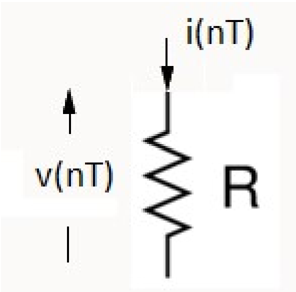
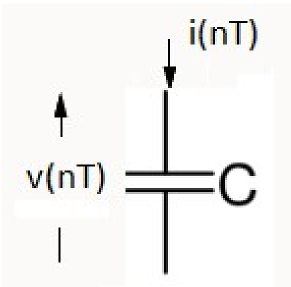
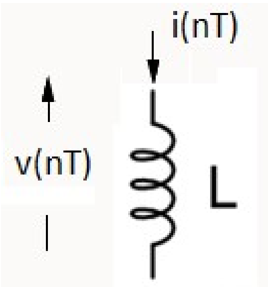
SIMULAZIONE DI SISTEMI IN LINGUAGGIO C/C++

(Prof. Fischetti Pietro)

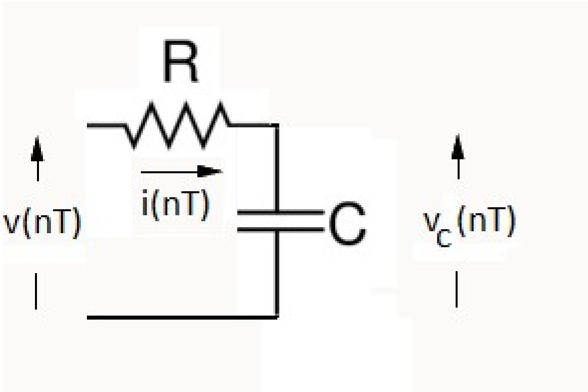
SISTEMI ELETTRICI

RESISTENZA 	$v(nT) = R \cdot i(nT)$
CONDENSATORE 	$i(nT) = C \cdot \frac{\Delta v(nT)}{\Delta T}$
INDUTTANZA 	$v(nT) = L \cdot \frac{\Delta i(nT)}{\Delta T}$

Per l’approssimazione delle derivate utilizzeremo le differenze all’indietro del metodo di Eulero[1]:

$$\Delta v(nT) = v(nT) - v[(n-1)T]$$
$$\Delta i(nT) = i(nT) - i[(n-1)T]$$
$$\Delta T = nT - (n-1)T = T$$

<u>ESEMPIO RC:</u>



Calcolo della tensione ai capi del condensatore:

$$v(nT) = R \cdot i(nT) + Vc(nT)$$

$$v(nT) = RC \cdot \frac{\Delta Vc(nT)}{T} + Vc(nT)$$

$$v(nT) = RC \cdot \frac{Vc(nT) - Vc[(n-1)T]}{T} + Vc(nT)$$

$$v(nT) = RC \cdot \frac{Vc(nT)}{T} - RC \cdot \frac{Vc[(n-1)T]}{T} + Vc(nT)$$

$$Vc(nT)\left(1 + \frac{RC}{T}\right) = \frac{Vc[(n-1)T]}{T} \cdot RC + V(nT)$$

$$Vc(nT)\left(\frac{T + RC}{T}\right) = \frac{Vc[(n-1)T]}{T} \cdot RC + V(nT)$$

$$Vc(nT) = \frac{Vc[(n-1)T] \cdot RC}{T} \cdot \frac{T}{T + RC} + \frac{T \cdot V(nT)}{T + RC}$$

$$Vc(nT) = \frac{Vc[(n-1)T] \cdot RC}{T + RC} + \frac{T \cdot V(nT)}{T + RC}$$

Simulazione in C/C++:

square.cpp -Genera un segnale ad onda quadra (64 punti, freq=1000Hz,Freq.Camp. =16KHz)

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
float f=1000.;       //frequenza
int R=16384;         //Frequenza di campionamento
int N=64;            //Numero di campioni
int spp =R/f;        //Numero di campioni per periodo
float dc=0.5;
int k=0;
for(int i=0; i < N;i++){
 k=i%spp;
cout << (k<dc*spp?1:0)<<endl;
}
return 0;
}
```

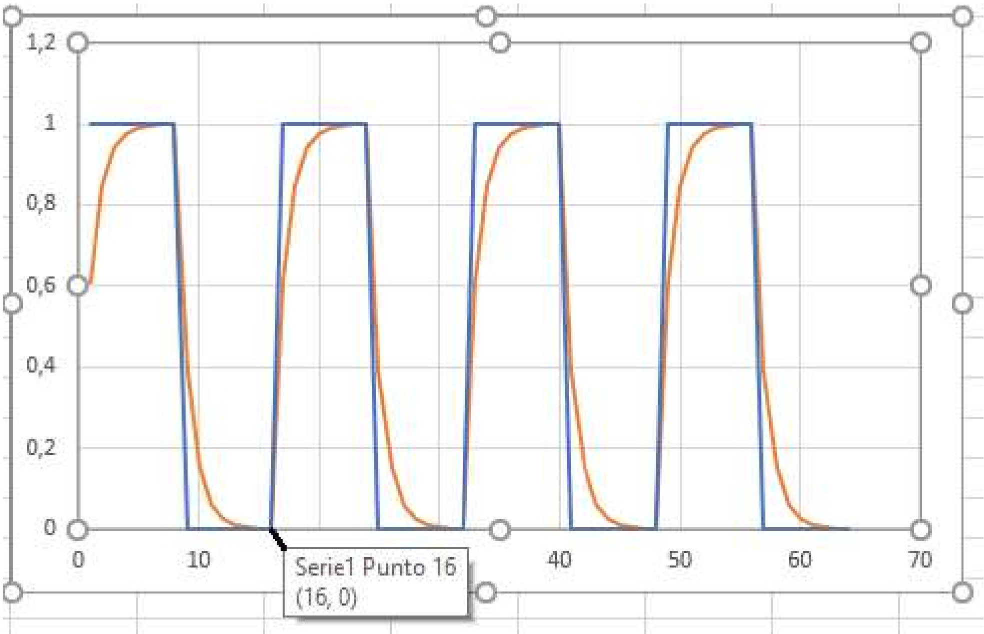
RC.cpp - Circuito RC(R=100Ohm,C=1uF)

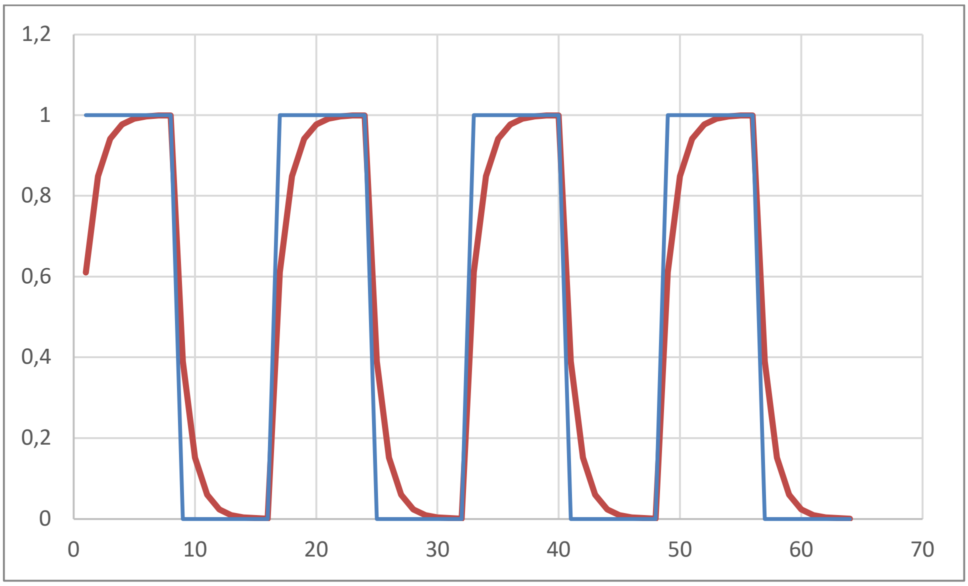
```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
 double R=100
 double C=1e-6;
 double T=1./S;
 double V=0,Vc=0;

 while(cin >> V){
     Vc=(Vc*R*C/(T+R*C))+(T*V)/(T+R*C);
     cout << Vc << endl;
 }
 return 0;
}
```

Esecuzione:

C:\>square | RC>a.txt

Visualizzazione in Excel:





Calcolo della corrente:

$$v(t) = R \cdot i(t) + v_c(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Differenziando:

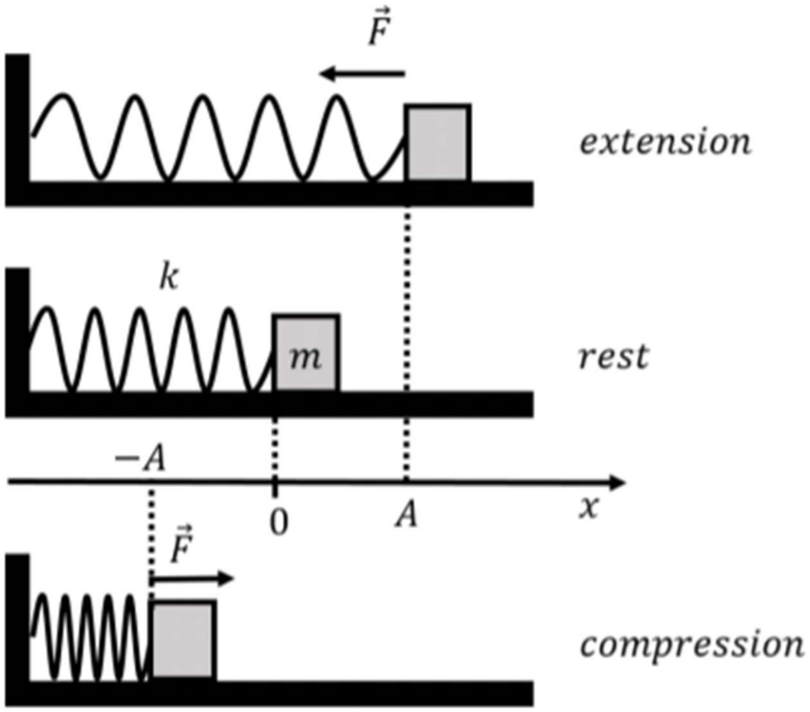
$$\frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

Approssimando:

$$R \cdot \frac{i(nT) - i[(n-1)T]}{T} + \frac{1}{C} \cdot i(nT) = \frac{v(nT) - vc[(n-1)T]}{T}$$

SISTEMI MECCANICI

Massa-molla orizzontale senza attrito



Il sistema massa-molla oscillante attorno all'origine con ampiezza A

DESCRIZIONE DELL'ENERGIA

In ogni posizione x l'energia meccanica E e' pari alla somma dell'energia potenziale U e l'energia cinetica K

$$E = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Nei punti di oscillazione massima (+A) e minima (-A) la velocita' e zero quindi l'energia cinetica e':

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Quindi se si conosce l'ampiezza A si ottiene la velocita' in un punto x:

$$v(x) = \sqrt{\frac{k(A^2 - x^2)}{m}}$$

La velocita' massima si otterra' nella posizione: x=0:

$$v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$Legge\ di\ Hook: F = -kx \qquad II\ legge\ della\ dinamica: F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow\ m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Quindi approssimando le derivate:

$$a = \frac{-kx}{m} \qquad a \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad v \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

SIMULAZIONE IN C/C++

Massa-molla orizzontale senza smorzamento

Hspring.cpp

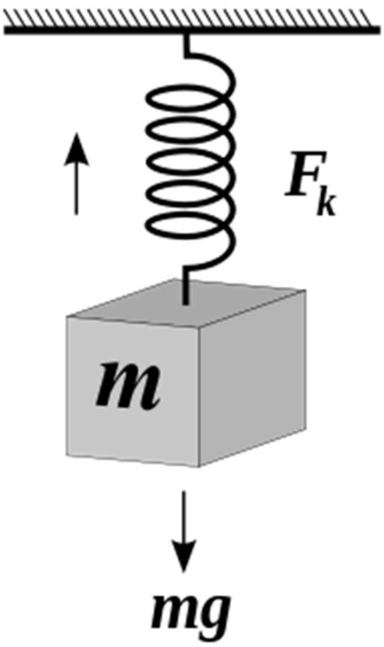
```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
 double
        k=2.5,//[N/m]
        m=1.5,//[Kg]
        x=5,//posizione iniziale
        v=0,
        a=0,
        t=0,
        dt=0.1;
        while(t<10){
                cout << t << "\t" << x << "\t" << v << endl;
                a=-((k*x)/m);
                v+=a*dt;
                x+=v*dt;
                t+=dt;

        }
 return 0;
}
```

Esecuzione:

C:\>hspring.exe > a.txt

	A	B	C
1	0	5	0
2	0,1	4,91667	-0,83333
3	0,2	4,75139	-1,65278
4	0,3	4,50692	-2,44468
5	0,4	4,18734	-3,19583
6	0,5	3,79797	-3,89372
7	0,6	3,3453	-4,52671
8	0,7	2,83687	-5,08426
9	0,8	2,28116	-5,55707
10	0,9	1,68743	-5,93727
11	1	1,06558	-6,21851
12	1,1	0,425973	-6,3961
13	1,2	-0,22074	-6,4671
14	1,3	-0,86377	-6,43031
15	1,4	-1,4924	-6,28635
16	1,5	-2,09616	-6,03762
17	1,6	-2,66499	-5,68825
18	1,7	-3,1894	-5,24409
19	1,8	-3,66065	-4,71252
20	1,9	-4,07089	-4,10241
21	2	-4,41329	-3,42393
22	2,1	-4,68212	-2,68839
23	2,2	-4,87293	-1,90803

Massa-molla verticale senza attrito



Mentre nel caso orizzontale, avevamo:

$$F = -kx$$

Ora nel caso verticale abbiamo du forze: la forza di Hook F1=-kx e la forza di gravita': F2=mg. Qundi la forza totale e' data dalla somma: F=F1+F2=-kx+mg

Che differisce dal caso orizzontale per la presenza di un termine costante:mg. Riscrivendo:

$$F = -kx + mg = -k\left(x - \frac{m}{k}g\right)$$

analoga all caso orizzontale piu' uno scostamento:

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

Ritornando alla precedente relazione:

$$F = -kx + mg = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Quindi

$$ma = -kx + mg \Rightarrow a = \frac{-kx}{m} + g \quad a = \frac{dv}{dt} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Approssimando:

$$a = \frac{-kx}{m} + g \quad a \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad v \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

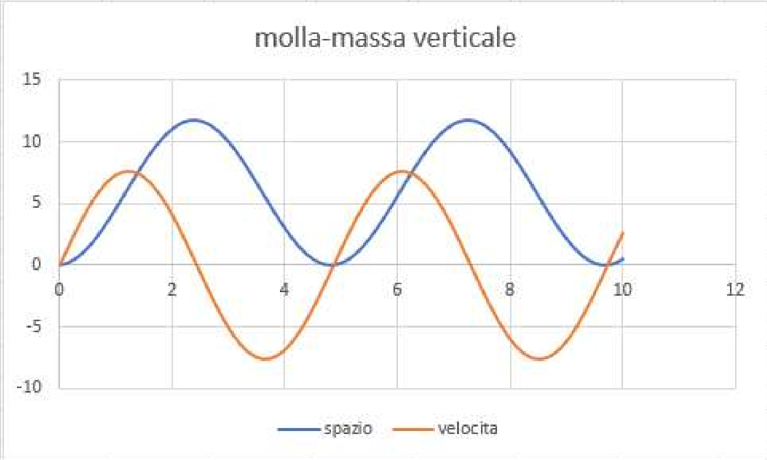
vspring.cpp

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
 double
		k=2.5,//[N/m]
		m=1.5,//[Kg]
		g = 9.8, //[m/s]
		x=0,
		v=0,
		a=0,
		t=0,
		dt=0.1;
		while(t<10){
			cout << t << "\t" << x << "\t" << v << endl;
			a=-((k*x)/m)+g;
			v+=a*dt;
			x+=v*dt;
			t+=dt;

		}
 return 0;
}
```

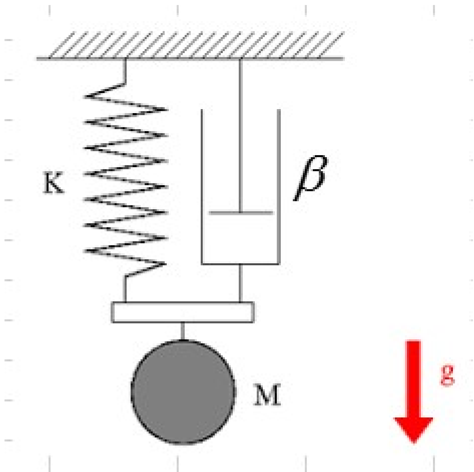
Esecuzione:

C:\>vsrping.exe > a.txt

	A	B	C
1	0	0	0
2	0,1	0,098	0,98
3	0,2	0,292367	1,94367
4	0,3	0,579861	2,87494
5	0,4	0,95569	3,7583
6	0,5	1,41359	4,57901
7	0,6	1,94593	5,32342
8	0,7	2,54384	5,97909
9	0,8	3,19735	6,53512
10	0,9	3,89558	6,98223
11	1	4,62687	7,31296
12	1,1	5,37906	7,52182
13	1,2	6,13959	7,60531
14	1,3	6,89579	7,56205
15	1,4	7,63507	7,39275
16	1,5	8,34509	7,10024
17	1,6	9,01403	6,68939
18	1,7	9,63073	6,16705
19	1,8	10,1849	5,54193
20	1,9	10,6674	4,82444
21	2	11,07	4,02655
22	2,1	11,3862	3,16154
23	2,2	11,6106	2,24384



MASSA-MOLLA VERTICALE CON SMORZAMENTO



Introduciamo la forza responsabile dello smorzamento proporzionale alla velocita':

$$F_d = -\beta v \qquad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow F_d = -\beta \frac{dx}{dt}$$

Le forze applicate saranno allora:

$$ma = -kx + F_d + mg \Rightarrow ma = -kx - \beta v + mg$$

Quindi:

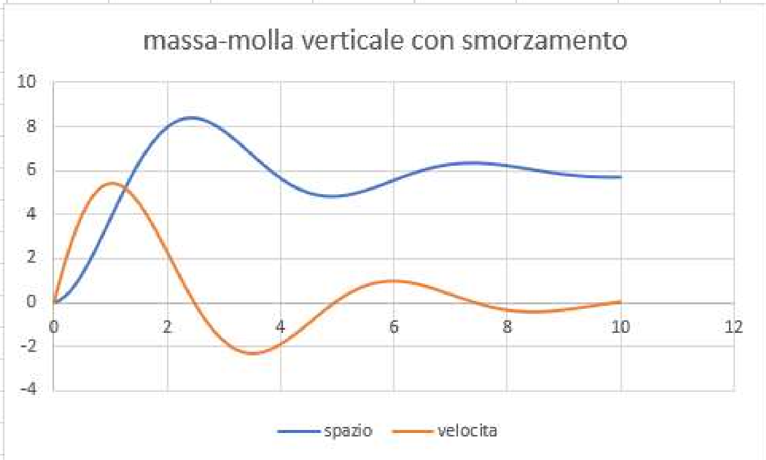
$$a = -\frac{kx}{m} - \frac{\beta}{m} v + g$$

SIMULAZIONE IN C/C++

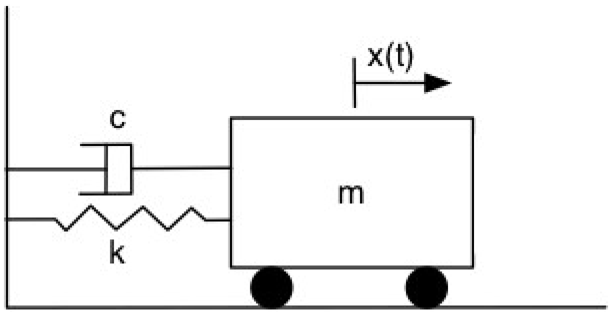
DVSpring.cpp

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
 double
        k=2.5,//[N/m]
        m=1.5,//[Kg]
        g = 9.8, //[m/s]
        x=0,
        v=0,
        a=0,
        t=0,
        B=1,//Fattore di smorzamento[Ns/m]
        dt=0.1;
        while(t<10){
                cout << t << "\t" << x << "\t" << v << endl;
                a=-((k*x)/m)-((B/m)*v)+g;
                v+=a*dt;
                x+=v*dt;
                t+=dt;

        }
 return 0;
}
```

1	0	0	0
2	0,1	0,098	0,98
3	0,2	0,285833	1,87833
4	0,3	0,554381	2,68547
5	0,4	0,893785	3,39404
6	0,5	1,29367	3,99881
7	0,6	1,74333	4,49661
8	0,7	2,23196	4,88628
9	0,8	2,74881	5,16854
10	0,9	3,28339	5,34583
11	1	3,82561	5,42221
12	1,1	4,36593	5,40313
13	1,2	4,89545	5,29527
14	1,3	5,40609	5,10634
15	1,4	5,89058	4,8449
16	1,5	6,34259	4,52015
17	1,6	6,75676	4,1417
18	1,7	7,12871	3,71946
19	1,8	7,45505	3,26338
20	1,9	7,73338	2,78331
21	2	7,96227	2,28886
22	2,1	8,14119	1,78923
23	2,2	8,2705	1,29308



MASSA-MOLLA ORIZZONTALE CON SMORZAMENTO



Introduciamo la forza responsabile dello smorzamento proporzionale alla velocita':

$$F_d = -\beta v \qquad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow F_d = -\beta \frac{dx}{dt}$$

Le forze applicate saranno allora:

$$ma = -kx + F_d \Rightarrow ma = -kx - \beta v$$

Quindi:

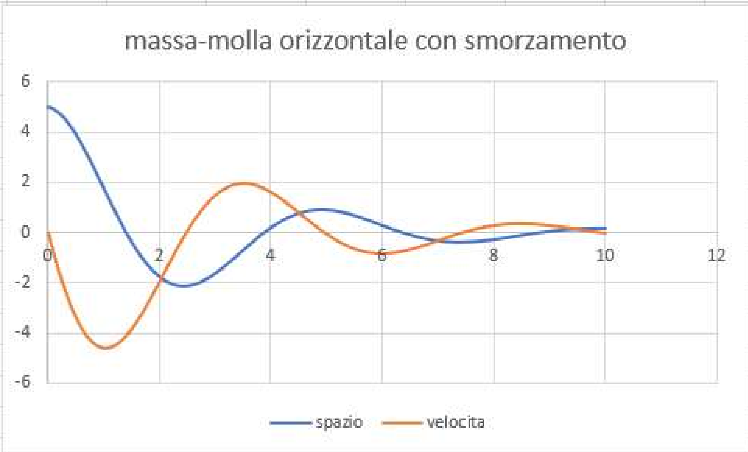
$$a = -\frac{kx}{m} - \frac{\beta}{m} v$$

SIMULAZIONE IN C/C++

DHSpring.cpp

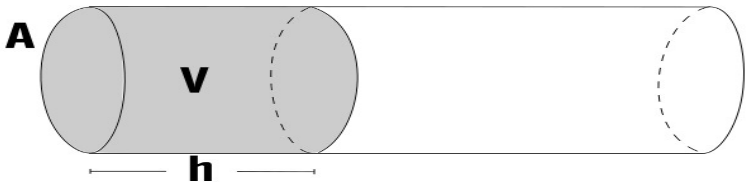
```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
 double
        k=2.5,//[N/m]
        m=1.5,//[Kg]
        g = 9.8, //[m/s]
        x=5,
        v=0,
        a=0,
        t=0,
        B=1,//Fattore di smorzamento[Ns/m]
        dt=0.1;
        while(t<10){
                cout << t << "\t" << x << "\t" << v << endl;
                a=-((k*x)/m)-((B/m)*v);
                v+=a*dt;
                x+=v*dt;
                t+=dt;

        }
 return 0;
}
```

1	0	5	0
2	0,1	4,91667	-0,83333
3	0,2	4,75694	-1,59722
4	0,3	4,52859	-2,28356
5	0,4	4,23998	-2,88609
6	0,5	3,89994	-3,40035
7	0,6	3,51758	-3,82365
8	0,7	3,10208	-4,155
9	0,8	2,66258	-4,39502
10	0,9	2,208	-4,54578
11	1	1,74693	-4,61073
12	1,1	1,28748	-4,5945
13	1,2	0,837199	-4,50278
14	1,3	0,402987	-4,34213
15	1,4	-0,009	-4,11982
16	1,5	-0,39336	-3,84366
17	1,6	-0,74555	-3,52186
18	1,7	-1,06183	-3,16281
19	1,8	-1,33933	-2,77498
20	1,9	-1,576	-2,36676
21	2	-1,77063	-1,94631
22	2,1	-1,92278	-1,52145
23	2,2	-2,03274	-1,09956



SISTEMI IDRAULICI

Si definisce portata volumetrica (Q) il volume V di un fluido che attraversa perpendicolarmente una sezione A di un tubo in un intervallo di tempo Δt.



$$dq = \frac{dV}{dt}$$

Ma volume=area*altezza, quindi:

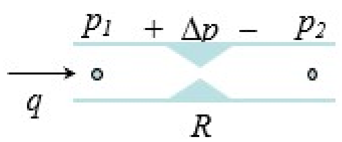
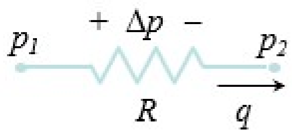
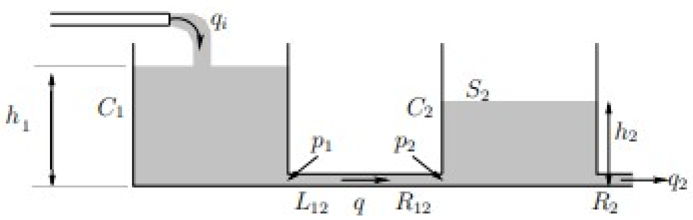
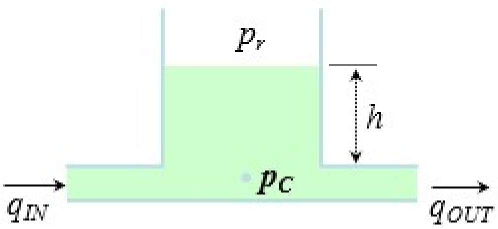
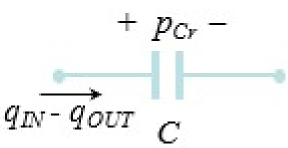
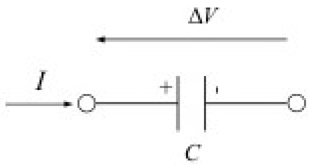
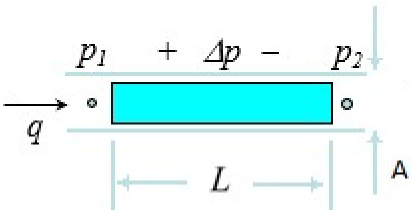
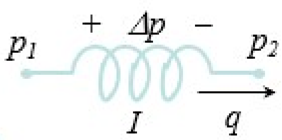
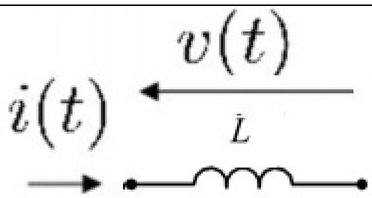
$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A * \Delta h}{\Delta t} \qquad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Considernando la velocita di flusso:

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

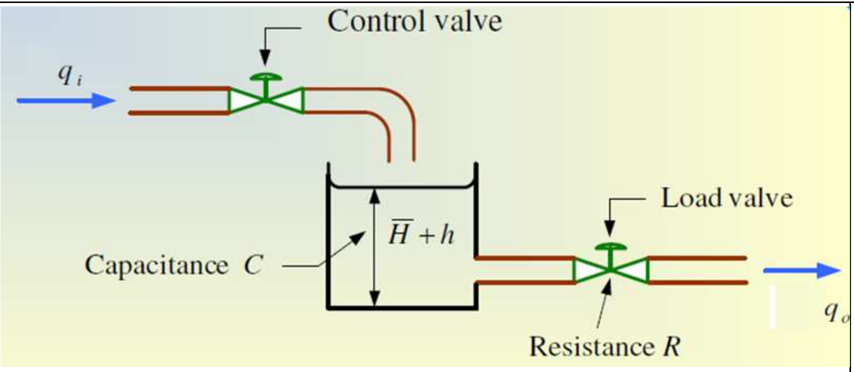
Si ottiene la portata come prodotto velocita' di flusso per la sezione:

$$q = Av$$

SISTEMA IDRAULICO	SISTEMA ELETTRICO
Resistenza Idraulica  $R = \frac{p1 - p2}{q}$ $R = \frac{8\eta L}{\pi r^2}$ Sistema Idraulico  $R = \frac{h1 - h2}{q}$	 $R = \frac{V1 - V2}{I}$ $R = \frac{\rho L}{A}$
Capacita' [2]  $q_i - q_o = C\frac{dp}{dt}$ $C = \frac{A}{\rho g}$	 $I = C\frac{dv}{dt}$ $C = \varepsilon\frac{A}{d}$
Inerzia (inertanza) [4] E' la resistenza che una condotta oppone alla variazione nel tempo della portata del fluido  $p1 - p2 = L\frac{dq}{dt}$ $L = \frac{\rho L}{A}$	 $v(t) = L\frac{di(t)}{d}$

SIMULAZIONE RIEMPIMENTO SERBATOIO

Dato il seguente sistema idraulico:



Δh: *variazione di livello* $[m]$
Δt: *intervallo di tempo* $[s]$
q_i : *portata in ingresso* $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
q_0: *portata in uscita* $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
A: *Area serbatoio* $[m^2]$
S: *sezione condotta di uscita* $[m^2]$

La relazione tra variazione di portata e variazione di altezza del liquido nel serbatoio e':

$$\boxed{A\frac{dh}{dt} = q_i - q_0}$$

Analizziamo la portata d'uscita q_0 nell'ipotesi che sia A>>S, si ottiene la formula di Torricelli [2]:

$$v_2 = \sqrt{2gh(t)}$$

Quindi:

$$q_0 = Sv_2 = S\sqrt{2gh(t)}$$

Sostituendo:

$$\boxed{A\frac{dh(t)}{dt} = q_i - S\sqrt{2gh(t)}}$$

La legge di Stevin dice che la pressione in un punto del fluido e' uguale alla pressione atmosferica (p_r) piu' la pressione idrostatica[3]:

ESEMPIO:

Simulare l'altezza del riempimento di un serbatoio con capacita' di 10m^2 con una portata qi=10m^3/s per un periodo di osservazione di 60s. La valvola di carico viene aperta al 100% a 5s e chiusa a 25s.

SOLUZIONE:

Partendo dall'equazione:

$$A\frac{dh}{dt} = q_i - q_0$$

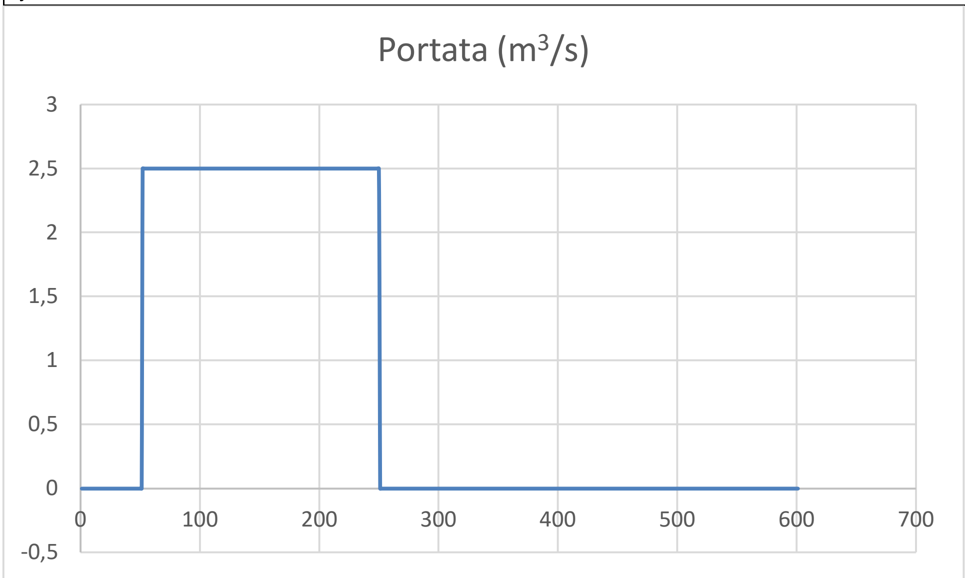
Dato che si parla di riempimento del serbatoio la valvola di scarico e' chiusa, quindi:q_0=0

$$A\frac{dh}{dt} = q_i \Rightarrow \Delta h = \frac{q_i}{A}\Delta t$$

Ipotizziamo quindi di suddividere l'intervallo di osservazione di 60s in N=600 campioni. Con questa ipotesi si ottiene un dt di 01.s. I 5s si hanno dopo 5/0.1=50 campioni, mentre i 25s dopo 25/0.1=250 campioni.

genValve.c – Generazione del segnale di ingresso

```
#include <stdio.h>
int main(){
float n1=0,t=0,dt=0;
float n2=60,vOn=100.,vOff=0.;
int N=600;
dt=1.*(n2-n1)/N;
t=n1;

while(t<n2){
		if(t>=5 && t <=25)
				printf("%f\n",vOn);
		else
				printf("%f\n",vOff);
   t+=dt;
}
return 0;
}
```



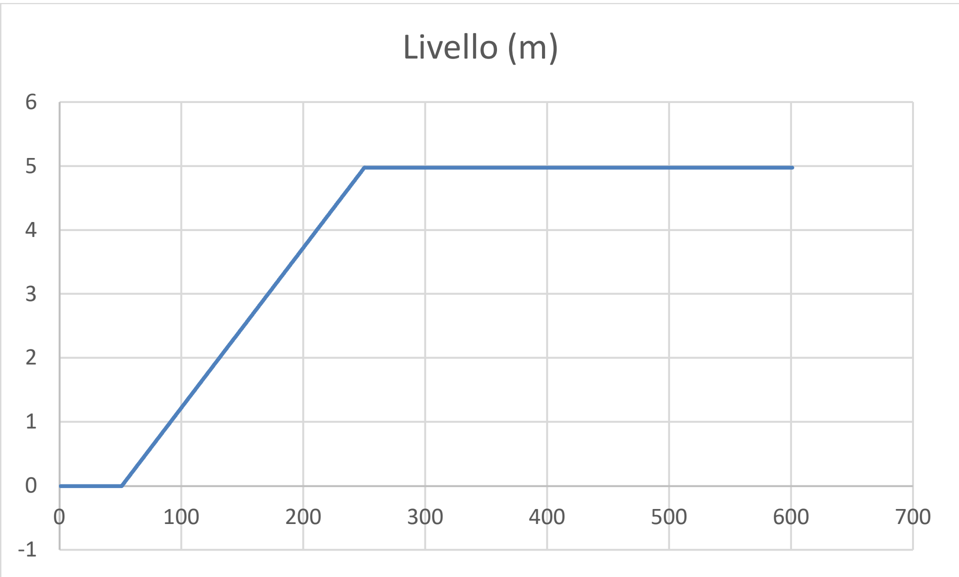
FillTank.c – Riempimento serbatoio

```
#include <stdio.h>

float tank(float level,float dt,float q,float C){
   level += (q/C) *dt;
   return level;
}
```

```
int main(){
float n1=0,n2=60,t=0,dt=0;
float x=0.,y=0.,C=10.;
int N=600;
dt=1.*(n2-n1)/N;
t=n1;

while(scanf("%f",&x)>0){
		y=tank(y,dt,x,C);
		printf("%f\n",y);
		t+=dt;
}

return 0;
}
```

Esecuzione dei programmi:

C:\>genValve | FillTank > L.txt



SIMULAZIONE SVUOTAMENTO SERBATOIO

ESEMPIO:

Simulare lo svuotamento de serbatoio dell'esercizio precedente pieno ad un'altezza di 5m, con una condotta di scarico di sezione =1m^2.

SOLUZIONE:

Dalla equazione per la condotta+serbatoio:

$$A\frac{dh(t)}{dt} = q_i - S\sqrt{2gh(t)}$$

Con il serbatoio pieno ad una altezza H0=5 chiudiamo la valvola che fornisce qi (quindi qi=0) e apriamo la valvola di scarico:

$$A\frac{dh(t)}{dt} = -S\sqrt{2gh(t)}$$

Integrando si ottiene [2]:

$$h(t) = \frac{g}{2}\frac{S^2}{A^2}t^2 - \sqrt{2gH0}\frac{S}{A}t + H0$$

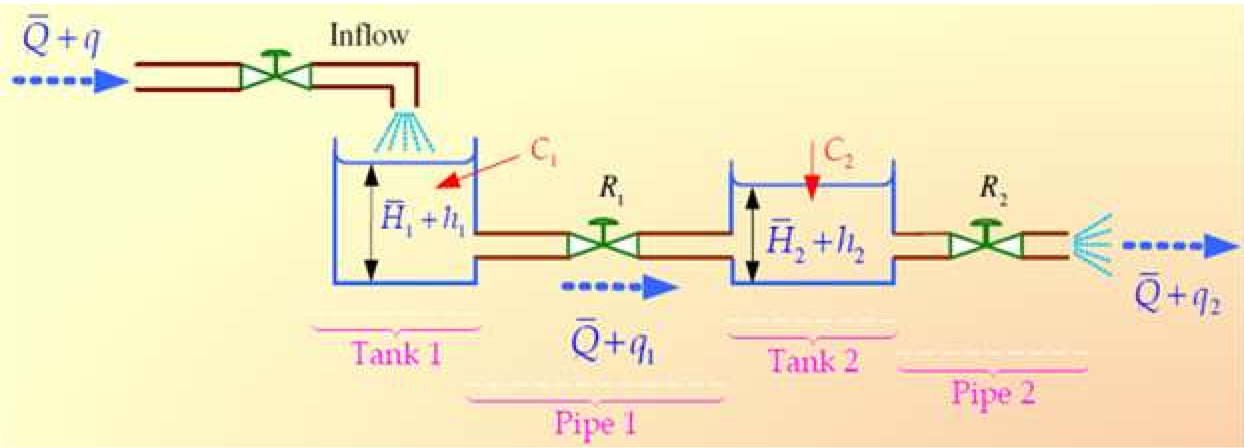
$$ts = 2\sqrt{\frac{H0}{2g}}\frac{A}{S} = 2\sqrt{\frac{5}{2 \cdot 9.81}}\frac{10}{1} \simeq 10.10s$$

tankEmpty.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(){
int k=0;
double
t=0,
A, //sezione del serbatoio
S, //sezione condotta di uscita
dt, //intervallo di campionamento

//Dati di uscita
h=0, //Livello del liquido all'istante T
vo=0, //velocita' di efflusso all'istante T

//Dati Ausiliari
h0=5, //Livello iniziale del liquido
g=9.8;//accelerazione di gravita'

A=10,S=1,dt=0.1;
h=h0;
printf("tf:%f\n",2*sqrt(h/(2.*g))*(A/S));

while(1){
		h+=-(vo*S*dt)/A;
		vo = sqrt(2*g*h);
		if(h<0)
				break;
		t+=dt;
		printf("%f %f\n",t,h);
}
return 0;
}
```

	A	B
1	0,1	5
2	0,2	4,901005
3	0,3	4,802995
4	0,4	4,70597
5	0,5	4,60993
6	0,6	4,514875
7	0,7	4,420805
8	0,8	4,32772
9	0,9	4,23562
10	1	4,144506
11	1,1	4,054377
12	1,2	3,965234
13	1,3	3,877075
14	1,4	3,789903
15	1,5	3,703716
16	1,6	3,618514
17	1,7	3,534299
18	1,8	3,451069
19	1,9	3,368825
20	2	3,287566

ESEMPIO – MODELLO DI SISTEMA IDRAULICO



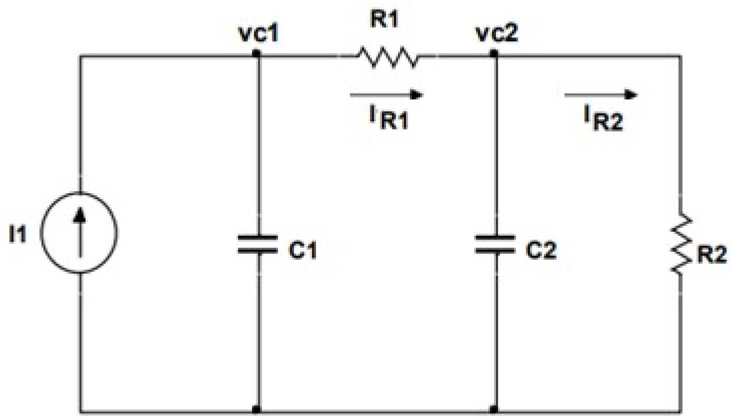
Tank1: $C_1\frac{dh_1}{dt} = q - q_1$ Pipe1: $R_1 = \frac{h1-h2}{q_1}$ Tank2: $C_2\frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$ Pipe2: $R_2 = \frac{h2}{q_2}$

Sostituendo:

Tank1: $C_1\frac{dh_1}{dt} = q - \frac{h_1-h_2}{R_1}$ Tank2: $C_2\frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1-h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$

In definitiva:

Tank1: $C_1\frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1}{R_1} = q + \frac{h_2}{R_1}$ Tank2: $C_2\frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2}{R_1} + \frac{h_2}{R_2} = \frac{h_1}{R_1}$

<table>
<tr><td>Circuito elettrico equivalente:</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$i1 = C1\frac{dvc1}{dt} + iR1$

$iR1 = \left(\frac{vc1 - vc2}{R1}\right)$

$iR1 = C2\frac{dvc2}{dt} + iR2$

$iR2 = \frac{vR2}{R2}$

</td></tr>
</table>

Riferimenti:

[1] https://www.youtube.com/watch?v=Jqa-aFE9-GI

[2] http://www.fermilecce.gov.it/area-download/finish/23-prof-neve-angelo/32-serbatoio-1

[3] http://www.edutecnica.it/sistemi/idro/idro.htm

[4] https://slideplayer.com/slide/10100159/