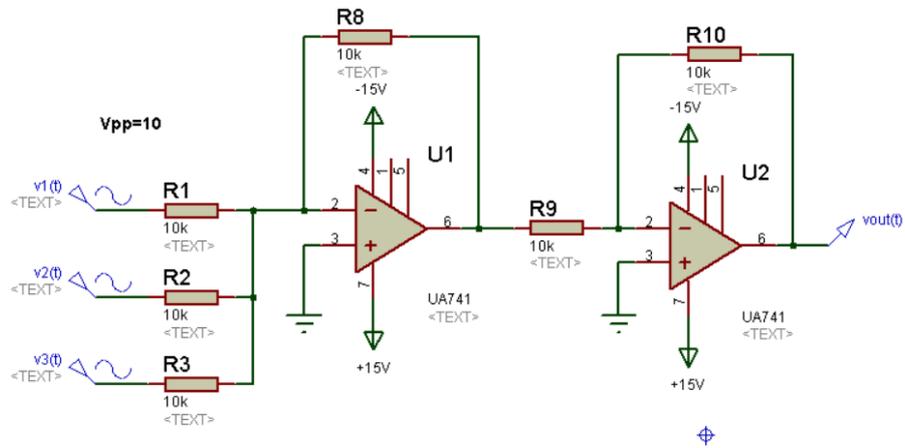


Come si può osservare dai grafici seguenti la $v_{out}(t)$ è molto diversa dall'onda quadra, però non assomiglia neanche ad una sinusoide.



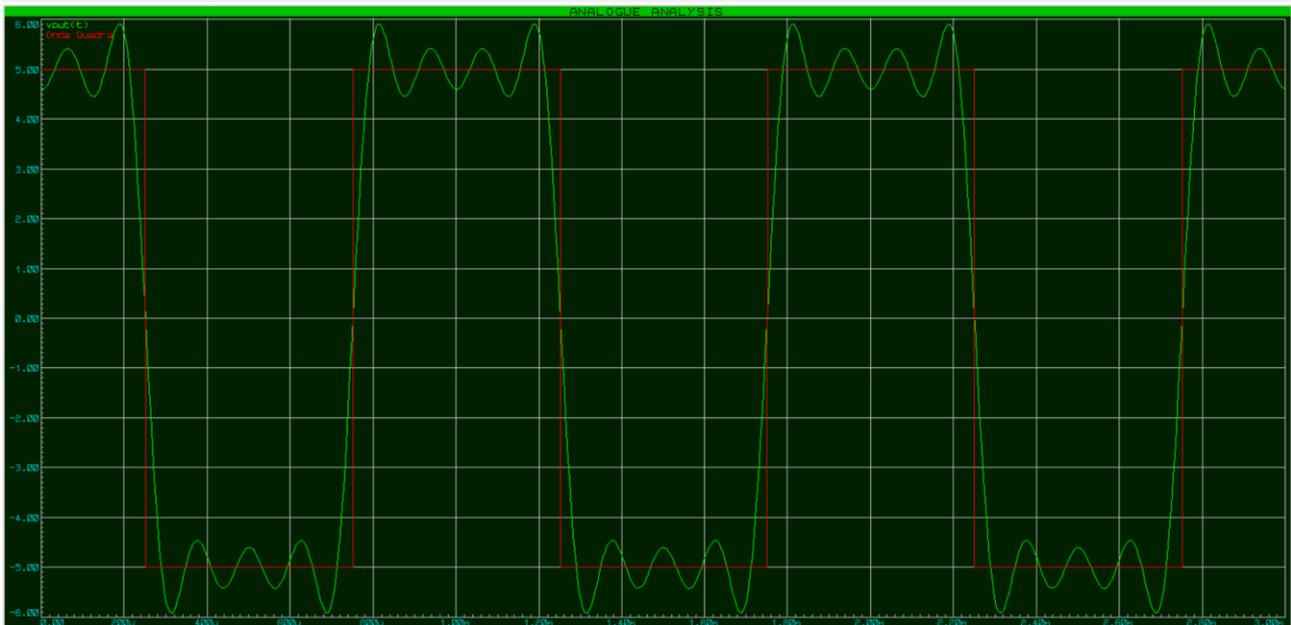
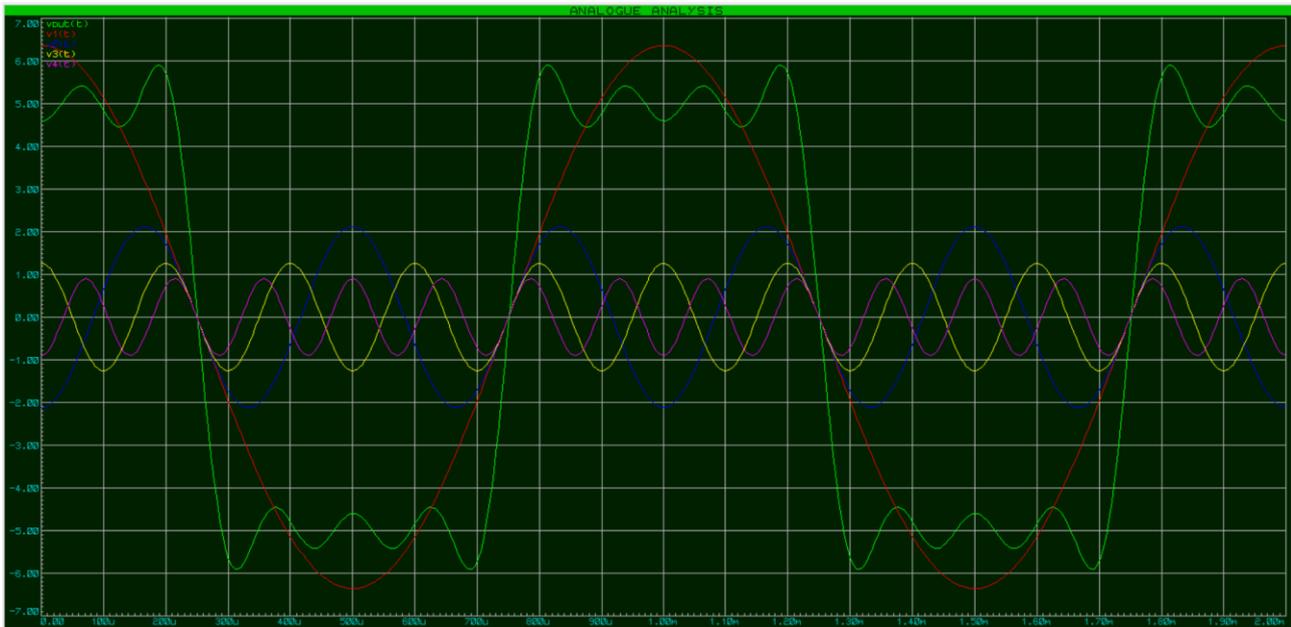
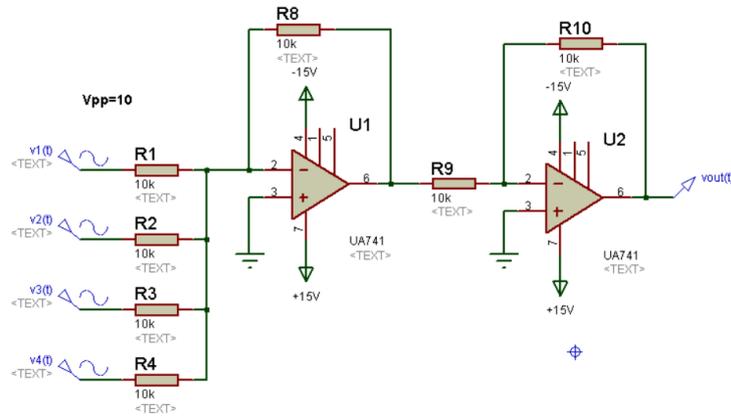
Nel circuito con tre tensioni d'ingresso la $v_{out}(t)$ resta sempre molto diversa dall'onda quadra, anche perché si somma solo B5:

$$B5 = \frac{20}{5\pi} * \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1,27324 * 1 \cong 1,27 [V] \quad f=5[\text{kHz}]$$



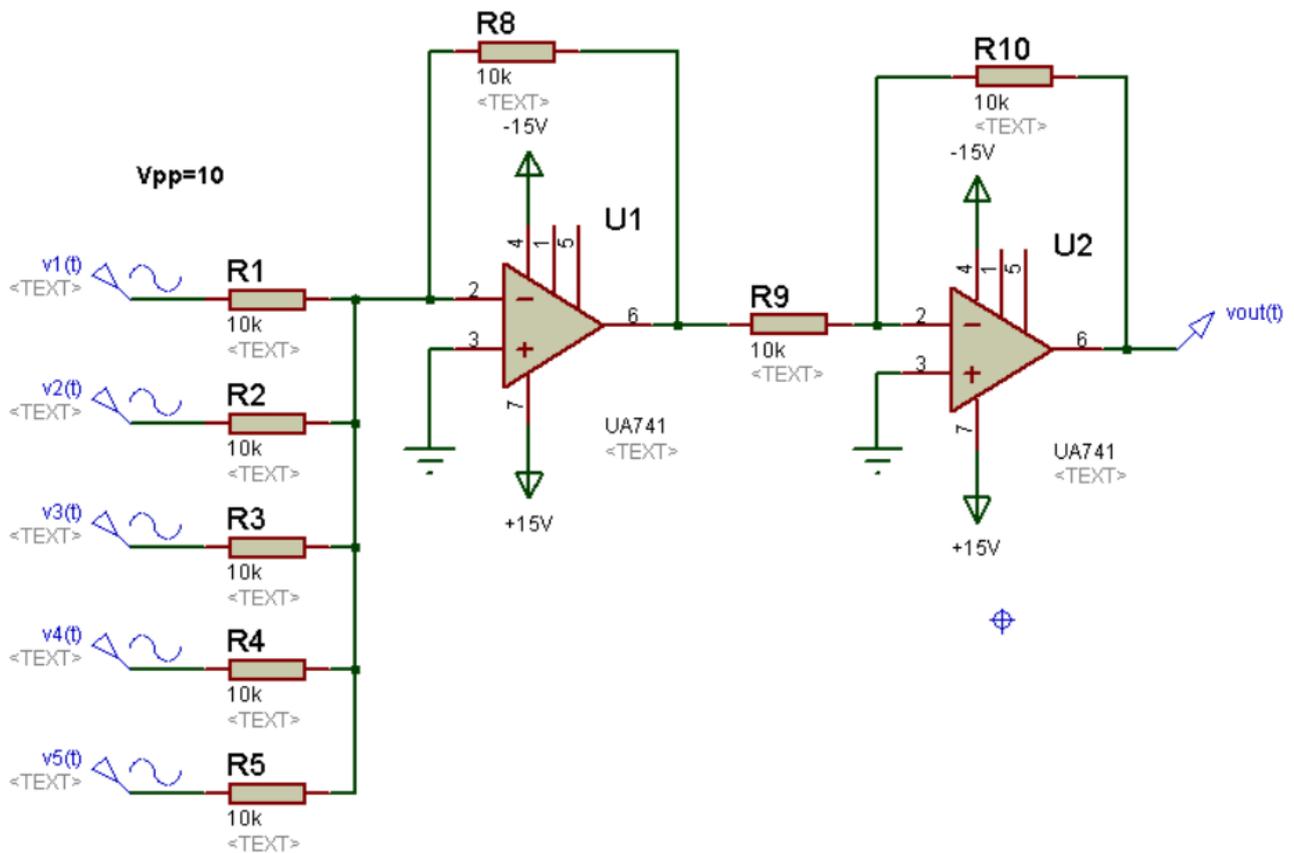
Nel circuito con quattro tensioni d'ingresso la $v_{out}(t)$ inizia già ad avere una pendenza simile a quella dell'onda quadra, con un tempo di salita e discesa di circa 100[ms].

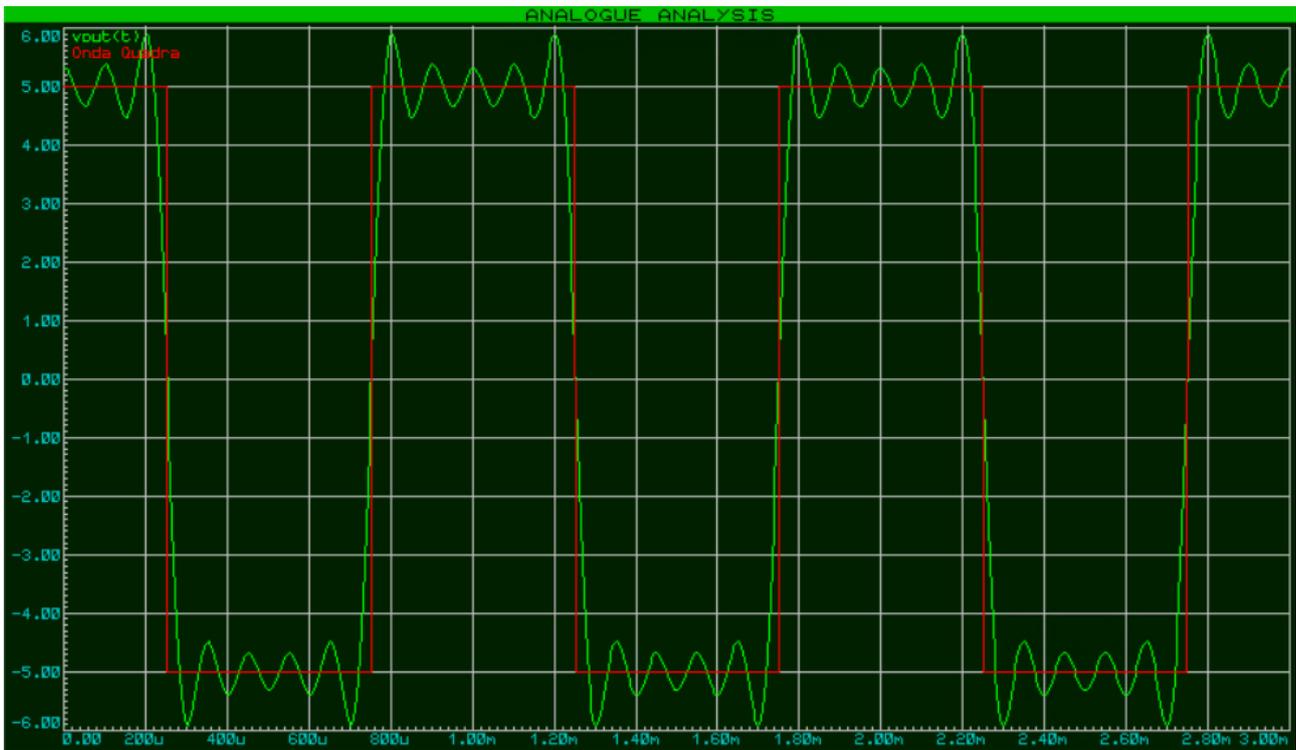
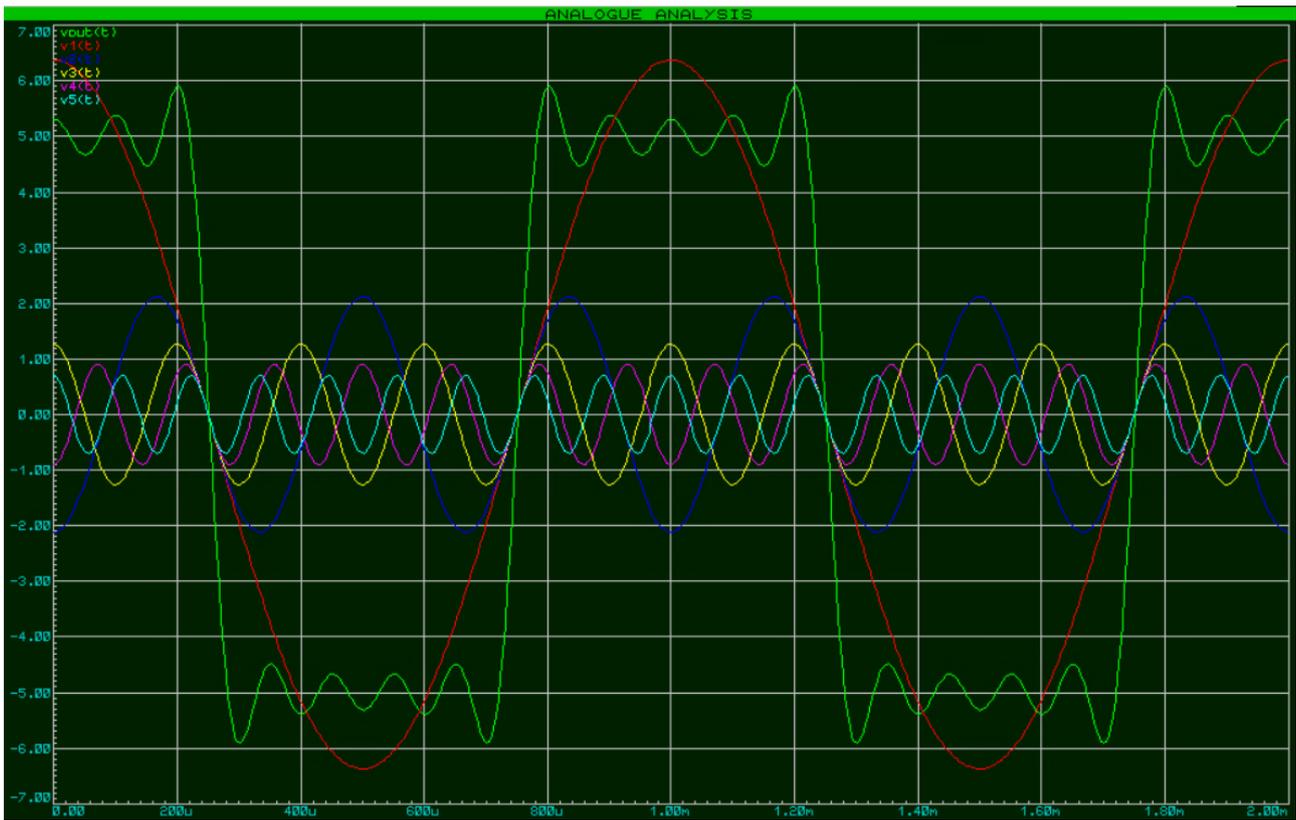
$$B7 = \frac{20}{7\pi} * \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0,909457 * (-1) \cong -909 [mV] \quad f=7[kHz]$$



Nel circuito con cinque tensioni d'ingresso si inizia a notare la somiglianza tra la $v_{out}(t)$ e l'onda quadra, ma c'è ancora tanta differenza.

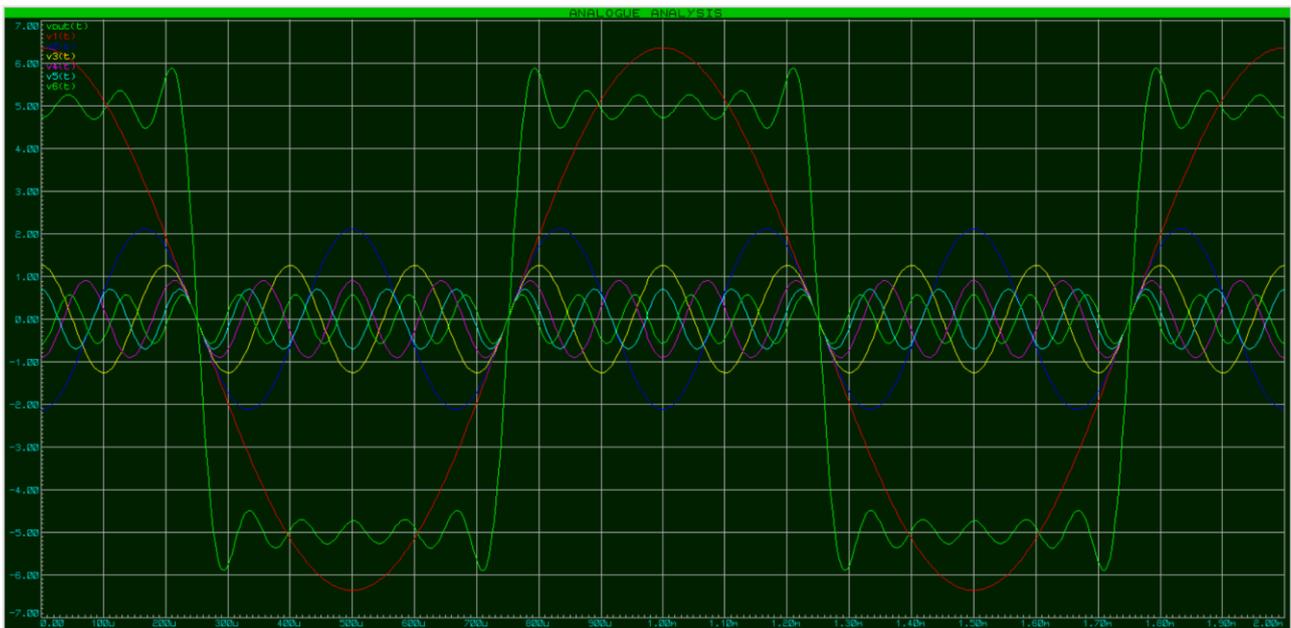
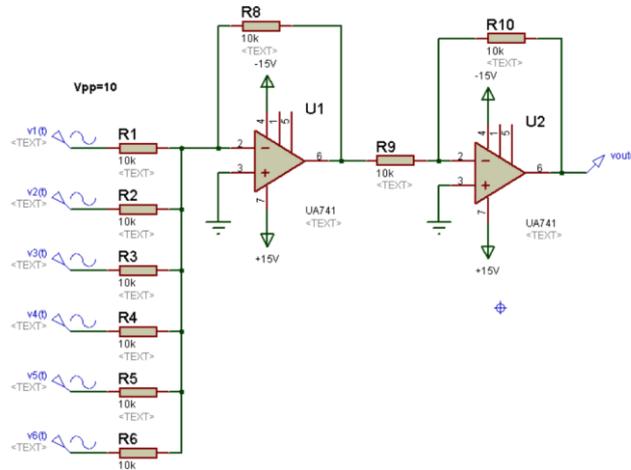
$$B_9 = \frac{20}{9\pi} * \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0,707355 * 1 \cong 707 [mV] \quad f=9[kHz]$$





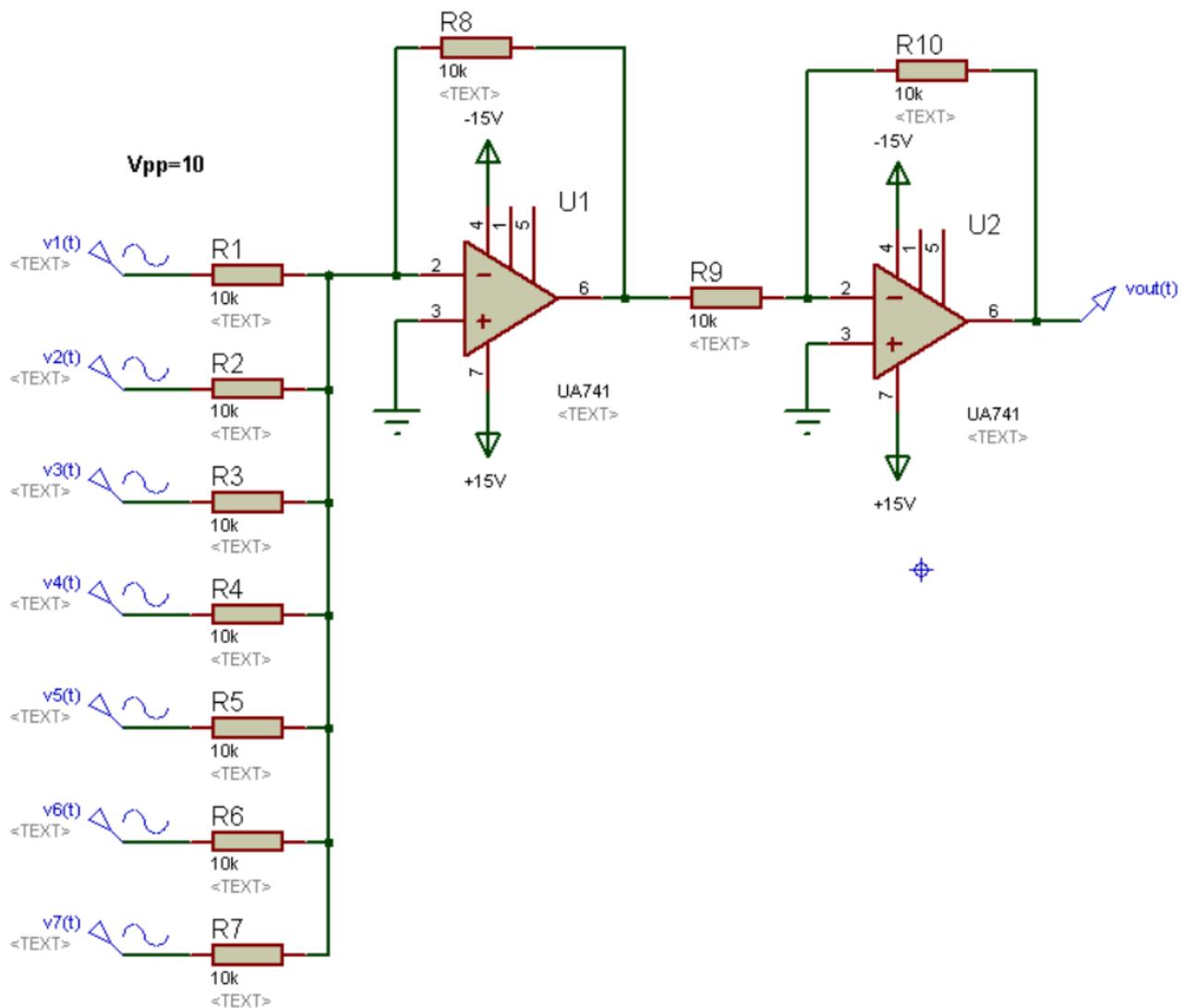
Nel circuito con sei tensioni d'ingresso i tempi di salita e discesa della $v_{out}(t)$ diminuiscono ancora.

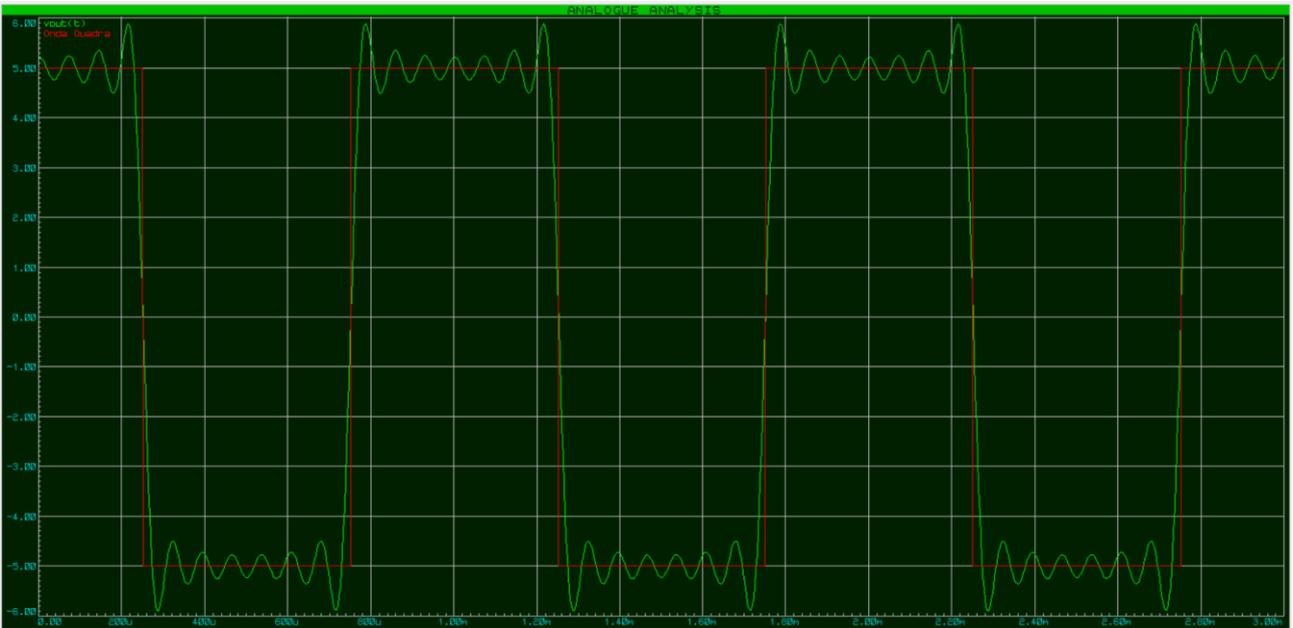
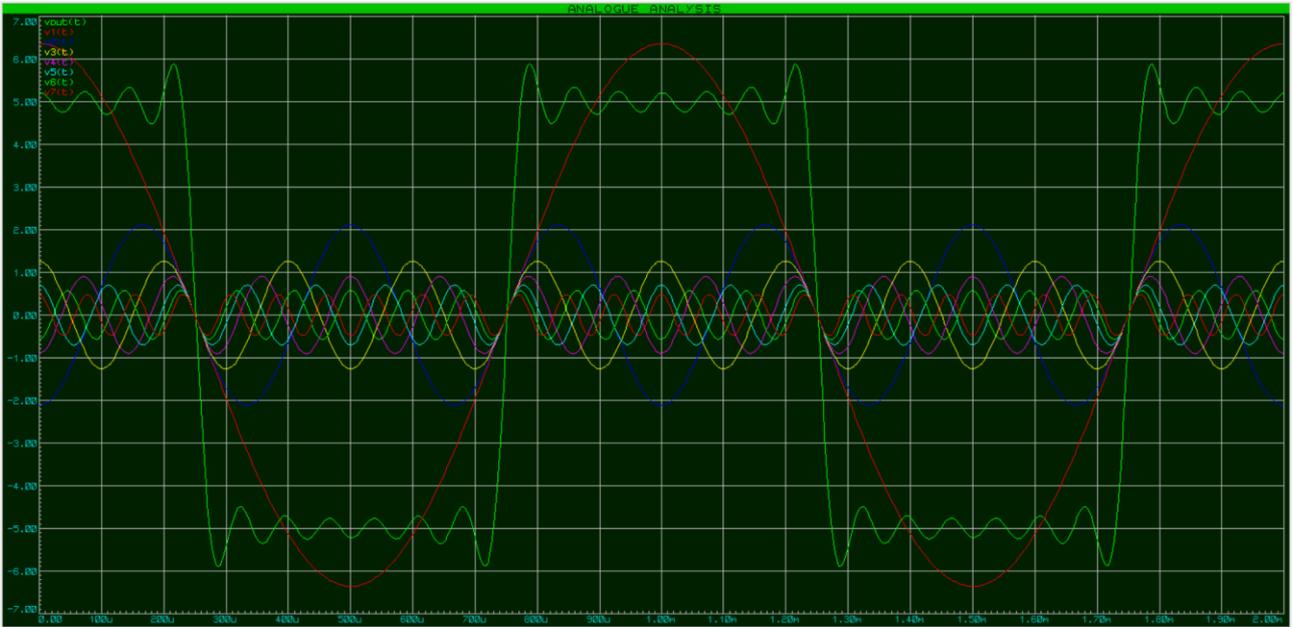
$$B_{11} = \frac{20}{11\pi} * \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right) = 0,578745 * (-1) \cong -579 [mV] \quad f=11[kHz]$$



Nel circuito con sette tensioni d'ingresso vediamo che la $v_{out}(t)$ è molto simile alla nostra onda quadra, però notiamo ancora la pendenza della salita e della discesa e le oscillazioni intorno a +5 [V] e -5[V].

$$B_{13} = \frac{20}{13\pi} * \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = 0,489708 * 1 \cong 490 [mV] \quad f=13[kHz]$$





Nel circuito con quindici tensioni d'ingresso, infine, la $v_{out}(t)$ è un'onda quadra quasi perfetta, la pendenza della salita e della discesa è quasi impercettibile e le oscillazioni intorno a +5[V] e -5[V] sono di circa ± 10 [mV].

$$B_{15} = \frac{20}{15\pi} * \sin\left(\frac{15\pi}{2}\right) = 0,424413 * (-1) \cong -424 [mV] \quad f=15[\text{kHz}]$$

$$B_{17} = \frac{20}{17\pi} * \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) = 0,374482 * 1 \cong 374 [mV] \quad f=17[\text{kHz}]$$

$$B_{19} = \frac{20}{19\pi} * \sin\left(\frac{19\pi}{2}\right) = 0,335063 * (-1) \cong -335 [mV] \quad f=19[\text{kHz}]$$

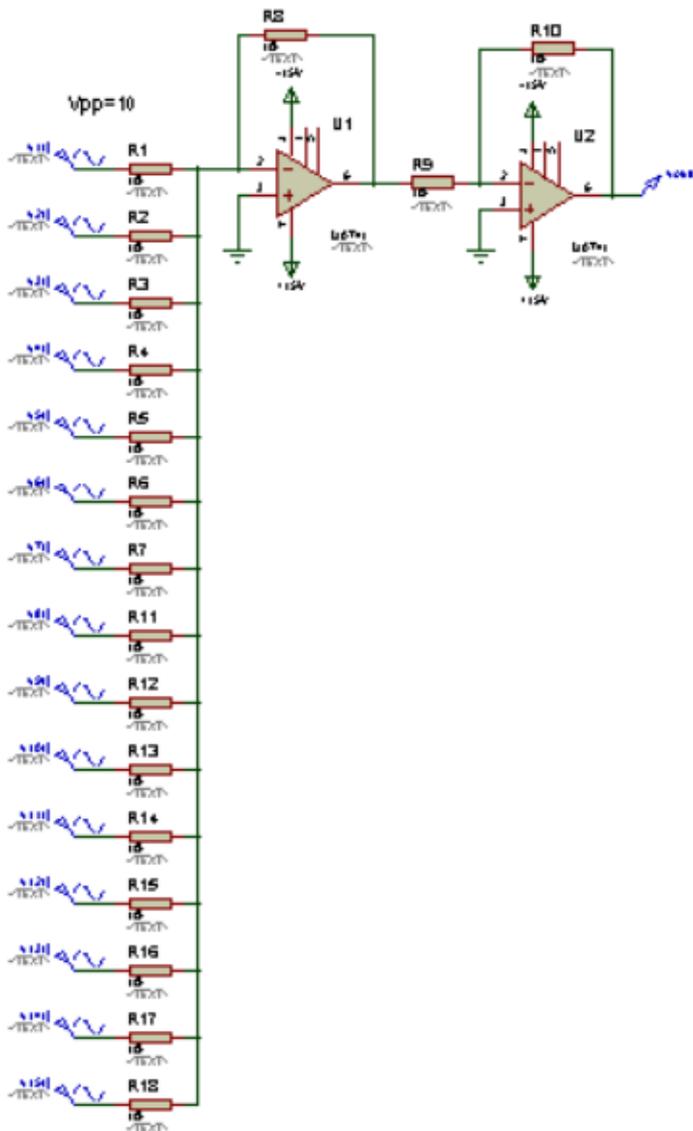
$$B_{21} = \frac{20}{21\pi} * \sin\left(\frac{21\pi}{2}\right) = 0,303152 * 1 \cong 303 [mV] \quad f=21[\text{kHz}]$$

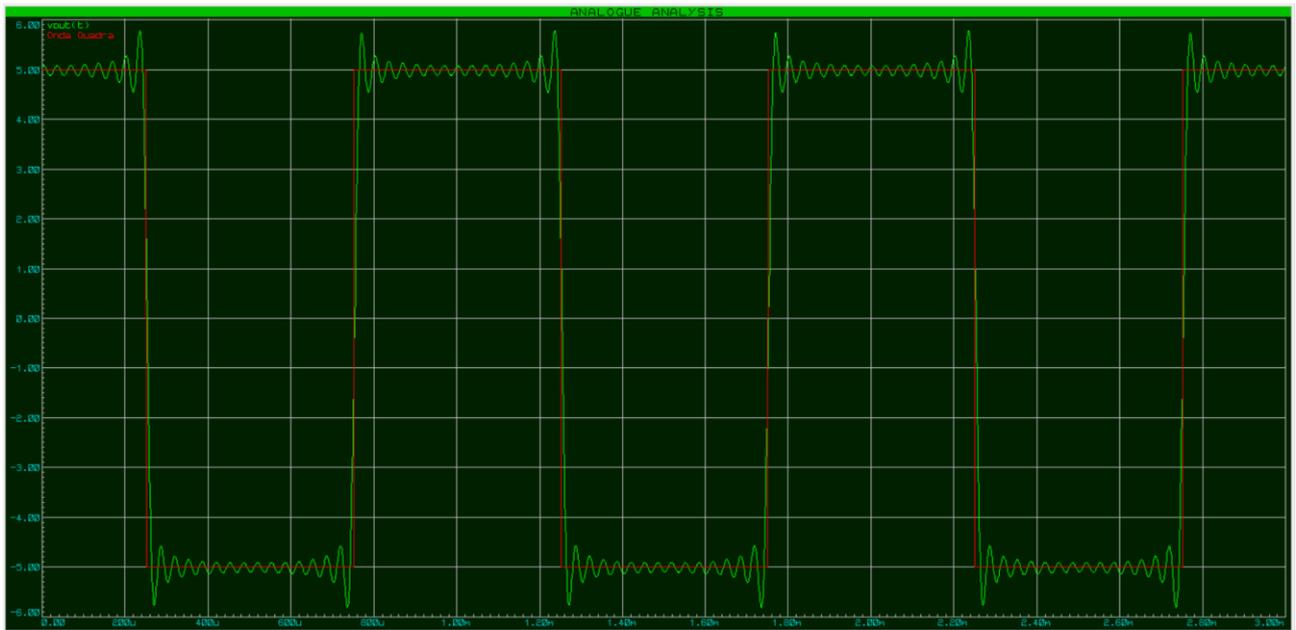
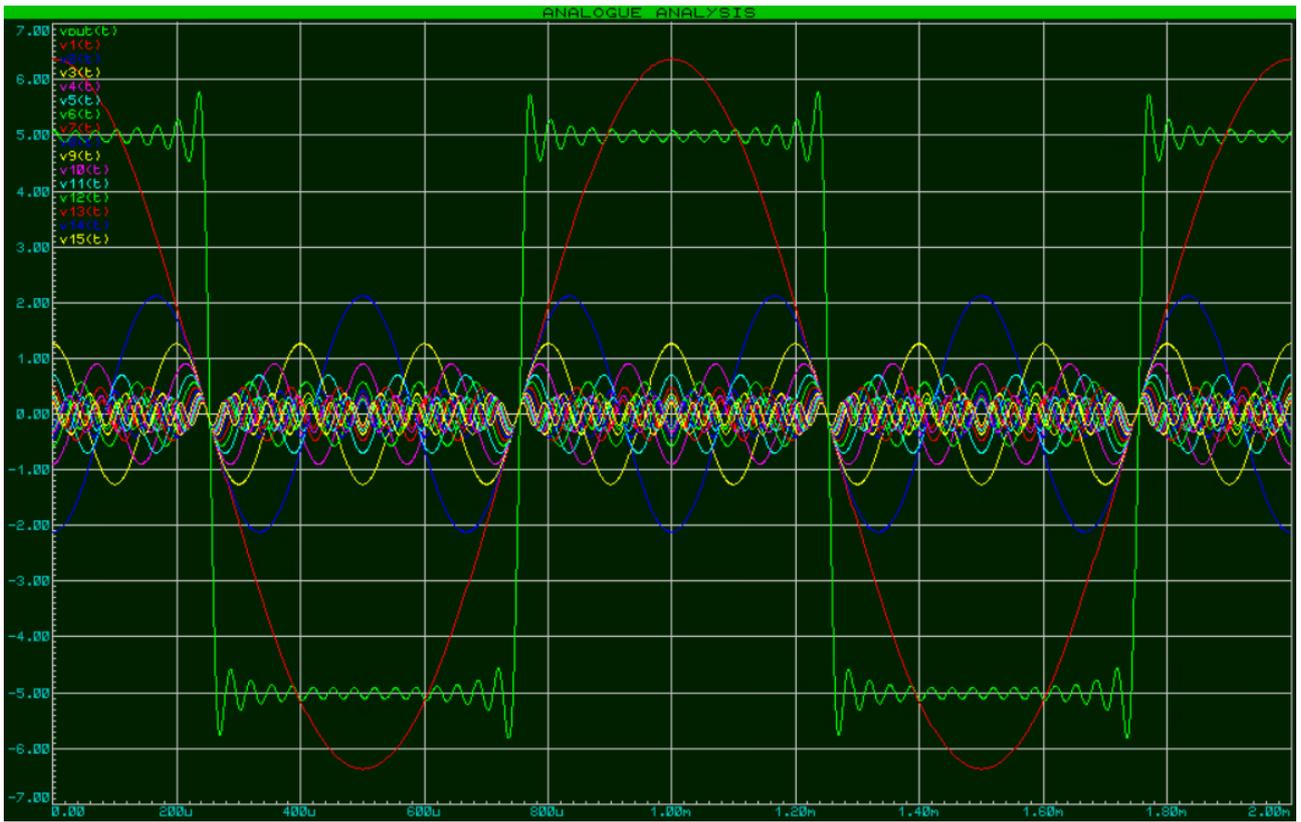
$$B_{23} = \frac{20}{23\pi} * \sin\left(\frac{23\pi}{2}\right) = 0,276791 * (-1) \cong -277 [mV] \quad f=23[\text{kHz}]$$

$$B_{25} = \frac{20}{25\pi} * \sin\left(\frac{25\pi}{2}\right) = 0,254648 * 1 \cong 255 [mV] \quad f=25[\text{kHz}]$$

$$B_{27} = \frac{20}{27\pi} * \sin\left(\frac{27\pi}{2}\right) = 0,235785 * (-1) \cong -236 [mV] \quad f=27[\text{kHz}]$$

$$B_{29} = \frac{20}{29\pi} * \sin\left(\frac{29\pi}{2}\right) = 0,219524 * 1 \cong 220 [mV] \quad f=29[\text{kHz}]$$





Con lo spettro di Fourier possiamo osservare bene e analizzare le varie componenti.

Nel grafico vengono riportati ampiezza e frequenza, rispettivamente sull'asse delle ascisse e delle ordinate.

Notiamo bene la diminuzione di ampiezza con l'aumentare della frequenza, infatti, vediamo, dal grafico qui sotto inserito, come la portante sia molto più grande rispetto a B29 e questo è confermato dalle formule dove abbiamo osservato che B29 ha un'ampiezza quindici volte inferiore rispetto a B1.



Per quanto riguarda l'onda quadra utilizzando come armoniche le sinusoidi, invece, volevo ottenere come risultato un'onda di range $+7 \div -7$ [V] e di frequenza sempre 1[kHz] e per avere questo la formula del seno diventava:

$$A_k = \frac{14}{k\pi} * [1 - \cos(k\pi)]$$

In questo caso ho fatto solo la simulazione con 7 armoniche, poiché è un numero di sinusoidi abbastanza elevato da ottenere una forma d'onda simile ad un'onda quadra, e non è un numero eccessivamente grande come potrebbe essere 15.

Qui le componenti che costituiscono la $v_{out}(t)$ sono:

$$A_1 = \frac{14}{\pi} * [1 - \cos(\pi)] = 4,45634 * [1 - (-1)] = 8,91268 \cong 8,91[V] \quad f=1[\text{kHz}]$$

$$A_2 = \frac{14}{2\pi} * [1 - \cos(2\pi)] = 2,22817 * [1 - 1] = 0 [V] \quad f=2[\text{kHz}]$$

$$A_3 = \frac{14}{3\pi} * [1 - \cos(3\pi)] = 1,48545 * [1 - (-1)] = 2,97089 \cong 2,97[V] \quad f=3[\text{kHz}]$$

$$A_4 = \frac{14}{4\pi} * [1 - \cos(4\pi)] = 1,11408 * [1 - 1] = 0[V] \quad f=4[\text{kHz}]$$

$$A_5 = \frac{14}{5\pi} * [1 - \cos(5\pi)] = 0,891268 * [1 - (-1)] = 1,78254 \cong 1,78 [V] \quad f=5[\text{kHz}]$$

$$A_6 = \frac{14}{6\pi} * [1 - \cos(6\pi)] = 0,742723 * [1 - 1] = 0[V] \quad f=6[\text{kHz}]$$

$$A_7 = \frac{14}{7\pi} * [1 - \cos(7\pi)] = 0,63662 * [1 - (-1)] = 1,27324 \cong 1,27 [V] \quad f=7[\text{kHz}]$$

$$A_8 = \frac{14}{8\pi} * [1 - \cos(8\pi)] = 0,557042 * [1 - 1] = 0[V] \quad f=8[\text{kHz}]$$

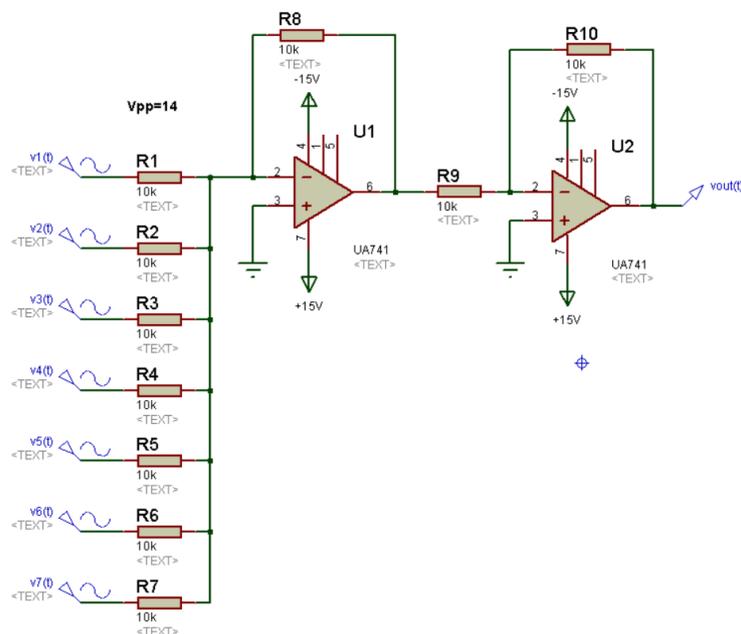
$$A_9 = \frac{14}{9\pi} * [1 - \cos(9\pi)] = 0,495149 * [1 - (-1)] = 0,990297 \cong 990[mV] \quad f=9[\text{kHz}]$$

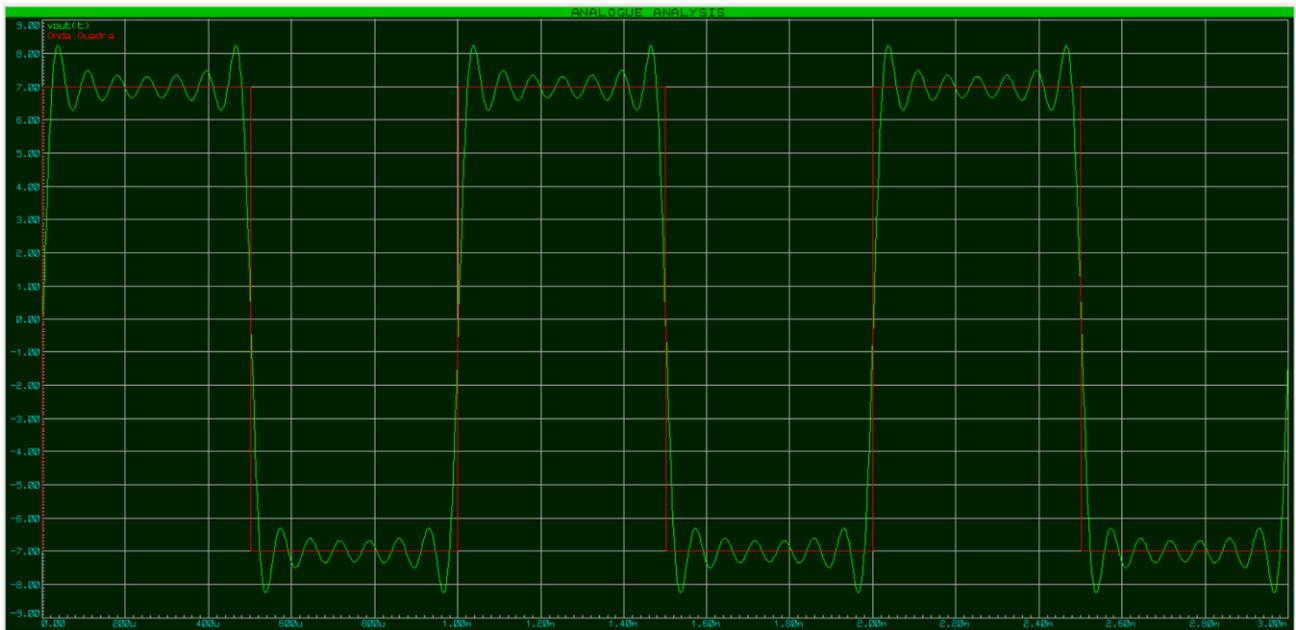
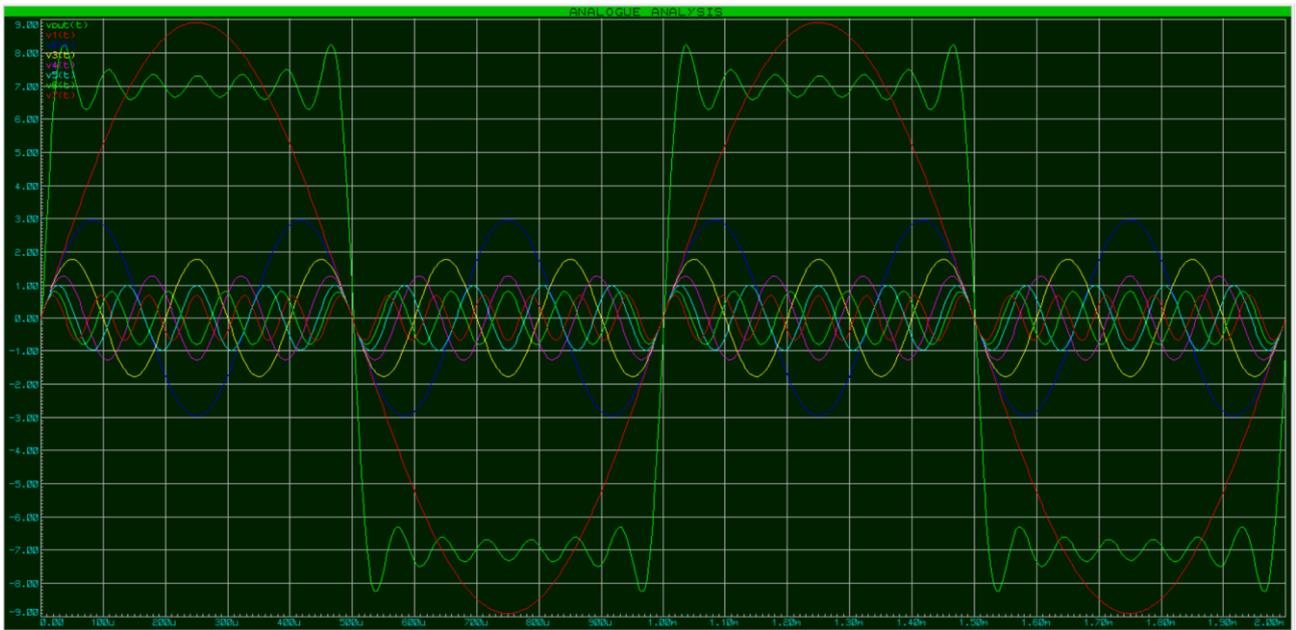
$$A_{10} = \frac{14}{10\pi} * [1 - \cos(10\pi)] = 0,445634 * [1 - 1] = 0[V] \quad f=10[\text{kHz}]$$

$$A_{11} = \frac{14}{11\pi} * [1 - \cos(11\pi)] = 0,405122 * [1 - (-1)] = 0,810243 \cong 810[mV] \quad f=11[\text{kHz}]$$

$$A_{12} = \frac{14}{12\pi} * [1 - \cos(12\pi)] = 0,371362 * [1 - 1] = 0[V] \quad f=12[\text{kHz}]$$

$$A_{13} = \frac{14}{13\pi} * [1 - \cos(13\pi)] = 0,342795 * [1 - (-1)] = 0,685591 \cong 686[mV] \quad f=13[\text{kHz}]$$





Anche in questo caso con lo spettro di Fourier osserviamo bene e analizziamo le varie componenti, infatti, possiamo notare dal grafico qui sotto, come la portante sia molto più grande rispetto a B13, anche perché quest'ultima ha un'ampiezza tredici volte inferiore.

