

Trasformata di Laplace

La Trasformazione di Laplace è un'operazione matematica che permette di passare dal Dominio del Tempo a quello della variabile complessa:

$$s = \sigma + j\omega$$

Casi particolari:

$$\sigma = 0, \omega = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \text{Regime continuo}$$

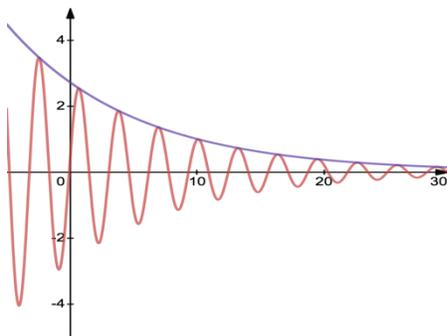
$$\sigma = 0, \omega \neq 0 \Rightarrow s = j\omega \Rightarrow \text{Regime sinusoidale}$$

$$\sigma \neq 0, \omega = 0 \Rightarrow s = \sigma \Rightarrow \text{Regime esponenziale}$$

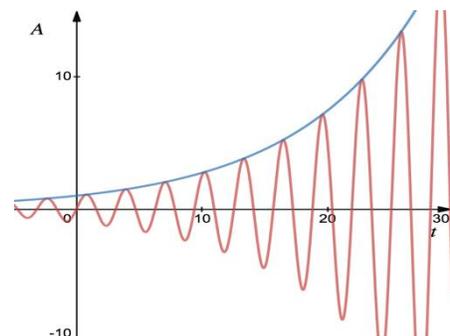
$$\sigma \neq 0, \omega \neq 0 \Rightarrow s = \sigma + j\omega \Rightarrow \text{Regime cissoidale}$$

(Se $\sigma > 0$ si hanno oscillazioni di ampiezza crescente)

(Se $\sigma < 0$ si hanno oscillazioni di ampiezza decrescente)



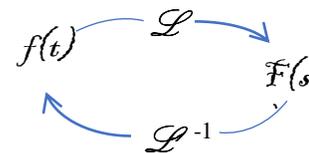
$$\sigma < 0$$



$$\sigma > 0$$

L'operazione è definita come: $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{st} dt$

L'operazione inversa invece: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cdot e^{st} dt$



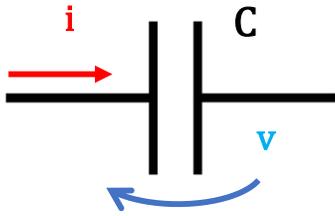
Perché usiamo le Trasformate e le Anti-Trasformate di Laplace ?

Per poter studiare la risposta dei circuiti elettrici a tutti i tipi possibili di eccitazione in ingresso, senza dover risolvere sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore, ma soltanto **equazioni algebriche**.

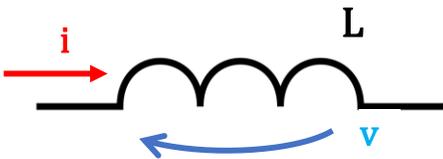
Infatti si sfruttano i 2 teoremi della derivata e dell'integrale, secondo i quali alla equazione di derivazione nel tempo corrisponde la moltiplicazione di $F(s)$ per 's', invece all'operazione di integrazione nel tempo corrisponde la divisione di $F(s)$ per 's', a meno delle condizioni iniziali.

Ma perché vengono fuori le equazioni integro / differenziali ?

Perché nei circuiti elettrici, nei componenti reattivi L e C il legame tra tensione e corrente è di tipo integrale o differenziale.



$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = C \cdot v'(t)$$



$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot i'(t)$$

Passando alle Trasformate e utilizzando i Teoremi citati, si ottiene:

$$I_c(s) = C \cdot V_c(s) \cdot s$$

$$V_L(s) = L \cdot I_L(s) \cdot s$$

Da cui si ottiene anche:

$$\frac{V_c(s)}{I_c(s)} \triangleq \bar{Z}_c(s) = \frac{1}{s \cdot C}$$

$$\frac{V_L(s)}{I_L(s)} \triangleq \bar{Z}_L(s) = s \cdot L$$

Anche con pochi componenti reattivi L e C si otterrebbero delle equazioni integro-differenziali di ordine superiore, di difficile soluzione.

Sfruttando le Trasformate invece, otteniamo equazioni algebriche, molto più abordabili.

Finora abbiamo visto solo cosa succede ai legami tra 'i' e 'v' nei componenti elettrici L, C.

Affrontiamo il discorso completo: abbiamo un sistema RLC, passivo o attivo; diamo in ingresso una tensione variabile, di qualunque forma, e vogliamo determinare la tensione d'uscita.



Utilizzando le Trasformate operiamo così:

$$\text{Con } G(s) = \frac{V_{OUT}(s)}{V_{IN}(s)}$$



$$V_{OUT}(s) = G(s) \cdot V_{IN}(s)$$

Quindi dobbiamo effettuare le seguenti operazioni:

- 1) Determinare $G(s)$, dato un generico circuito R,L,C considerando eventuali amplificazioni
- 2) Calcolare $V_{IN}(s)$
- 3) Moltiplicare $V_{IN}(s)$ per $G(s)$
- 4) Calcolare $v_{out}(t)$

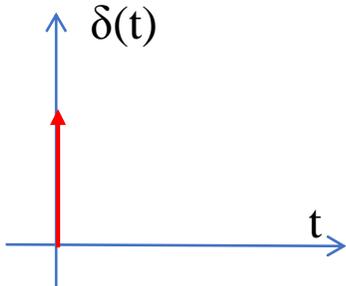
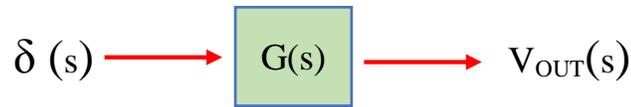
Obiezione: dobbiamo fare ancora più calcoli che nel Dominio del Tempo?

No, perchè esistono Tabelle universali con Trasformate e Anti-Trasformate di moltissime funzioni, per cui, salvo casi particolari, i punti 2) e 4) richiedono pochissimo tempo

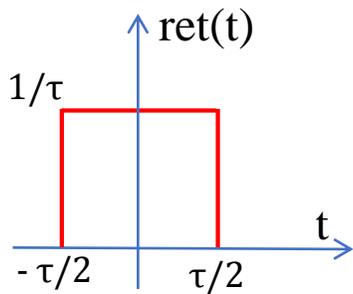
Vediamo i 2 casi più significativi, per noi:

- 1) Risposta all'impulso (di tensione)
- 2) Risposta al gradino (di tensione)

Risposta all'impulso

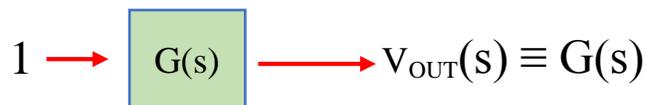
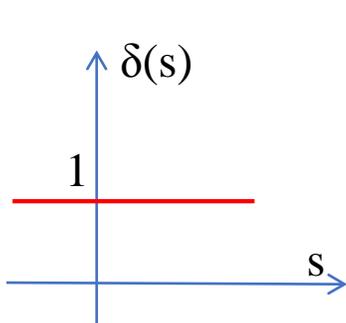


Impulso di Dirac \triangleq è il limite per $\tau \rightarrow 0$ dell'impulso rettangolare di larghezza τ e altezza $1/\tau$ (Area unitaria)



$\delta(t)$ ha altezza $\rightarrow \infty$ e larghezza infinitesima (Area unitaria), cioè l'energia associata è unitaria

La Trasformata di $\delta(t)$ vale 1, perciò:



Perciò la risposta all'impulso, $v_{out}(t)$, coincide con l'Anti-Trasformata di $G(s) \triangleq g(t)$.

Tutto si riduce quindi a studiare la $G(s)$.

Infatti l'operazione di Anti-Trasformazione dipende dalla posizione dei poli di $G(s)$.

A ogni polo di $G(s)$ corrisponde un termine della $v_{out}(t)$

Dato che i poli possono essere di vario tipo (reali, immaginari puri, complessi coniugati), ci saranno termini di diverso tipo.

Da cosa dipende il tipo di polo? Dipende dal tipo di equazione associata a $D(s)$

NB: il polo è una radice del polinomio a denominatore di $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$.

Es: $D(s)$ è un trinomio di II° grado: allora dipende tutto dal $\Delta \triangleq \sqrt{b^2 - 4ac}$

- Se $\Delta > 0$ → Radici reali (positive o negative)
- Se $\Delta = 0$ → 2 Radici reali coincidenti
- Se $\Delta < 0$ → 2 Radici immaginarie (complesse coniugate)

Se invece $D(s)$ è un binomio di 2° grado del tipo $s^2 + a$, si avranno:

- Se $a > 0$ → 2 Radici immaginarie
- Se $a < 0$ → 2 Radici reali coincidenti

Tipi di Poli

- **Poli reali negativi** → il termine corrispondente, nel Dominio del Tempo, è esponenziale decrescente ($s = \theta$, $\theta < 0$, $e^{\theta t}$)
- **Poli reali positivi** → il termine corrispondente, nel Dominio del Tempo, è esponenziale crescente ($s = \theta$, $\theta > 0$, $e^{\theta t}$)
- **Poli complessi coniugati** → $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$
 - 1) Parte reale positiva ($\sigma > 0$) → oscillazioni di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ modulate in ampiezza (crescente) dall'esponenziale $e^{\sigma t}$
 - 2) Parte reale negativa ($\sigma < 0$) → oscillazioni smorzate
- **Poli immaginari coniugati** → oscillazioni di ampiezza costante ($s_{1,2} = \pm j\omega$)

Bisogna però puntualizzare il seguente discorso:

Data la $G(s)$, ne determino i poli; quindi scompongo il denominatore nel prodotto dei vari fattori associati ai singoli poli. Ovvero:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s + \sigma_1) \cdot (s + \sigma_2) \cdot (s + \sigma_3 + j\omega) \cdot (s + \sigma_3 - j\omega) \cdot (s^2 + \omega^2)}$$

Coppia di poli
immaginari
coniugati

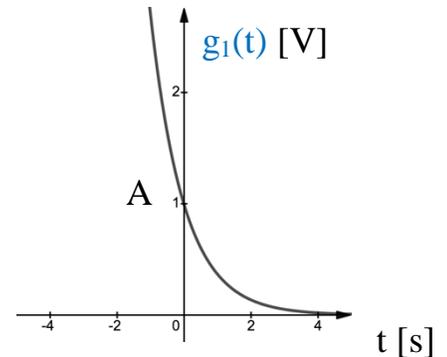
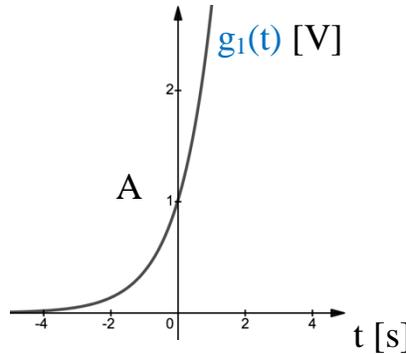
A questo punto, devo scomporre la $G(s)$ nella somma di diversi addendi, ciascuno associato a un determinato polo; ciò viene fatto con metodi algebrici (piuttosto semplici).

Dopo la scomposizione in frazioni parziali, otterremo una $G(s)$ di questo tipo:

$$G(s) = \frac{A}{s - \sigma} + \frac{Bs + C}{(s - \sigma + j\omega) \cdot (s - \sigma - j\omega)} + \frac{Ds}{s^2 + \omega^2}$$

Anti-Trasformando, da Tabella, otterrò termini temporali di questo tipo:

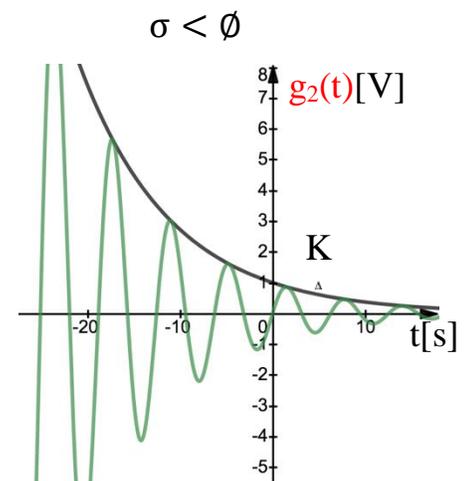
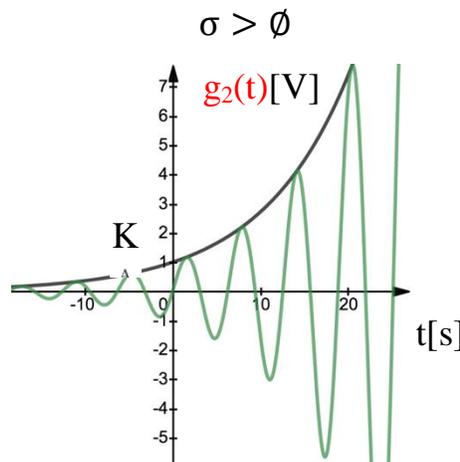
$$G_1(s) = \frac{A}{s - \sigma} \rightarrow g_1(t) = A \cdot e^{\sigma t}$$



$$G_2(s) = \frac{Bs + C}{(s + \sigma + j\omega) \cdot (s + \sigma - j\omega)}$$

$$g_2(t) = K \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t)$$

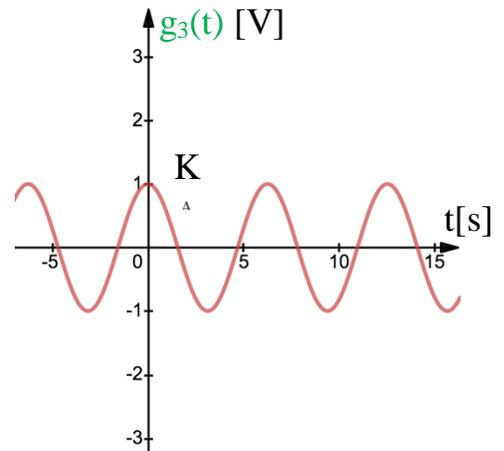
(K dipende da B e C)



Nel caso si abbiano due poli immaginari coniugati, cioè un fattore:

$$\frac{Ds}{s^2 + \omega^2} \rightarrow g_3(t) = K \cdot \cos(\omega t)$$

Otteniamo cioè oscillazioni di ampiezza costante.



Quindi, per quanto riguarda la **risposta all'impulso**, se il Sistema ha :

- solo **poli reali negativi semplici** (RNS), la sua risposta sarà **APERIODICA** (un esponenziale decrescente per ogni polo) e si estinguerà più o meno rapidamente, a seconda del valore del polo : polo + negativo >>>> esponenziale decrescente + rapido

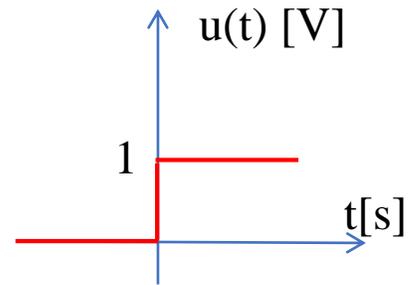
- **poli complessi coniugati con parte reale negativa**, la sua risposta sarà **cissoidale (smorzata)**;
inoltre, + la parte reale (σ) è negativa, + rapido è lo smorzamento;
+ grande è la parte immaginaria (ω), + piccolo sarà il periodo di oscillazione e viceversa, ovviamente.

Risposta al Gradino

La Trasformata di $u(t)$ è $\frac{1}{s}$



Perciò $V_{OUT}(s) = V(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$



Si introduce un polo nell'origine.

Operando come prima, otterremo vari tipi di poli, cioè vari fattori nella $V_{OUT}(s)$.

Si scompone in frazioni parziali e si antitrasforma usando le tabelle.

Se il **Sistema è del I° Ordine**, $G(s) = \frac{1}{s + \omega_p}$ e il polo è reale negativo, la risposta al

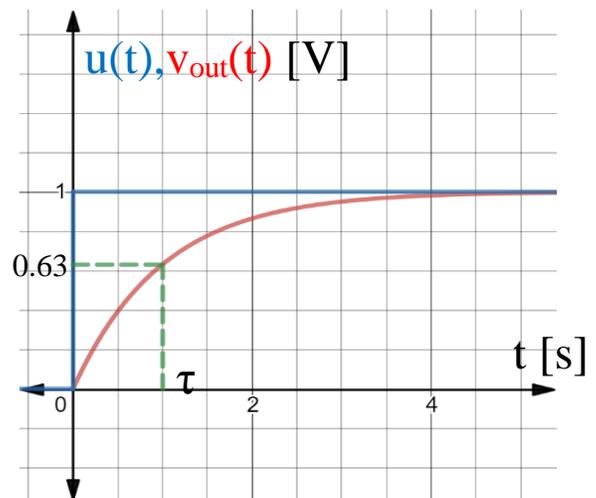
gradino è di questo tipo, cioè **APERIODICA** :

La costante di tempo τ

(tempo dopo il quale $v_{out}(t) = 0,63 \cdot \text{valore finale}$)

coincide con il reciproco del polo : $\omega_p = \frac{1}{\tau}$

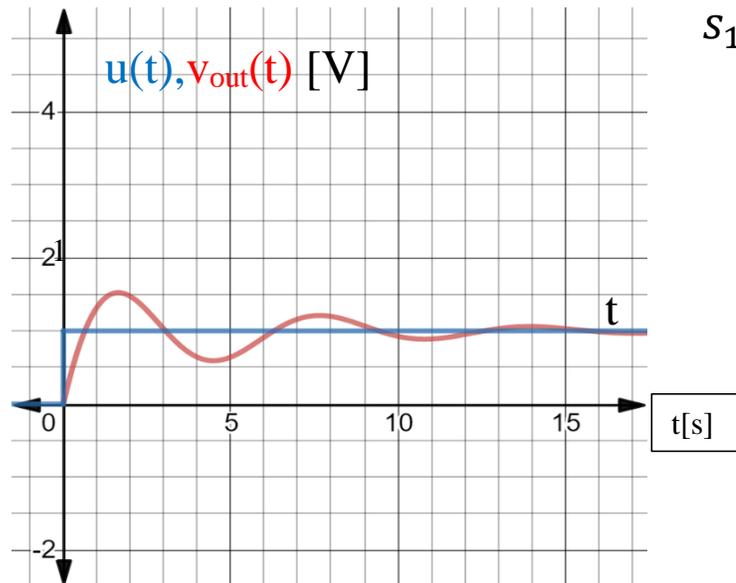
$$v_{out}(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$



Polo \equiv limite della Banda Passante (a 3 [dB])

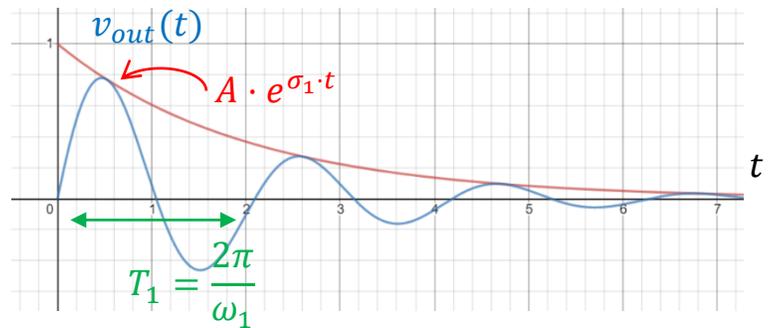
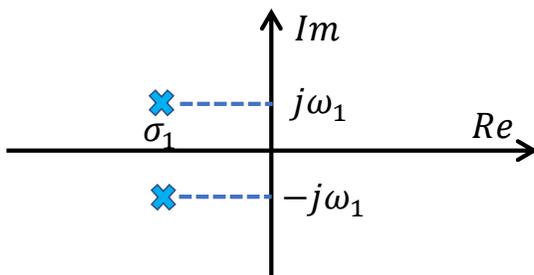
Il Sistema, nel Dominio della frequenza, cioè in Regime Sinusoidale, è un filtro passa-basso.

Se il **Sistema è del II° Ordine**, e i poli complessi coniugati hanno **parte reale negativa**, la risposta al gradino sarà di questo tipo : **CISSOIDALE SMORZATA**

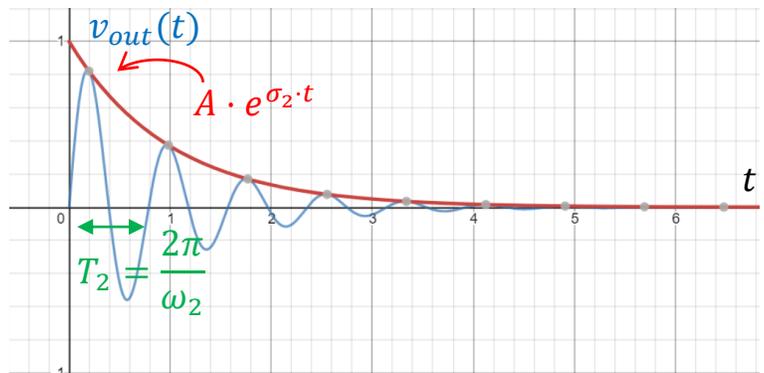
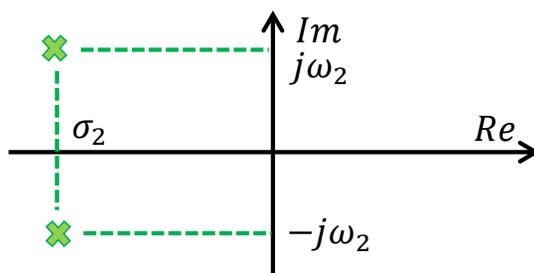


$$s_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1$$

Quanto più i poli sono distanti dall'asse **Re**, cioè **ω è grande**, tanto più grande è la frequenza delle oscillazioni (periodo piccolo).

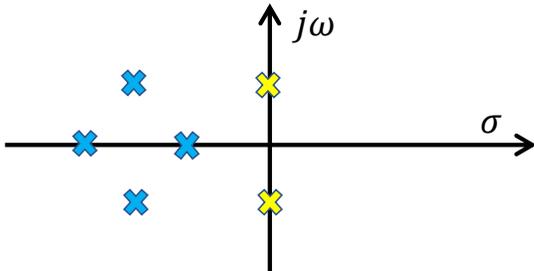


Quanto **più grande è σ** (in modulo), tanto più rapidamente le oscillazioni si smorzano.

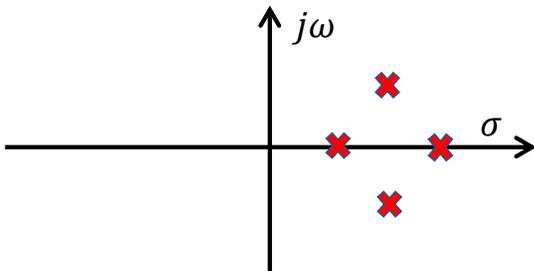


Criterio di Stabilità

Abbiamo perciò visto che se i poli hanno parte reale negativa (cioè stanno **a sinistra nel semipiano di Gauss**), la risposta temporale, **all'impulso unitario**, decresce nel tempo e il sistema avente tale $G(s)$ è stabile.



Se i poli sono sull'asse $j\omega$, il sistema è un **oscillatore** (caso limite di stabilità)



Inaccettabili, per la stabilità, sistemi con $G(s)$ avente poli con parte reale positiva, nei quali dando un impulso di durata infinitesima, essi reagiscono dando in uscita oscillazioni di ampiezza crescente!

Tabella delle Trasformate /Anti-Trasformate di Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$K \cdot f(t)$ (prodotto per una costante)	$K \cdot F(s)$
$f(t - t_0)$ (traslazione nel tempo)	$F(s) \cdot e^{-s \cdot t_0}$
$f'(t)$ (derivata nel tempo)	$s \cdot F(s) - f(\emptyset)$ $f(\emptyset) =$ Condizioni iniziali di $f(t)$
$\int f(t)$ (integrale)	$\frac{F(s)}{s}$ (derivata della trasformata)
$t \cdot f(t)$ (prodotto per una rampa)	$-\frac{dF(s)}{ds}$ (integrale della trasformata)
$\frac{f(t)}{t}$ (divisione nel tempo)	$\int_0^{+\infty} F(s) ds$
δ di Dirac (impulso unitario)	1
$K \cdot \delta$ (impulso non unitario)	K
$\mu(t)$ (gradino unitario)	$1/s$
$K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{K}{s + 1/\tau}$ <u>Molto importante:</u> fattore associato a un polo reale negativo, che dà nel tempo un termine esponenziale decrescente
$(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$	$\frac{F(s)}{s \cdot (s + 1/\tau)}$
t (rampa)	$1/s^2$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Teoremi sulle Trasformate di Laplace

- 1) La Trasformata di un prodotto per una costante è la Trasformata moltiplicata per la costante:

$$L[k \cdot f(t)] \rightarrow k \cdot F(s)$$

- 2) La Trasformata di una combinazione lineare è la combinazione lineare delle Trasformate:

$$L[k_1 \cdot f_1(t) + k_2 \cdot f_2(t)] \rightarrow k_1 \cdot F_1(s) + k_2 \cdot F_2(s)$$

- 3) La Trasformata della derivata di una funzione è la Trasformata della funzione moltiplicata per 's', a cui viene tolto il valore della funzione in \emptyset (se diverso da 0):

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] \rightarrow s \cdot F(s) - f(\emptyset)$$

- 4) La Trasformata dell'integrale di una funzione è la trasformata della funzione divisa per 's':

$$L\left[\int f(t) dt\right] \rightarrow \frac{F(s)}{s}$$

- 5) Traslazione nel tempo:

$$L[f(t - t_0)] \rightarrow F(s)e^{-st_0}$$

- 6) Traslazione in frequenza:

$$F(s - a) \rightarrow L[e^{-st} \cdot f(t)]$$

- 7) Teorema del valore iniziale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

- 8) Teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$