LEZIONI DEL CORSO DI SISTEMI DEL QUINTO ANNO

MOD. 1 **Sistemi di controllo e di regolazione.** Si tratta di un ripasso di una parte di argomenti effettuati l'anno scorso.

Introduzione. Schemi a blocchi di sistemi lineari.

Significato di limite, derivata ed integrale. Svolto secondo un mio programma.

Concetto di stabilità. Velocità di risposta e precisione.

Esempi di regolazione, con relazione.

MOD. 2 **Il PLC, lo schema a contatti. Linguaggi di programmazione.**
Il grafcet. Sistemi di controllo digitali, conversione A/C e D/A.
Il CPU, i BUS, e le MEMORIE.

MOD. 3 **APPLICAZIONI: la macchina asincrona, aspetti generali sul controllo della velocità; il BRUSHLESS ed il controllo della posizione. I trasduttori per il controllo della velocità, della temperatura e della luminosità.**

MOD. 4 **SIMULAZIONE**: **aspetti generali.**

MOD. 5 **Aspetti generali sull'automazione dei processi produttivi.**
I controlli di processo industriale.
Organi di manovra, azionamento, protezione.
Tecnologie elettriche, elettroniche, pneumatiche ed oleodinamiche.

Le lezioni qui di seguito riportate, sono state da me realizzate nelle ore di SISTEMI ed ORGANIZZAZIONE della PRODUZIONE, per una classe QUINTA PROFESSIONALE con indirizzo ELETTRICO.
Il programma può seguire delle modifiche nelle impostazioni generali, inerentemente alla tipologia della classe.

INTRODUZIONE

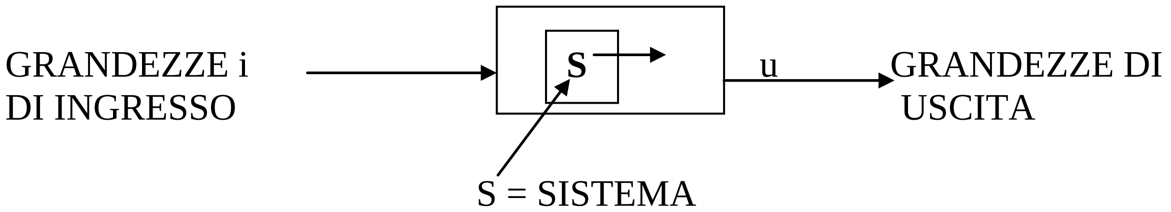
Come già abbiamo visto la parola SISTEMI è molto usata nel linguaggio corrente per descrivere un insieme di parti collegate tra di loro, in modo opportuno, per ottenere un obiettivo o scopo comune, più importante di quello che essi fornirebbero, se presi separatamente. Si possono citare molti esempi in cui appare evidente che il concetto di SISTEMA è del tutto generale, e perciò applicabile ad un qualsiasi campo: tecnico, scientifico, fisico, matematico, economico, filosofico, anatomico, ecc. E' ovvio che in ogni campo è importante individuare il SISTEMA STESSO e le parti che lo costituiscono; infatti noi abbiamo visto in quale modo si possa IDENTIFICARE e CARATTERIZZARE i SISTEMI .
Inoltre abbiamo studiato come decomporre il sistema in tanti sottosistemi, in modo tale da poter più semplicemente studiare il SISTEMA stesso.
Questa metodologia si dice ANALITICA.
La parte SISTEMISTICA, invece, affronta il SISTEMA nella sua globalità.
Nel campo tecnico i metodi di risoluzione più convenienti risultano quelli MISTI, ossia rappresentati da una opportuna composizione del metodo analitico con quello sistemico. Nel metodo delle scomposizioni è necessario tenere conto delle interazioni dei vari sottosistemi, ossia ogni sottosistema si ritiene indipendente, e pertanto il COMPORTAMENTO del SISTEMA nel suo complesso, si può ritenere come RISULTANTE dei singoli comportamenti di ogni SOTTOSISTEMA.
Se QUESTO NON FOSSE POSSIBILE, allora il SISTEMA deve essere studiato tenendo conto delle interazioni fra i vari sottosistemi, e le LEGGI che descrivono i vari SOTTOSISTEMI NON SONO PIU' SEMPLICI, poiché le leggi di interazioni fra i vari sottosistemi risultano molto complesse.
RICORDIAMO ALCUNE DEFINIZIONI FONDAMENTALI:

Si definisce SISTEMA un insieme di due o più elementi interconnessi fra loro da opportune relazioni. Tali ELEMENTI interagiscono in modo da raggiungere uno scopo comune NON raggiungibile dal singolo elemento.

A causa delle interazioni tra gli elementi si intuisce che un SISTEMA non è una semplice SOMMA delle sue parti, ma qualcosa di più; in particolare rispetto agli EFFETTI ottenuti.

Si indicano con il termine VARIABILI quelle grandezze all'interno dei sistemi, soggette a variazioni nel tempo. Le funzioni che rappresentano l'andamento di queste variabili si dicono SEGNALI.

Un sistema ad esempio, può essere l'automobile, dove essa può essere esaminata o studiata solo dal punto di vista strutturale, oppure, adottando una metodologia sistemistica, se ne può studiare il comportamento durante il FUNZIONAMENTO: per esempio è possibile valutarne la traiettoria agendo sui comandi.
In poche parole la posizione, la velocità e l'accelerazione dell'automobile sono le grandezze che vogliamo studiare, osservare, e pertanto sono per noi le VARIABILI di OSSERVAZIONE o di USCITA del sistema. La posizione del volante e la pressione sul pedale sono invece le grandezze sulle quali possiamo agire, e perciò vengono dette VARIABILI di INGRESSO.



Riferendoci alla figura superiore i problemi di cui si occupa la teoria dei SISTEMI si possono riassumere in tre tipologie:

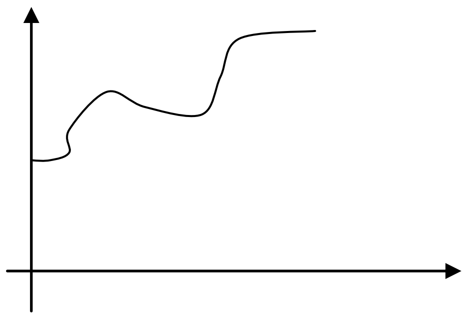
- Sono noti l'ingresso i e il sistema S, ossia il suo modello matematico, e si vuole determinare l'uscita u. In altri termini si vuole prevedere come reagirà il sistema S, ed in questo caso si parla di **CALCOLO della RISPOSTA, o PROBLEMA della PREVISIONE, o anche CALCOLO dell'USCITA**.
- Noti l'uscita u ed il MODELLO MATEMATICO del sistema S, vogliamo conoscere l'ingresso i. In altre parole vogliamo sapere quale deve essere l'ingresso da applicare al sistema per ottenere le USCITE note o date. Questo problema prende il nome di **PROBLEMA di CONTROLLO**.
- Noti l'ingresso i e l'uscita u, vogliamo determinare l'espressione del modello del sistema S. Questo però è un problema molto complesso.

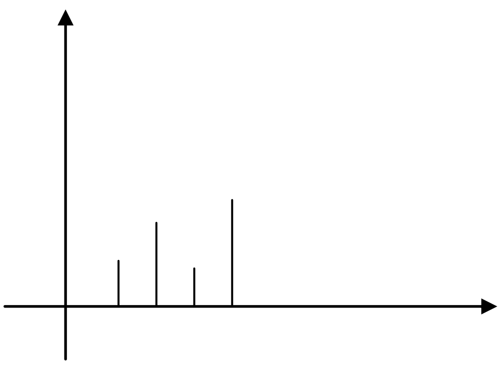
Infatti, nei primi due casi, essendo noto il modello del sistema S, conosciamo anche la corrispondenza fra ingressi ed uscite e quindi abbiamo la possibilità di conoscere tutte le possibili coppie ingresso – uscita. In quest'ultimo caso conosciamo soltanto alcune coppie ingresso – uscita, e magari ottenute sperimentalmente. E' ovvio che dalla loro conoscenza dobbiamo risalire all'intero modello matematico. Questo tipo di problema è detto **PROBLEMA della COSTRUZIONE del**

MODELLO MATEMATICO oppure **PROBLEMA di IDENTIFICAZIONE**.

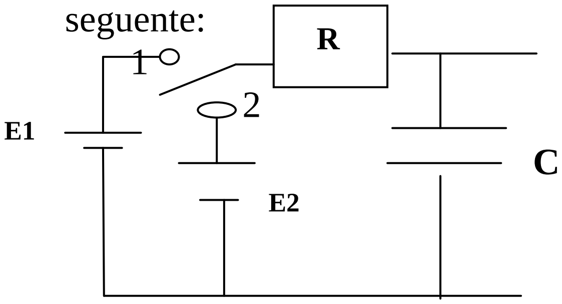
A questi problemi si collegano, anche, alcune tecnologie .
Una è il modo in cui si misurano gli ingressi e le uscite, e quindi la tecnica per trasformare gli ingressi e le uscite in SEGNALI, utilizzando appositi dispositivi detti TRASDUTTORI. Questa tecnica si chiama STRUMENTAZIONE AUTOMATICA.

Si ricordi che il **TRASDUTTORE** converte una qualsiasi grandezza fisica in una informazione di carattere elettrico.
Il **SENSORE**, invece, trasforma un segnale fisico qualsiasi in un segnale distinto dall'originario, ossia in un segnale di natura completamente distinta dall'ingresso, ma non è necessariamente di carattere elettrico.
Nel secondo caso si rende spesso necessario, creare le grandezze che agiscono a livello di POTENZA, per determinare l'effetto voluto. In altre parole, in questa tecnica, partendo dall'uscita, che si vuole dare al sistema , si devono determinare le azioni necessarie per realizzare l'effetto voluto. Di queste cose si occupa la teoria del **CONTROLLO AUTOMATICO**.
Nel terzo caso occorre calcolare il modello legato al sistema S, e la tecnica che si occupa di questo, si dice **CALCOLO AUTOMATICO**.
Infine si ricorda che, un sistema si dice CONTINUO, quando tutte le variabili CHE LO CARATTERIZZANO SONO **continue**; se almeno una GRANDEZZA è DISCRETA allora si parla di SISTEMA **discreto**.
I SISTEMI nei quali il TEMPO viene considerato come una SUCCESSIONE CONTINUA di ISTANTI vengono detti SISTEMI A TEMPO CONTINUO.
Quando il sistema non viene studiato attraverso variazioni continue di tempo, ma attraverso una successione di istanti a intervalli regolari, i sistemi si dicono a TEMPO DISCRETO.





Si aggiunge che un SISTEMA si dice **DINAMICO** quando le grandezze che lo caratterizzano variano nel **TEMPO**. Nel caso in cui il TEMPO non influenza queste grandezze, il sistema è detto **STATICO**.
In un sistema DINAMICO è come se fosse presente una MEMORIA: l'uscita è funzione dei valori assunti anche in precedenza, oltre che dalla sollecitazione applicata. In questo caso il valore della risposta nell'istante t dipende anche degli istanti precedenti, in questo caso per lo studio del sistema è necessario avere la conoscenza delle condizioni iniziali. Un esempio di sistema con memoria può essere il seguente:



La carica del sistema (il condensatore), dipende dalla tensione applicata, ma anche dalle sua carica iniziale. Quando l'interruttore è nella posizione 1, il condensatore C si carica relativamente al valore E1; se il tasto viene spostato nella posizione 2, noi sappiamo che l'andamento della tensione ai capi del condensatore C dipende dal rapporto tra E1 (condizione iniziale), ed E2 (nuova sollecitazione): in pratica la carica del condensatore dipende dal valore assunto precedentemente.

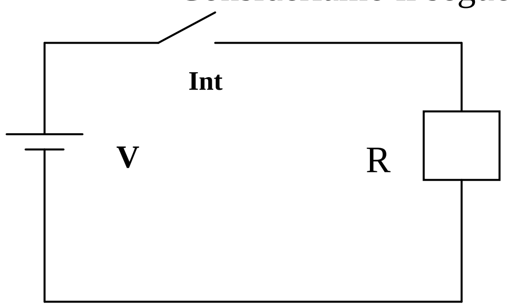
Il circuito RESISTIVO, rappresentato in figura, è l'esempio di un sistema SENZA MEMORIA; infatti posizionando l'interruttore nella posizione 1 la CORRENTE vale
E1 / R, mentre nella posizione 2 il nuovo valore della corrente è E2 / R, ed esso è un valore completamente distinto dalla storia precedente del circuito, ossia esso è semplicemente funzione del nuovo valore assunto dalla tensione o dalla nuova sollecitazione E2.
<u>**CONCLUSIONE**: in questo tipo di sistema il valore nuovo dell'uscita NON DIPENDE dai VALORI ASSUNTI negli istanti precedenti</u>.

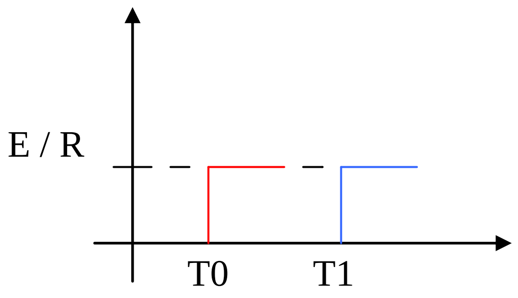
SISTEMI INVARIANTI

Un altro concetto importante è quello dei sistemi STAZIONARI o INVARIANTI nel TEMPO. Se le caratteristiche di un sistema sono costanti nel tempo esso si dice STAZIONARIO, ossia se i parametri che caratterizzano il sistema stesso non modificano al variare del tempo le loro proprietà, il sistema è <u>**stazionario**</u>.
Se ad esempio consideriamo un razzo spaziale, perdendo massa durante il suo viaggio; infatti espelle i gas combusti, esso si deve ritenere un SISTEMA VARIANTE o NON STAZIONARIO. Invece il più delle volte un SISTEMA ELETTRICO ha caratteristiche costanti,

(i componenti costituenti mantengono, i propri valori, costanti nel tempo), e perciò esso ci rappresenta un sistema **stazionario**.

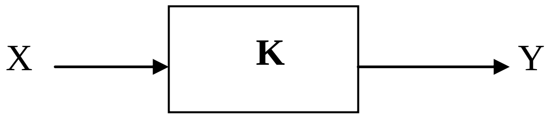
Consideriamo il seguente circuito elettrico, puramente resistivo :





Supponiamo di chiudere l'interruttore nell'istante T0 e la corrente , quasi istantaneamente passa da 0 al valore E / R. Se la resistenza R viene alimentata nell'istante T1, diverso da T0, la corrente comunque si porta allo stesso valore E / R.
In pratica abbiamo la stessa RISPOSTA semplicemente TRASLATA o SPOSTATA da T0 a T1. Infatti, un sistema INVARIANTE presenta la caratteristica di FORNIRE la stessa RISPOSTA, a parità di sollecitazione applicata.
In pratica possiamo dire che un SISTEMA E' STAZIONARIO se soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause ed effetti.
Si ricorda che un sistema è LINEARE se ad esso è possibile applicare il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI.
Altro concetto importante è quello di OMOGENEITA' dei SISTEMI.
Prendiamo un dispositivo che fornisce un uscita Y1 se sollecitato da un ingresso X1, ora ci possiamo domandare: **Che cosa fa il circuito se l'ingresso viene RADDOPPIATO e viene portato al valore di 2 X1?**
<u>Se il sistema è lineare la risposta è ovvia, la sua risposta sarà doppia di quella prodotta dalla singola causa X1.</u>
In generale se l'ingresso è K1 X1, l'uscita è pari a K1 Y1. Nel caso di sistemi con più ingressi , ad esempio X1 e X2 possiamo applicare la SOVRAPPOSIZIONE. Allora indicando con Y1 la risposta del sistema qualora sollecitato dal solo ingresso X1, e se con Y2 indico la risposta del sistema al solo ingresso X2, allora potremo dire che per un sistema lineare all'ingresso **K1 X1 + K2 X2** viene provocata una risposta
K1 Y1 + K2 Y2 = Y

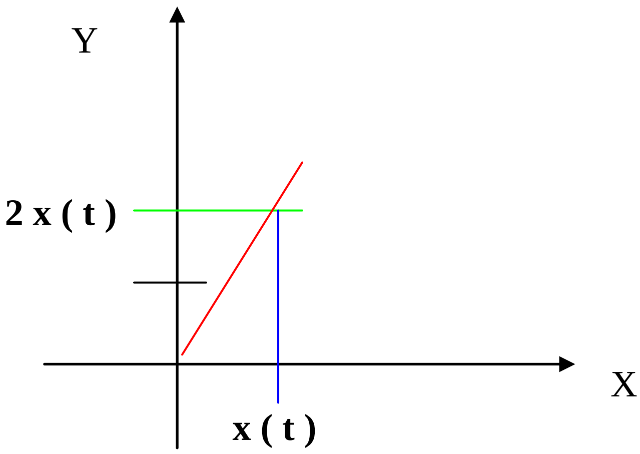
L'anno scorso abbiamo visto che un MODELLO di un sistema reale è possibile rappresentarlo con uno schema a blocchi. Con questo modello è possibile analizzare, studiare e progettare il sistema reale. Noi abbiamo rappresentato un qualsiasi sistema attraverso uno schema o blocco funzionale del seguente tipo:



dove X ed Y sono, rispettivamente, la variabile di ingresso o segnale di ingresso, e la variabile di uscita o segnale di uscita. Inoltre noi abbiamo sempre cercato di legare il segnale di ingresso e di uscita, in modo proporzionale, ossia:

$$\mathbf{Y = K\,X},$$

con **K** visibile all'interno del blocco e ciò costituiva il nostro **modello** MATEMATICO.
Si può anche ammettere che i nostri segnali siano strettamente connessi con il **tempo**.



Pertanto il legame tra ingresso ed uscita è di tipo matematico, ad esempio il legame potrebbe avere questa forma: **Y(t) = F (x (t))**, ed essa si dice equazione, ed il grafico è il cosiddetto grafico caratteristico.
Nella figura superiore, viene riportato un esempio grafico di sistema per il quale le variabili di ingresso e di uscita sono legate dalla relazione matematica:

$$\mathbf{F\,(\,x\,(t)\,) = 2\,x\,(\,t\,) = Y\,(\,t\,).}$$

Noto l'ingresso **x**, a qualsiasi istante **t** è possibile così ricavare, tramite l'equazione o il grafico, l'uscita **y** nello stesso istante.

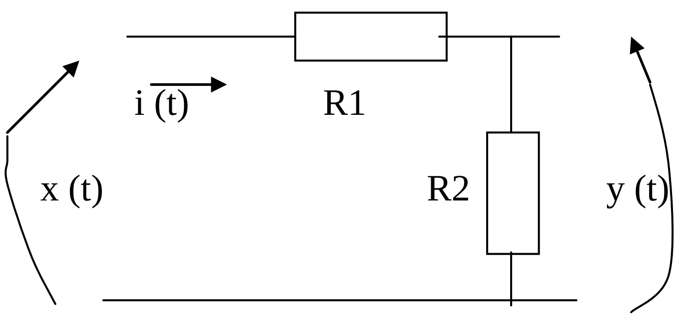
I sistemi possono anche essere composti da diversi dispositivi, collegati fra loro in modo da svolgere un compito preciso o una funzione specifica. Ognuno di questi dispositivi costituenti il SISTEMA stesso, prendono il nome di SOTTOSISTEMI.
Inoltre ogni sottosistema sarà caratterizzato da un suo blocco funzionale e da un suo modello matematico.
Pertanto, il SISTEMA può essere rappresentato da un insieme di blocchi collegati fra loro, ottenendo così uno **schema a blocchi.**
L'algebra degli schemi a blocchi ci consente di ricavare il BLOCCO EQUIVALENTE dello schema stesso, ed il suo modello matematico. In pratica si riconduce lo studio, anche in questo caso, a quello di un SINGOLO BLOCCO.

Dalla conoscenza del blocco funzionale, rappresentante un sistema, e del suo modello matematico è possibile ricavare:

a) **l'andamento nel tempo della risposta** o del segnale di USCITA, per qualsiasi sollecitazione applicata **in ingresso**;

b) le sue caratteristiche: **stabilità, precisione e velocità di risposta.**

Lo scorso anno i sistemi introdotti erano caratterizzati da modelli matematici semplici, ossia le equazioni erano o COSTANTI o caratterizzate da equazioni con carattere ALGEBRICO. Comunque le equazioni erano sicuramente indipendenti dalla FREQUENZA. Quest'anno avremo a che fare con funzioni di trasferimento più complesse.
Consideriamo ora l'esempio di un sistema, caratterizzato da un'equazione algebrica semplice. Il sistema caratterizza un PARTITORE di TENSIONE:



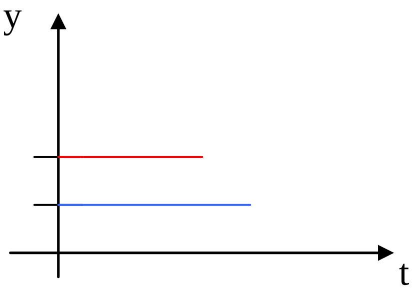
L'uscita **y (t)** si ricava ricordando che la corrente vale:

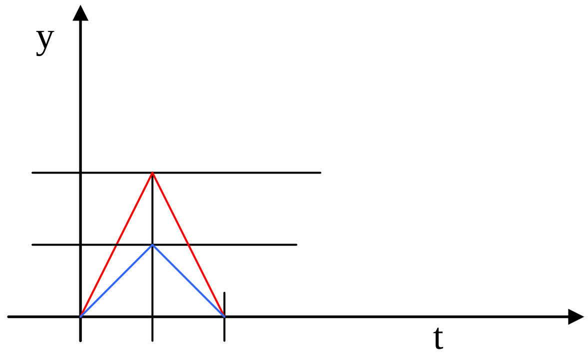
$$\mathbf{i(t) = x(t) / (R1 + R2)},$$

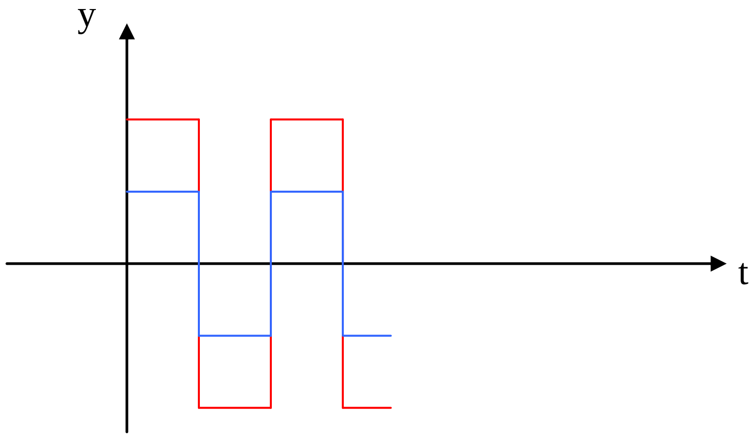
mentre la tensione di uscita **Y (t)** vale,

$$\mathbf{y(t) = R2\, i(t) = R2\, (x(t) / (R1 + R2))}.$$

Abbiamo così una relazione di proporzionalità tra ingresso e uscita; se poniamo, per semplicità di scrittura, **R1 = R2** otteniamo:
y (t) = x(t) / 2. A questo punto, noto l'andamento temporale dell'ingresso **x(t)**, si ricava facilmente quello della risposta **y (t).** Sono riportati alcuni esempi:







Per un sistema più complicato, come per esempio un circuito RC, vedi figura sotto riportata, la risoluzione matematica per ricavare la risposta risulta meno agevole.La tensione di ingresso è pari a quella di uscita più la caduta sulla resistenza R: **x(t) = R i(t) + y (t) .**

La tensione ai capi del condensatore è legata alla corrente dalla relazione: **i(t)= C(d y (t) / dt),**
dove con il simbolo, **d y (t) / dt** si indica l'operazione matematica di derivata rispetto al tempo. L'equazione da risolvere diventa:

x(t) = RC (d y (t) / dt) + y (t),

che NON è più un'equazione ALGEBRICA. Pertanto la sua risoluzione per determinare l'andamento della **y (t)** in funzione della **x**, non è più facile ed occorrono delle conoscenze di matematica superiore.

Nelle due figure sono mostrate gli andamenti qualitativi della risposta **y (t),** ad opportuni segnali **x(t)**.

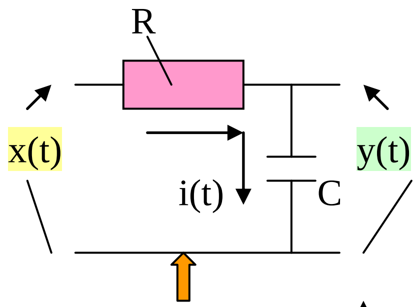
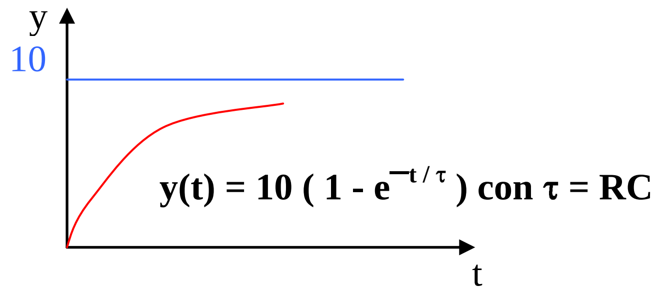
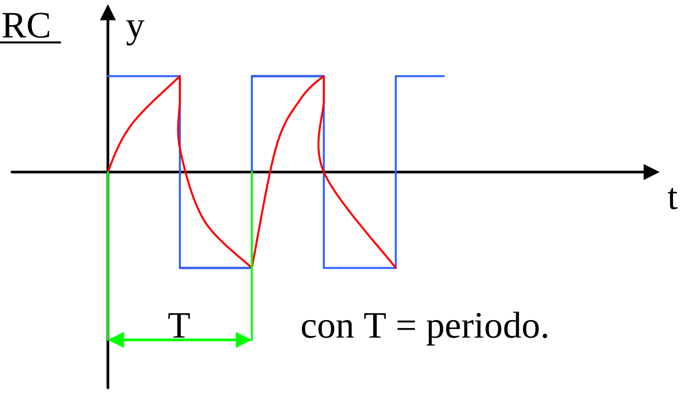
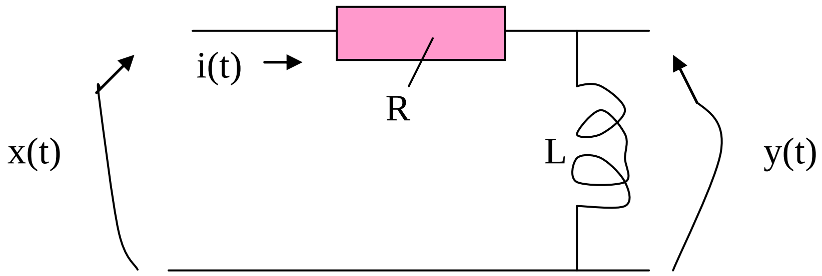


Figura circuito RC





Se si avesse, nel circuito precedente un'induttanza, anziché il condensatore, ossia un circuito di questo tipo:



In questo caso il legame fra la tensione **y (t)** ai suoi capi e la corrente **i(t)** è :

$$\mathbf{y\ (t) = L\ (\ d\ i\ (t)\ /\ dt\ )},$$ ossia la tensione è proporzionale alla derivata della corrente, attraverso l'induttanza L.

Introduciamo ora un nuovo operatore matematico, indicato col nome di INTEGRALE, il cui simbolo è $\int$, che possiamo considerare, in pratica come l'inverso della derivata.

Di conseguenza per l'induttanza possiamo ricavare la seguente espressione INVERSA tra la corrente i (t) e la tensione v (t):

$$\mathbf{i\ (t) = 1/L \int v\ (t)\ dt.}$$

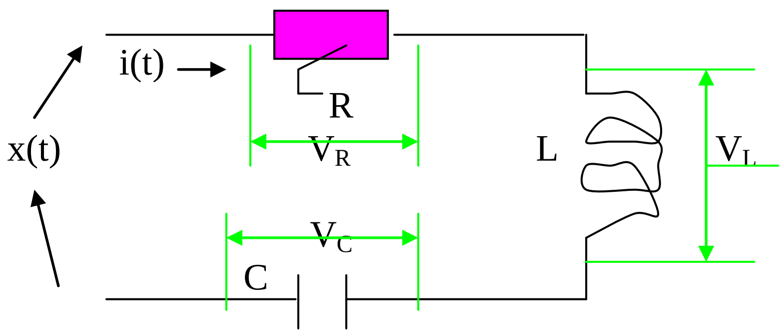
Analogamente, per la capacità, possiamo scrivere la seguente espressione inversa tra la tensione v (t) e la corrente i (t):

$$\mathbf{v\ (t) = 1/C \int i\ (t)\ dt.}$$

La tabella mostra le possibili operazioni, che possono essere svolte con l'induttanza e la capacità.

CONDENSATORE	$v(t) \rightarrow$ [**C d / dt**] $\rightarrow i(t)$	**$i(t) = C\, dv / dt$**	**Blocco Derivativo**
	$i(t) \rightarrow$ [**1 / C ∫**] $\rightarrow v(t)$	**$v(t) = 1 / C \int i(t)\, dt$**	**Blocco Integrale**
INDUTTANZA	$i(t) \rightarrow$ [**L d / dt**] $\rightarrow v(t)$	**$v(t) = L\, d\, i(t) / dt$**	**Blocco Derivativo**
	$v(t) \rightarrow$ [**1 / L ∫**] $\rightarrow i(t)$	**$i(t) = 1 / L \int v(t)\, dt$**	**Blocco Integrale**

Conseguentemente se si considera il circuito RLC di figura:



In questo caso la tensione all'ingresso deve fornire una tensione pari a:

$x(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = \mathbf{R\, i(t) + L\, (d\, i(t) / dt) + 1/C \int i(t)\, dt}$.

L’equazione che lega l’ingresso x (t) all’uscita i (t) contiene una derivata ed un integrale, e la sua risoluzione matematica è molto complessa.
Quando l’equazione contiene derivate o integrali o entrambe, della grandezza incognita, in questo caso si parla di <u>EQUAZIONE DIFFERENZIALE</u>.

Si capisce intuitivamente che, per studiare l’andamento temporale della risposta, di un sistema che contiene un legame tra ingresso ed uscita di tipo integrativo e derivativo, è necessario risolvere equazioni complesse.

Per questo motivo si ricorre, per lo studio dei SISTEMI, ad un operatore matematico indicato con il nome di TRASFORMATA di LAPLACE, che consente di convertire un ‘equazione contenente integrali e derivate, in un’equazione algebrica più facilmente risolvibile.

SIGNIFICATO DI DERIVATA E DI INTEGRALE, già svolto.

I NUMERI COMPLESSI.
Essi si possono rappresentare secondo le seguenti forme:

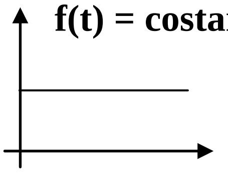
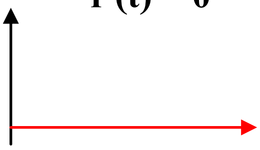
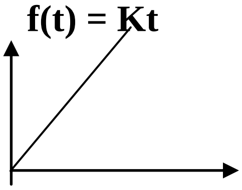
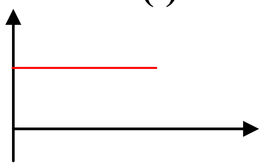
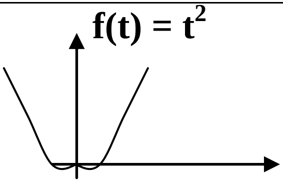
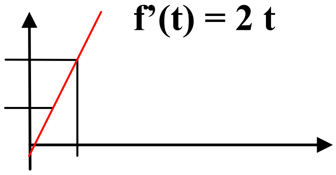
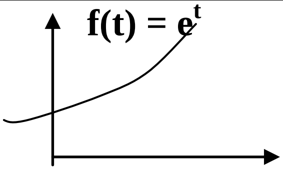
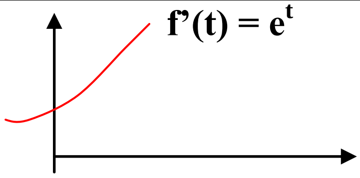
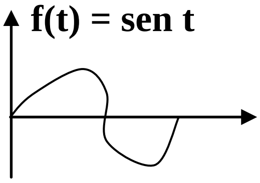
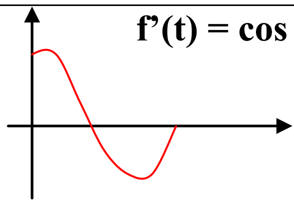
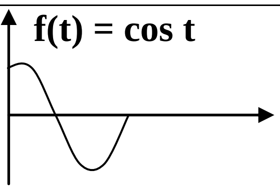
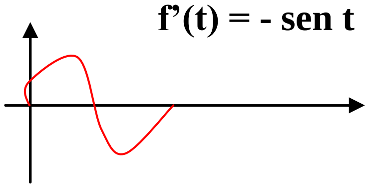
$\mathbf{a + j\, b}$	$\mathbf{M \cos \phi + j\ M \,sen\, \phi}$
$\mathbf{M \angle \phi}$	$\mathbf{M\, e^{j\phi}}$

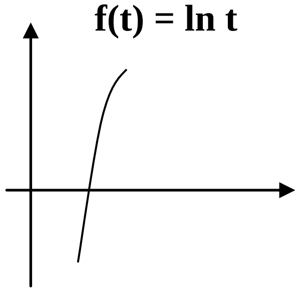
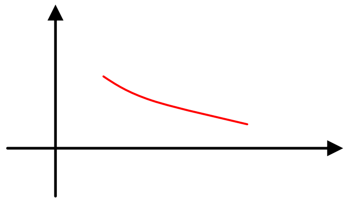
Forma Cartesiana   Forma Polare

Forma di Eulero   Forma Trigonometrica

Viene svolto durante il corso un richiamo ai numeri complessi.

Illustriamo graficamente alcune funzioni con le relative funzioni derivate:

FUNZIONE PRIMITIVA	**FUNZIONE DERIVATA**
f(t) = costante 	**f'(t) = 0** 
f(t) = Kt 	**f'(t) = K** 
f(t) = t^2 	**f'(t) = 2 t** 
f(t) = e^t 	**f'(t) = e^t** 
f(t) = t^n	**f'(t) = n t^{n-1}**
f(t) = e^{Kt}	**f'(t) = K e^{Kt}**
f(t) = sen t 	**f'(t) = cos t** 
f(t) = cos t 	**f'(t) = - sen t** 

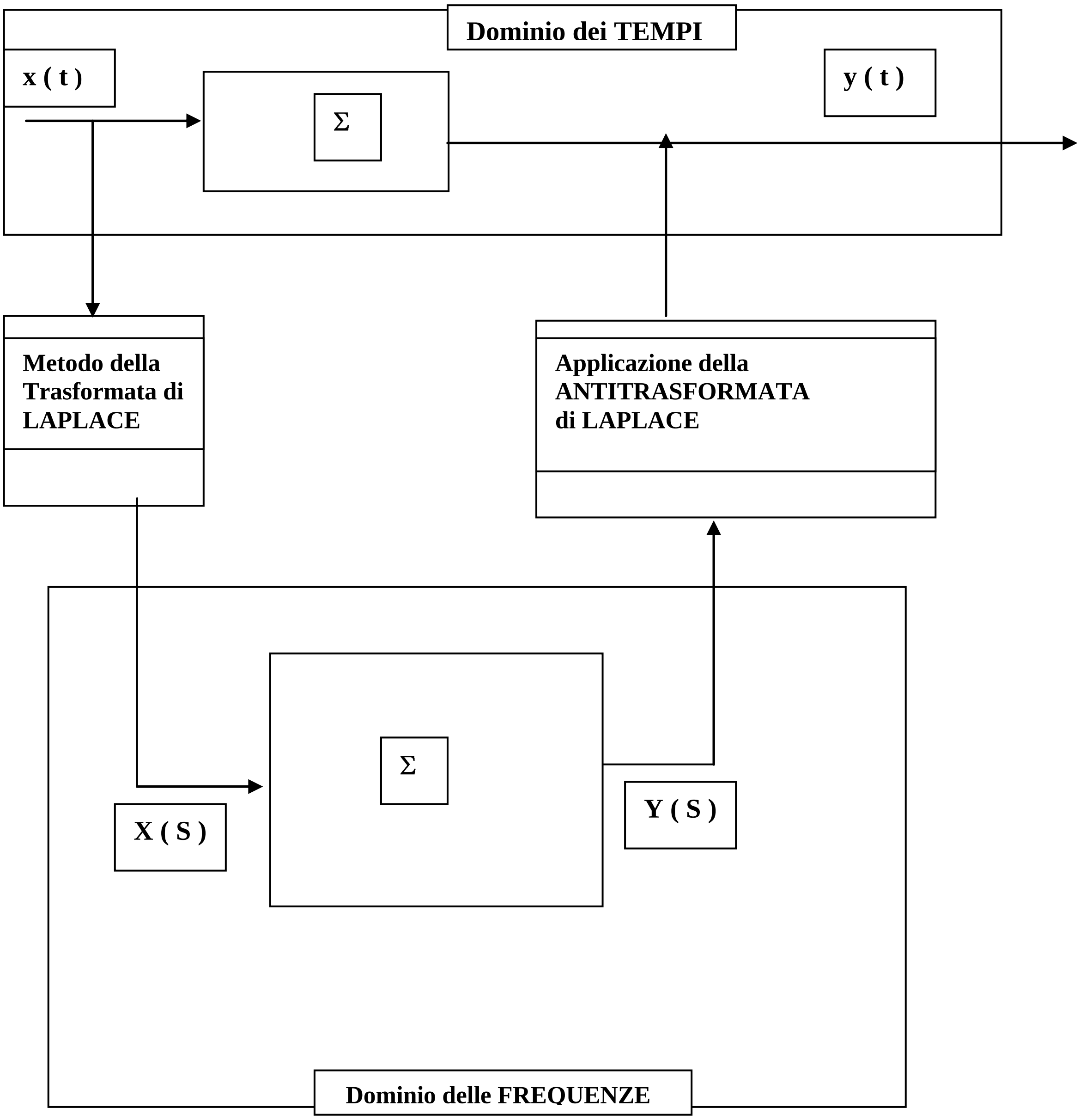
$f(t) = \ln t$	$f'(t) = 1 / t$
	

TRASFORMATA DI LAPLACE

Studiare un SISTEMA significa anche determinare come varia nel tempo l'USCITA in funzione dell'ingresso. Molto spesso le equazioni messe in gioco diventano molto complesse per effetto della presenza di elementi che, ACCUMULANO ENERGIA.
In questo caso le equazioni possono contenere delle derivate e degli integrali.
La TRASFORMATA di LAPLACE è un operatore matematico che consente, di semplificare lo **studio dei sistemi**, che presentano equazioni complesse. Questo studio non avviene nel **dominio del tempo**, ma avviene nel **dominio delle frequenze**, attraverso una variabile complessa indicata con **S**.
In una fase successiva si ritorna nell'ambito temporale attraverso un operatore inverso detto ANTITRASFORMATA di LAPLACE.

Si veda la tabella di pagina successiva, che illustra lo schema del procedimento.

Il procedimento impiegato in questo metodo, dunque, si può così vedere:



Dunque, per noi, la x(t) è il generico segnale variabile nel tempo applicato all'**ingresso** del nostro SISTEMA, mentre la y(t) è la sua **risposta**, che si determina risolvendo un'equazione differenziale.
Lo studio stesso viene semplificato se si effettua nell'ambito della frequenza.
Pertanto, con X(S) indichiamo la trasformata dell'ingresso x(t), e con Y(S) indichiamo la risposta della risposta y(t), nel dominio detto.
E' ovvio che la Y(S) si risolve in maniera più agevole rispetto alla y(t).
E' altrettanto chiaro che per passare dalla RISPOSTA Y(S), nell'ambito delle frequenze, alla RISPOSTA y(t), nel dominio del tempo, occorre procedere all'antitrasformata di LAPLACE.

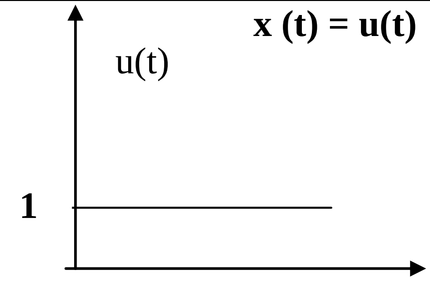
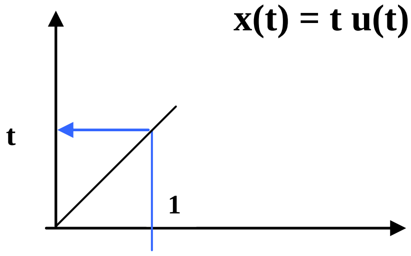
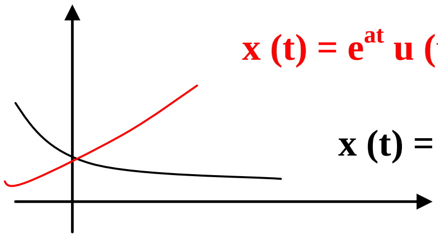
E' comunque importante osservare che, esiste una corrispondenza biunivoca tra il segnale x(t) nel tempo e la sua trasformata X(S) nell'ambito delle frequenze, ossia: **ad ogni x(t) è associata una ed una sola X(S) e viceversa.**

Tutte le funzioni x(t) per le quali vogliamo determinare la trasformata sono caratterizzate dall'essere nulle per t < 0.
In pratica consideriamo il prodotto tra la funzione ed il gradino unitario u (t):

$$\begin{cases} \mathbf{u\ (t) = 0 \quad per\ t < 0,} \\ \mathbf{u\ (t) = 1 \quad per\ t > 0,\ e\ questo\ implica\ che,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x\ (t)\ .\ u\ (t) = 0\ \ per\ t < 0,} \\ \mathbf{x\ (t)\ .\ u\ (t) = 1\ \ per\ t > 0.} \end{cases}$$

Riportiamo, ora, una TABELLA, che lega i segnali più comuni con la corrispondente trasformata di LAPLACE.

SEGNALE NEL DOMINIO DEL TEMPO **x (t)**	**TRASFORMATA di LAPLACE OPPURE, SEGNALE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA S** **X (S)**
$x(t) = u(t)$ 	**$X(S) = 1 / S$**
$x(t) = t\,u(t)$ 	**$X(S) = K / S^2$**
 **$x(t) = e^{at}\,u(t)$** **$x(t) = e^{-at}\,u(t)$**	**$X(S) = 1 / S - a$** **$X(S) = 1 / S + a$**
$x(t) = t\,e^{-at}\,u(t)$ **$x(t) = t\,e^{at}\,u(t)$**	**$X(S) = 1 / (S + a)^2$** **$X(S) = 1 / (S - a)^2$**
$x(t) = \cos(\omega t)\,u(t)$	**$X(S) = S / (S^2 + \omega^2)$**
$x(t) = \mathrm{sen}(\omega t)\,u(t)$	**$X(S) = \omega / (S^2 + \omega^2)$**
$x(t) = K \cdot u(t)$	**$X(S) = K / S$**

<u>**N.B.**</u> Spesso la u (t) si omette in quanto si sa che è nulla solo per **$t < 0$,** ed in caso contrario vale **uno.**

PROPRIETA' DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE

Consideriamo due segnali x1 (t) e x2 (t) e le loro trasformate X1 (S) ed X2 (S), siano ad esempio A e B due costanti, allora la trasformata del segnale

$$x(t) = A\, x1(t) + B\, x2(t)$$

è ottenuta come: $X(S) = A \,.\, X1(S) + B \,.\, X2(S)$.

Si considerino i seguenti esempi, ossia si determini la trasformata di LAPLACE dei segnali:

a) $x(t) = 4 + 2 \text{ sen } 4t - 5\, e^{-2t}$;

b) $x(t) = 1 + 3 \cos 3t + e^{-t}$;

c) $x(t) = 2 \cos 8t - \text{sen } 3t - 2 + 7\, e^{-7t}$;

d) $x(t) = t\, e^{-5t} + 2 \cos 2t - \text{sen } 5t + 5$.

SOLUZIONI. Sapendo che:

FUNZIONE	**TRASFORMATA**
1	1/S
4	4/S
Sen 4t	$4 / S^2 + 4^2$
2 sen4t	$8 / S^2 + 4^2$
e^{-2t}	1/ S +2
$- 5\, e^{-2t}$	-5 / S + 2
$x(t) = 4 + 2 \text{ sen } 4t - 5\, e^{-2t}$	**$X(S)= 4/S + 8 / S^2 + 4^2 - 5 / S + 2$**
cos 3t	$S / S^2 + 3^2$
3 cos 3t	$3S / S^2 + 3^2$
e^{-t}	1 / S + 1
$x(t) = 1 + 3 \cos 3t + e^{-t}$	**$X(S)= 1/S + 3S / S^2 + 3^2 + 1 / S + 1$**
Cos 8t	$S / S^2 + 8^2$
2 cos 8t	$2S / S^2 + 8^2$
e^{-7t}	1 / S + 7

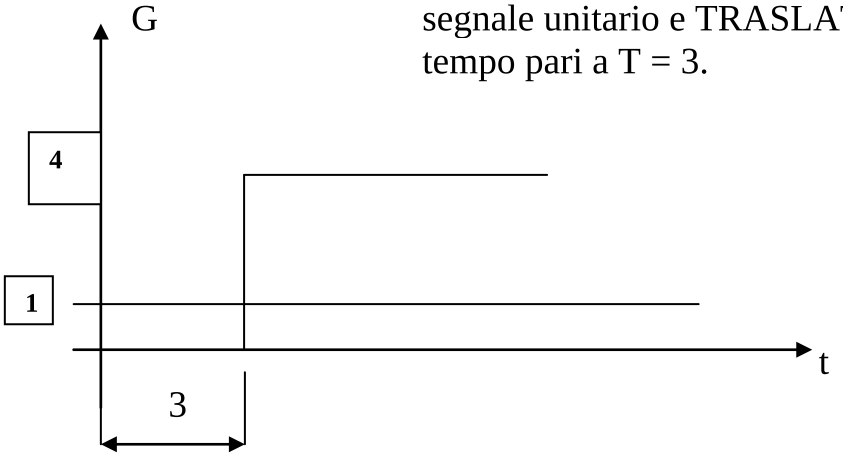
$7\ e^{-7t}$	$7 / S + 7$
sen 3t	$3 / S^2 + 3^2$
2	$2 / S$
x (t) = 2 cos 8t – sen 3t – 2 + 7 e^{-7t}	**X(S) = 2S / $S^2 + 8^2$ - 3 / $S^2 + 3^2$ - - 2 / S + 7 / S + 7**
$t\ e^{-5t}$	$1 / (S + 5)^2$
2 cos 2t	$2S / S^2 + 2^2$
sen5t	$5 / S^2 + 5^2$
5	$5 / S$
x (t) = t e^{-5t} + 2 cos 2t – sen 5t + 5	**X(S) = 1 / $(S + 5)^2$ + 2S / $S^2 + 2^2$ - - 5 / $S^2 + 5^2$ + 5 / S**

ALTRE IMPORTANTI PROPRIETA'

Si è visto che un segnale x (t) ha per trasformata il segnale X (S), ora se lo stesso segnale è traslato di un tempo T, allora si avrà che:
$L (x (t - T)) = X (S) e^{-ST}$.

<u>Facciamo un esempio</u>. Si determini la trasformata del segnale temporale seguente:

si tratta di un segnale che ha ampiezza 4 volte maggiore del segnale unitario e TRASLATO in ritardo di un lasso di tempo pari a T = 3.



Posso quindi ammettere che: x (t) = 4 . u (t) . (t – 3).
Con la stessa metodologia ricaviamo la trasformata:

<u>FUNZIONE</u>	**TRASFORMATA**
u (t)	**1/S**
4 u (t)	**4/S**
4 u (t) (t – 3)	**4/S (e^{-3S})**

Inoltre se X(S) è la trasformata di x (t) allora la trasformata $x(t)\, e^{-At}$ con A costante è uguale a: $L (x (t)\, e^{-At}) = X(S + A)$.
In pratica il prodotto del segnale **x (t) per e^{-At}** provoca una **traslazione della trasformata X (S)** di una costante pari ad **A**.

<u>ESEMPIO</u> si calcoli la funzione la cui trasformata è la quantità

$$4 / ((S+5)^2 + 4^2).$$

Se fosse $4/ (S^2 + 4^2)$ rappresenterebbe la trasformata di **sen 4t,**

Nella nostra relazione è presente la quantità $(S+5)^2$, pertanto è presente una traslazione, alla quantità indicata, in altri termini

$$4 / ((S + 5)^2 + 4^2)$$

è la trasformata della funzione **sen 4t e^{-5t} .**

Se X (S) è la trasformata di x (t), allora la trasformata della derivata x'(t) del segnale vale: **L (x'(t)) = S X(S) – x(0),**
dove x(0) è il valore iniziale, che spesso è NULLO, per cui si può trascurare ed ammettere semplicemente che:

$$L(x'(t)) = S\,X(S).$$

In pratica per trovare la trasformata della derivata x'(t) è sufficiente moltiplicare la trasformata X(S) del segnale x(t) per la variabile complessa S.

ESEMPIO Sia x(t) =3t, qual'è la trasformata di x'(t) =3 ?
Esso sarà: $L(x'(t)) = 3/S$.
DIMOSTRAZIONE: $L(x(t)) = L((3t)) = 3/S^2$;
$L((x'(t)) = S\,L(x(t)) = \cancel{S} \cdot 3/S^{\cancel{2}} = 3/S$
In modo analogo: x(t) = sent, da cui si ottiene, $L(x(t)) = 1/ S^2 + 1$, da ciò noi sappiamo che $x'(t)) = d(\text{sen } t)/dt = \cos t$, la cui trasformata di Laplace è data da: $L(\cos(t)) = S/S^2 + 1$.
Ma è altresì vero che:
$L(d(\text{sen } t)/dt) = S\,L(\text{sen}(t)) = S \cdot (1/ S^2 + 1) = S/S^2 + 1$,
che corrisponde proprio alla trasformata di Laplace del cos t. (c.v.d.).

Se X(S) è la trasformata di x(t), allora la trasformata dell'integrale $\int x(t)\,dt$ del segnale vale: $L(\int x(t)\,dt) = X(S)/S$.

CONCLUSIONE: Per determinare la trasformata dell'integrale di un segnale, si moltiplica la trasformata del segnale stesso per l'inverso della variabile complessa S.

ESEMPIO Sia x(t) = 4t allora $4\int t\,dt = \int x(t)\,dt = 4\,t^2/2 = 2\,t^2$.
Da ciò si ricava che:
$L(\int x(t)\,dt) = L(2t^2) = 1/S\{L(x(t))\} = 1/S\{L(4t)\} = 4/S\,(1/S^2) =$
$= 4/S^3$.

Se X(S) è la trasformata di x(t), allora la trasformata di t x(t) vale:
L (t x(t)) = d X(S)/dS, in altri termini corrisponde alla derivata della trasformata X(S) di x(t), rispetto alla variabile complessa S.

ESEMPIO Dato che $L(e^{-t}) = 1/(S+1)$, e da ciò ricavo che:
$L(t\,e^{-t}) = d/dS(1/S+1) = 1/(S+1)^2$.

Si determini la trasformata di LAPLACE della seguente funzione:
$x(t) = 5\,e^{-2t}\cos 20\,t + 3\,\text{sen}\,100\,t$. (vedi pag. successiva **)**

Sapendo che: L (cos (20 t)) = S / S² + 20²,
L (sen (100 t)) = 100 / S² + 100².

E' ovvio che, ne risulta: 3 L (sen (100 t)) = 300 / S² + 100².

Si noti che risulta pure che: L (e^{-2t}) = 1 / S + 2 = 1 / S*.

Infine si desume, essendo presente una traslazione, che:
L (e^{-2t} cos 20 t) = S* / S*² + 20² = (S + 2) / ((S+2)² + 20²).
(**per proprietà di traslazione della frequenza**).

In definitiva risulta che:
L (5 e^{-2t} cos 20 t) = 5 (S + 2) / ((S+2)² + 20²), da cui se ne conclude che, **L (x(t)) = L (5 e^{-2t} cos 20 t + 3 sen 100 t) =**
= 5 (S + 2) / ((S+2)² + 20²) + 300 / S² + 100².

Si determini la trasformata di LAPLACE della funzione temporale seguente:

x(t)= 5 cos (50 t) + 3 e^{-3t} sen (100 t)

Noi sappiamo che: L (cos 50t) = S / S² + 50²
5L (cos 50t) = 5 S / S² + 50²
L(sen 100t) = 100 / S² + 100²
L (e^{-3t}) = 1/S+3 = 1/S* con S* = S +3.

Da ciò si ricava che:
L (e^{-3t} sen (100 t)) = 100 / S*² + 100² = 100 / (S+3)² + 100² e da ciò ottengo, 3 L (e^{-3t} sen (100 t)) = 300 / (S+3)² + 100².
In conclusione la trasformata di Laplace del segnale,
x(t)= 5 cos (50 t) + 3 e^{-3t} sen (100 t) risulta uguale a
X (S) = 5 S / S² + 50² + 300 / (S+3)² + 100².

L’ANTITRASFORMATA DI LAPLACE.

Quest’operazione consente di passare dall’ambito delle frequenze all’ambito dei tempi. Noi abbiamo indicato il passaggio del segnale x(t), nel dominio del tempo, al segnale X(S), nel dominio delle frequenze, con l’operatore L, ossia

$$\mathbf{L\ (\ x(t)\ ) = X(S).}$$

Ora è possibile indicare con L^{-1} l’operatore inverso di L, ossia l’ANTITRASFORMATA di LAPLACE; in altri termini quell’operatore che agisce su X(S) e mi restituisce x(t):

$$\mathbf{L^{-1}\ (\ X(S)\ ) = x(t).}$$

Impiegando la TABELLA, introdotta a suo tempo, è possibile da una funzione passare alla trasformata e viceversa, poiché ad ogni x(t) è associata una ed una sola X(S) e viceversa ad ogni X(S) è associata una ed una sola x(t).

ESEMPIO Sia $X(S) = S / (S^2 + a^2)$, si determini la sua antitrasformata, ossia la sua x(t) nel dominio del tempo.

Da ciò se ne conclude che:

L’antitrasformata è un operatore lineare.

ESEMPI: Si determinino le antitrasformate delle seguenti equazioni nella variabile S.

$x(t) = 4 / S + 2$ $x(t) = 3S / S^2 + 1$	$x(t) = 10 / S^2 + 2^2$ $x(t) = 9 / (S + 4)^2 + 3^2$
$\mathbf{4 L^{-1} (1 / S + 2) = 4 e^{-2t}}$	$\mathbf{L^{-1} (10 / S^2 + 2^2) = 5\ sen\ 2t}$
$\mathbf{L^{-1} (3S / S^2 + 1) = 3 \cos t}$	$\mathbf{L^{-1} (9 / (S + 4)^2 + 3^2 = 3(e^{-4t})\ sen\ 3t}$

Nel caso in cui la funzione da antitrasformare è un rapporto tra due polinomi, ossia nel caso in cui: $\mathbf{X(S) = N(S) / DS)}$, con il grado del DENOMINATORE maggiore di quello del NUMERATORE, occorre procedere alla decomposizione, che adesso vedremo.

L’ipotesi è che il denominatore sia di 2° grado, e ciò implica che il numeratore è di primo grado, ma il ragionamento proposto è vale per un qualsiasi grado del denominatore, (purché maggiore del numeratore). Supponiamo inoltre che: $\mathbf{D(S) = (S - a) (S - b).}$

Perciò potremo scrivere: $\mathbf{X(S) = N(S) / (S – a) (S – b)}$.

Lo scopo di questo metodo è quello di sostituire al rapporto superiore un’espressione di questo tipo: $\mathbf{X(S) = A / (S –a) + B / (S –b)}$.

Vediamo ora attraverso un esempio concreto come si procede per il calcolo delle due costanti **A** e **B**.

<u>ESEMPIO:</u> Sia X(S) = 3S / (S – 2)(S + 3), ora pongo X(S) eguale a:

X(S) = A/(S – 2) + B / (S + 3).

Da ciò posso scrivere:

A (S + 3) + B (S – 2) = 3S, sviluppo i prodotti, ottenendo,

AS + 3A + BS – 2B = 3S

(A + B) S + 3A – 2B = 3S.

Otteniamo così il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 3A - 2B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 3 - B \\ 9 - 3B - 2B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 9 / 5 \\ A = 3 - 9 / 5 = 6 / 5 \end{cases}$$

A = 6 / 5
B = 9 / 5

In definitiva possiamo ammettere che:

X(S) = A/(S – 2) + B / (S + 3) = 6 / 5 / (S – 2) + 9 / 5 / (S + 3).

Quest'ultima relazione è più facilmente antitrasformabile rispetto all'espressione iniziale:

L^{-1} (X(S)) = L^{-1} (6 / 5 / (S – 2) + 9 / 5 / (S + 3)), ossia corrisponde ad effettuare, la **L^{-1} (6 / 5 / (S – 2))** più la **L^{-1} (9 / 5 / (S + 3)).**

Eseguendo le antitrasformata richieste si ottiene il risultato richiesto:

$$\mathbf{x (t) = (6 / 5)\, e^{2t} + (9 / 5)\, e^{-3t}}.$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Abbiamo visto come sia conveniente studiare i sistemi lineari, o i sistemi in genere, mediante relazioni nel dominio delle frequenze. Questo nuovo modello ci consente di determinare la funzione di TRASFERIMENTO del sistema. La funzione di trasferimento o **f.d.t** viene definita come: **f.d.t = Y(S) / X(S),**
dove **X(S)** è la trasformata del segnale di ingresso, ed **Y(S)** è la trasformata del segnale di uscita.
La **f.d.t** è una funzione complessa, ossia dotata di una parte reale e da una parte immaginaria. Indicando con **H(S)** la **f.d.t**, si avrà allora che:

$$X(S) \longrightarrow \boxed{H(S)} \longrightarrow Y(S)$$

$\Rightarrow$ **Y(S) = H(S) X(S).**

Nota la **H(S)** è possibile calcolare la **Y(S)**, ossia la RISPOSTA del SISTEMA.
Pertanto antitrasformando la quantità **Y(S)**, si ricava la RISPOSTA **y(t)**, nel dominio del TEMPO; in altri termini si ricava l'andamento temporale della risposta del sistema all'ingresso fornito.
L'andamento della risposta **y(t)** contiene, come vedremo, sia la FASE TRANSITORIA che la FASE FORZATA o di REGIME.
La conoscenza della **H(S)** consente di definire altre caratteristiche fondamentali del sistema, quali la STABILITA'.

CALCOLO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Il vantaggio del metodo della trasformata è la trasformazione dell'equazione differenziale che lega l'uscita all'ingresso del sistema, in un'equazione algebrica.
Il modello matematico di un sistema lineare comprende tre uniche operazioni:
la moltiplicazione per una costante K; la derivata; l'integrale.
Consideriamo un generico segnale x(t), la cui trasformata sia X(S), allora la trasformata:

del prodotto per la costante K è :	**K x(t)**	$\Rightarrow$	**K . X(S);**
della derivata è:	**dx(t)/dt = x(t)**	$\Rightarrow$	**S . X(S);**
dell'integrale è :	$\int$ **x(t) dt**	$\Rightarrow$	**X(S) / S.**

Si intuisce, dunque, che l'equazione differenziale che lega l'ingresso x(t) e l'uscita y(t) di un sistema, si trasforma in **un'equazione algebrica** nell'ambito delle trasformate o dominio delle frequenze.

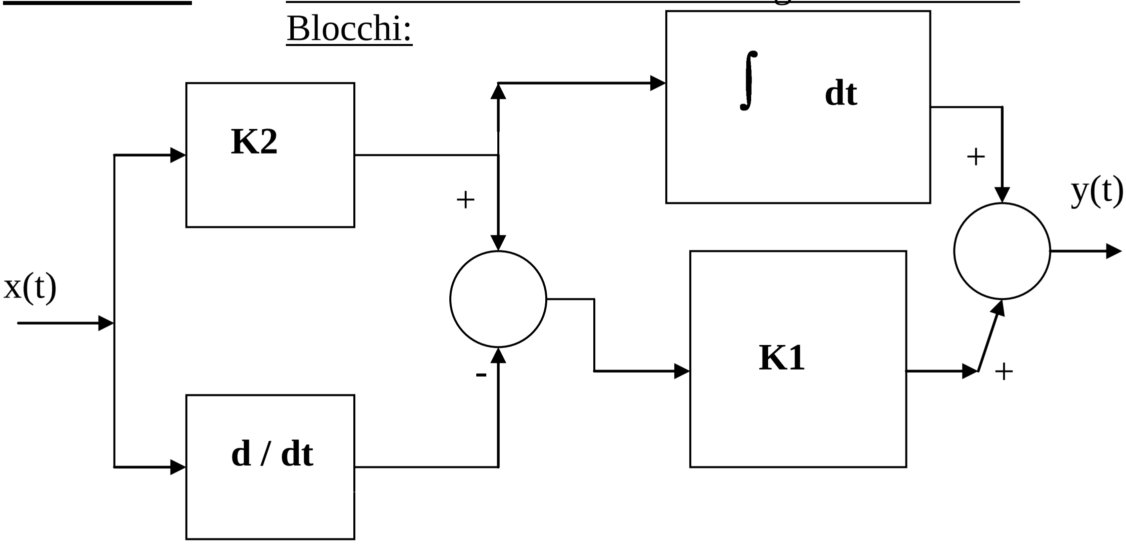
<u>ESEMPIO:</u> Se l'equazione caratteristica di un sistema ingresso x(t) ed uscita y(t) è del tipo seguente:

$$3\, dy(t) / dt - 5\, y(t) + 2 \int y(t)\, dt = 3\, x(t) - 2\, dx(t) / dt$$

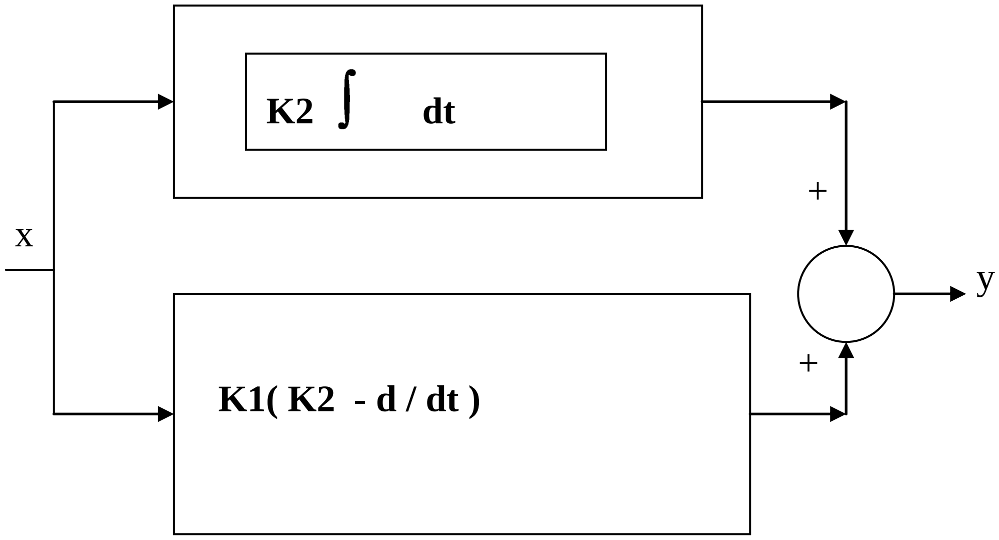
Nell'ambito delle frequenze diviene:
$3S\, Y(S) - 5\, Y(S) + 2\, Y(S) / S = 3\, X(S) - 2S\, X(S)$.

Da cui raccogliendo Y(S) ed X(S), si ottiene:
$Y(S)\, (3S - 5 + 2 / S) = X(S)\, (3 - 2S)$.
A questo punto posso calcolare la f. d. T:
$Y(S) / X(S) = H(S) = (3 - 2S) / (3S - 5 + 2 / S) =$
$H(S) = (3 - 2S) / (3S^2 - 5S + 2 / S) =$
$H(S) = (3 - 2S)\, S / (3S^2 - 5S + 2 / S)$.
Decomponendo l'equazione di secondo grado a denominatore si desume che: $H(S) = (3 - 2S)\, S / (S - 1) (3S - 2)$.
Si fa notare che:
$Y(S) / X(S) = H(S) = (3 - 2S)\, S / (S - 1) (3S - 2)$. Ora se l'ingresso è rappresentato da un gradino unitario, la cui trasformata di Laplace vale 1 / S, si ottiene una risposta del tipo:
$Y(S) / X(S) = H(S) = (3 - 2S)\, \cancel{S} / (S - 1) (3S - 2)\, \cancel{S} =$
$= 3 - 2S / (S - 1) (3S - 2)$. Da cui decomponendo in fratte semplice si può determinare l'effettiva risposte del sistema.

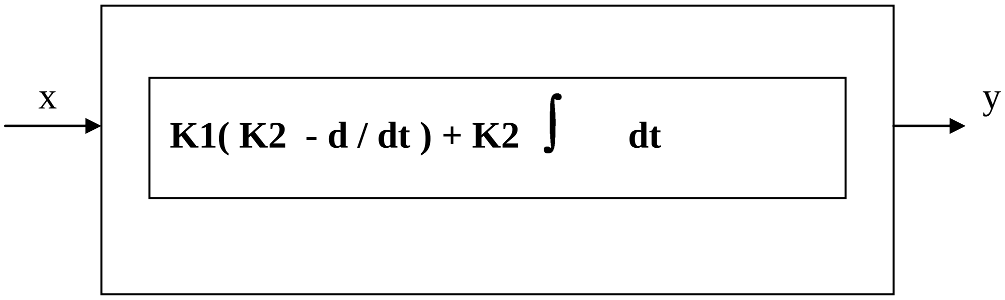
<u>ESEMPIO:</u> <u>Si ricavi le f. d. T ottenuta dal seguente schema a Blocchi:</u>



Il circuito stesso si può vedere nel modo seguente:



Da ciò si deduce che:



Ne segue infine che:

$\mathbf{y(t) = K1\,K2\;x(t) - K1\,d\,x(t) / dt\; + K2 \int x(t)\; dt}$.

Trasformando secondo Laplace :

$\mathbf{Y(S) = K1\,K2\;X(S) - K1\,S\;X(S) + K2\;X(S) / S}$, raccogliendo

X(S) si ottiene che,

$\mathbf{Y(S) = X(S)(\,K1\,K2 - K1\,S\; + K2 / S\,).}$

In conclusione si ottiene che:

$\mathbf{Y(S) / X(S) = (\,K1\,K2 - K1\,S\; + K2 / S\,)= (K1\,K2S - K1\,S^2\; + K2) / S.}$

A questo punto è possibile applicare il metodo delle trasformate, anche per studiare la RISPOSTA dei circuiti elettrici. Noi sappiamo che nella risposta temporale i circuiti elettrici sono caratterizzati da una fase TRANSITORIA e da una fase di REGIME o FORZATA, con le trasformate noi le caratterizzeremo entrambe, qualsiasi sia l'ingresso.

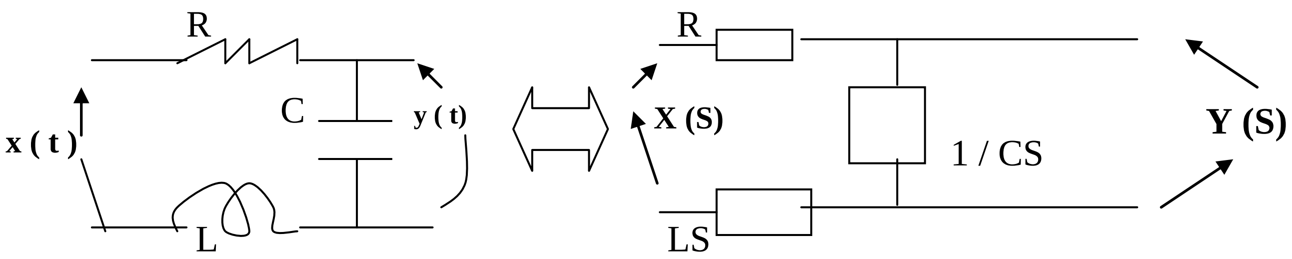
Con il metodo delle impedenze, per la risoluzione dei circuiti in corrente alternata, si determina solo l'andamento a regime della grandezza desiderata, ovviamente per segnali di ingresso esclusivamente sinusoidali.

Illustriamo le sostituzioni da effettuare per passare o meglio ricavare il circuito equivalente, nell'ambito delle trasformate.

TIPO COMPONENTE	METODO IMPEDENZA	METODO TRASFORMATA
R	**R**	**R**
C	**1 / jωC**	**1 / CS**
L	**jωL**	**SL**

E' come si fosse posto **j ω = j 2πf =S.**

ESEMPIO Determinare la funzione di trasferimento del circuito seguente:



Da cui potremo scrivere:
X(S) = R I(S) + I(S) / CS + LS I(S) = I(S) (R + 1/CS + LS),

mentre risulta che, **Y(S) = I(S) / CS**.

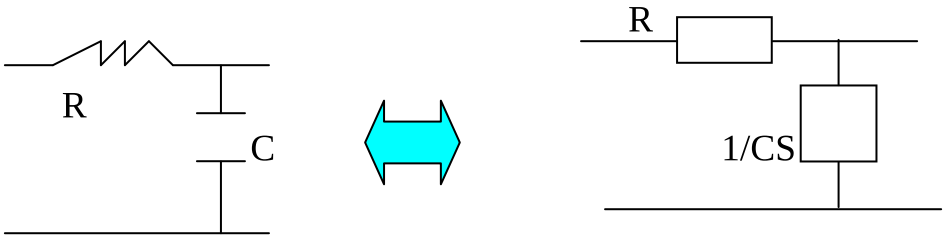
Pertanto per ottenere **H(S)** basta eseguire il seguente rapporto:

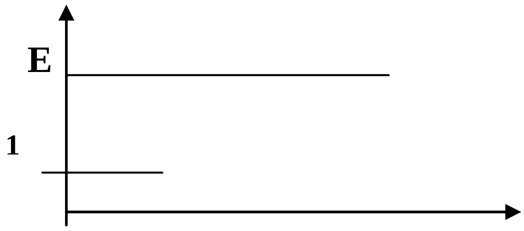
$$\mathbf{Y(S) / X(S) = \cancel{I(S)} / CS / \cancel{I(S)} (R + 1 / CS + LS) =}$$

$$\mathbf{= 1 / CS (R + 1 / CS + LS) =1 / \ LCS^2 + RCS + 1.}$$

ESEMPIO DI CALCOLO DELLE RISPOSTE DEI CIRCUITI ELETTRICI.

1) Si determini l'andamento della corrente in un circuito RC, come risposta ad un segnale di INGRESSO a GRADINO di ampiezza E.





X(S) = E (1/S) = E/S

Dal circuito equivalente, **trasformato**, ottengo che:

X(S) = R I(S) + (1/CS) I(S) = I(S) (R + 1/CS).

Da ciò si ricava che: **I(S) / X(S) = H(S) = CS / 1+ RCS**

La trasformata della corrente vale:
I(S) = H(S) X(S), con **H(S) = CS / (1 + RCS)** e con **X(S) = E/S**,

I(S) = H(S) X(S)= (C$\cancel{S}$ / (1 + RCS)) E / $\cancel{S}$ = EC/(1 + RCS),

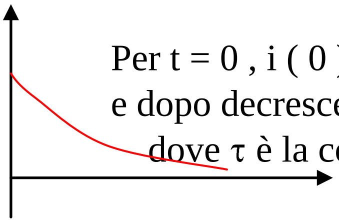
divido numeratore e denominatore per **RC**, ottenendo così,

I(S) = E / R / S + 1 / RC

<u>OSSERVAZIONE</u>: Se ponessi E / R = K e 1 / RC = a e ciò implica che, I (S) diviene del tipo:
I (S) = K / S + a. La cui antitrasformata vale:

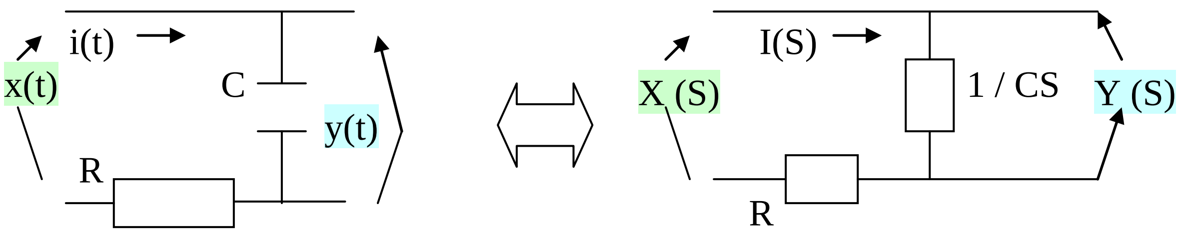
$$L^{-1}(I(S)) = i (t) = K e^{-at} = E / R\, e^{-t / RC} .$$

L’andamento temporale è indicata in figura:



Per $t = 0$, $i(0) = E / R$ che ne è il valore massimo e dopo decresce. Dopo un tempo pari a 4 o 5 volte τ, dove τ è la costante di tempo, la corrente si annulla ed il condensatore è <u>carico</u>.

2) <u>Andamento della TENSIONE di un condensatore</u>.



In questo caso è: $Y(S) = I(S) / CS$.

Inoltre risulta che: $X(S) = (R + 1 / CS)\, I(S)$.

La nuova funzione di trasferimento posso ottenerlo così: $Y(S) / X(S) = F(S)$,

$$\mathbf{F(S) = 1 / CS\, (R + 1 / CS) = 1 / 1 + RCS}.$$

Posso calcolare l’uscita **Y(S)**, tenendo conto che l’ingresso è sempre il gradino E, ossia $X(S) = E/S$,

$Y(S) = F(S)\,(E / S) = E / S\,(1 + RCS)$, se si mette in evidenza RC, di desume che: **$(E / RC) / S\,(S + 1 / RC)$**.

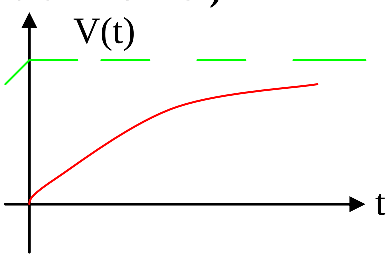
Applicando il solito metodo della decomposizione in fratte semplici, ossia ritenendo, **$(E / RC) / S\,(S + 1 / RC) = A / S + B / S + 1 / RC$**, si ottiene $A = E$ e $B = - E$, perciò la risposta è del tipo,

$$\mathbf{Y(S) = E / S - E / S + 1 / RC}.$$

La sua antitrasformata mette in luce la seguente risposta, al gradino unitario di valore E: **$L^{-1}(Y(S)) = y(t) = L^{-1}(E / S) - L^{-1}(E / S + 1 / RC) =$**

$= y(t) = E\, u(t) - E\, e^{-t / RC}\, u(t) = E\,(1 - e^{-t / RC})$.

In definitiva si ottiene graficamente che:



POLI E ZERI

La trasformata di LAPLACE, nella maggioranza dei casi di nostro interesse, assume la forma di rapporto fra due polinomi, nella variabile S.
Infatti la **f.d.t** di un circuito RLC, visto in precedenza è:

$$\mathbf{f.d.t = H (S) = 1 / (LCS^2 + RCS + 1)},$$

oppure la RISPOSTA al gradino del circuito RC, è:

$$\mathbf{Y (S) = E / (S (1 + RCS))}$$

In generale si può dire che le equazioni di nostro interesse assumono la forma: $\mathbf{F(S) = N(S) / D(S)}$.
Negli esempi introdotti il numeratore N(S) assume un valore costante, ossia il valore 1 oppure E; in altri termini è un polinomio nella variabile S di 0°, mentre il denominatore nei due casi in oggetto, sono di 2° grado rispetto alla variabile S.
E' ovvio che i valori della S che annullano i polinomi N(S) e D(S) si dicono **radici** del polinomi stessi. Più propriamente si diranno **ZERI** della funzione F(S) **i valori della S che annullano il numeratore N(S)**; **POLI** della funzione F(S) **i valori della variabile S che annullano il denominatore D(S)**.

ESEMPIO Si determinino gli ZERI e i POLI delle seguenti funzioni di Trasferimento:

A(S) = 2 / S + 3; **B(S) = 3S / S² - S – 2;**

C(S) = 2S + 4 / S (S + 2); **E(S) = S (S + 1) / S² + 3S + 2.**

1) A(S) = 2 / S + 3. La f.d.t di A(S) non ha zeri, poiché l numeratore è costante. Per il denominatore invece si ha che:
S + 3 = 0, S = - 3; in definitiva si ha un polo in S = - 3.

2) B(S) = 3S / S² - S - 2. Il numeratore si annulla per S = 0, pertanto si ha ivi uno
zero; mentre per il denominatore, si hanno due poli, poiché esso si decompone secondo due fattori: (S –2) (S + 1), per cui essi si annullano rispettivamente per S = 2 ed S = - 1.

3) C(S) = 2S + 4 / S (S + 2). In questo caso si desume che il numeratore ha uno zero per S = - 2; mentre per il denominatore i poli sono due e si hanno per S = 0 ed S = - 2.

4) **E(S) = S (S + 1) / S² + 3S + 2 = S (S + 1) / (S + 2) (S + 1).**
In definitiva la funzione complessa in S ha due zeri in S = 0 ed S = -1 e due poli in S = - 2 ed S = - 1.

Da questi esempi si capisce quanto sia importante il saper eseguire la decomposizione dei polinomi per procedere all'antitrasformazione di LAPLACE.

<u>ESEMPI.</u> **B (S) = 3S / S² - S - 2.**

In questo caso ne risulta che il denominatore è un trinomio particolare di secondo grado, esso si decompone come:
S² - S – 2 = (S – 2) (S + 1). In definitiva si ricava che:
B (S) = 3S / S² - S – 2 = 3 S / (S – 2) (S + 1).

Applicando la decomposizione in fratte semplici si ottiene,
B (S) = A / S – 2 + B / S + 1, da cui risulta:
A = 2 e **B = 1**.
Procedendo all'antitrasformazione si ottiene:

$$\mathbf{y(t) = 2\,e^{2t} + e^{-t}}.$$

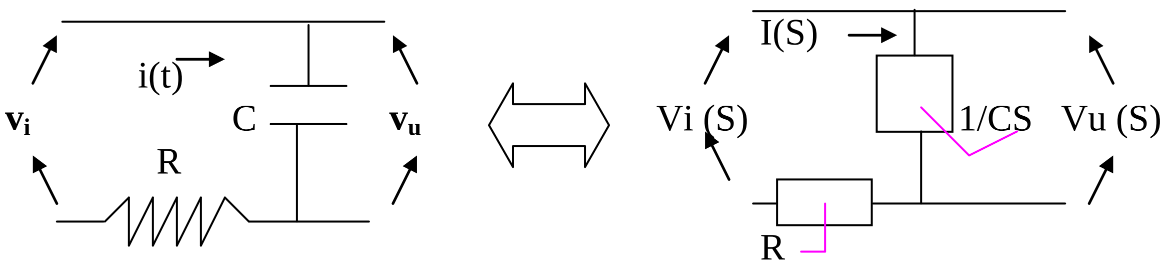
Sia ora **F(S) = 1 / 2S² - 6S + 2** 1/2 (1/ S² - 3S + 1) =
1/2 (1 / (S – 2) (S –1)).
Posso ipotizzare che: $\begin{cases} A = -B \\ A = -1 - 2B \end{cases} \longrightarrow$

$\longrightarrow$ A = 1 e B = -1, da cui ne consegue che,
F (S) = 1/ 2 (1 / S – 2 - 1 / S – 1)
La sua antitrasformazione ci consente di ottenere:

$$\mathbf{F(t) = 1/2\,(e^{2t} - e^{t})}.$$

INFLUENZA DEGLI ZERI E DEI POLI SULLA RISPOSTA DEL SISTEMA.

E' necessario procedere, osservando attentamente gli esempi, per comprendere l'influenza dei poli e degli zeri sulla risposta del sistema.
I nostri esempi sono sempre nell'ambito elettrico, si consideri il seguente circuito RC:



Si noti che: Vu (S) = R I (S); Vi (S) = I (S) (R + 1 / CS),

$$\mathbf{f.d.t = Vu / Vi = R\ \cancel{I\,(S)} / \cancel{I\,(S)}\ (R + 1 / CS)}$$

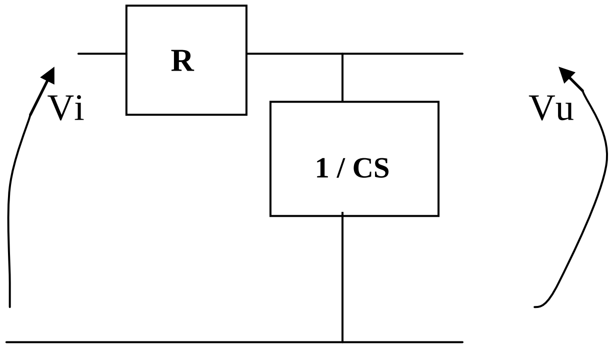
Il numeratore N(S) presenta uno zero in S = 0, e perciò la f.d.t ha uno ZERO nell'ORIGINE.
Questo significa che, nel caso in cui la frequenza assume valore nullo, ossia siamo nell'ambito della CONTINUA, il CONDENSATORE, non permette il passaggio della corrente, e perciò la tensione d'uscita è nulla.
Spesso è importante ricercare i POLI, poiché esprimono i valori in cui la frequenza è nulla e di conseguenza quando la tensione di uscita è nulla.
Si capisce che nel caso dei circuiti RC ed RL, gli ZERI si hanno per S = 0, ossia quando la frequenza è nulla, ed anche nell'origine del sistema cartesiano rappresentate i valori delle uscite.
Si intuisce dunque che i POLI sono di fondamentale importanza nello studio dei sistemi ed intervengono anche sulla risposta dei sistemi stessi.
Inoltre la risposta y(t) di un sistema sollecitato in ingresso dal segnale x(t), si compone di due termini:

A) **RISPOSTA LIBERA O TRANSITORIA;**
B) **RISPOSTA FORZATA O DI REGIME.**

Normalmente la risposta libera o transitoria di un circuito elettrico, risulta avere un andamento esponenziale decrescente, mentre la risposta forzata o di regime risulta avere un andamento identico a quello dell'ingresso.

La FORMA d'ONDA della risposta libera dipende solo dai POLI della f.d.t del SISTEMA, mentre quella della risposta di regime dipende solo dai POLI della TRASFORMATA X(S) del segnale x(t) applicato all'ingresso.
In pratica per determinare la risposta libera rL(t) di un sistema è sufficiente antitrasformare la sua f.d.t, cioè la sua funzione di trasferimento, indipendentemente dal segnale di ingresso applicato.

ESEMPIO Si determini la risposta libera o transitoria del circuito RC, con uscita ai capi di C.



Con semplici passaggi, (tra l'altro già visti in precedenza), si ottiene la funzione di trasferimento del sistema dato:

$$Vu / Vi = f.\ d.\ T = H (S) = 1 / 1 + RCS.$$

La sua risposta libera o transitoria si può desumere come :

$r_L (t) = L^{-1}(1 / 1 + RCS) = L^{-1}((1 / RC) / S + 1 / RC) =$

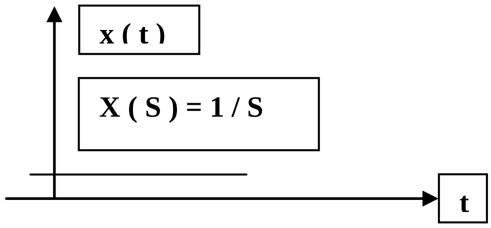
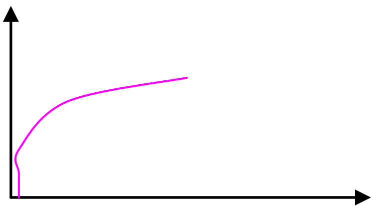
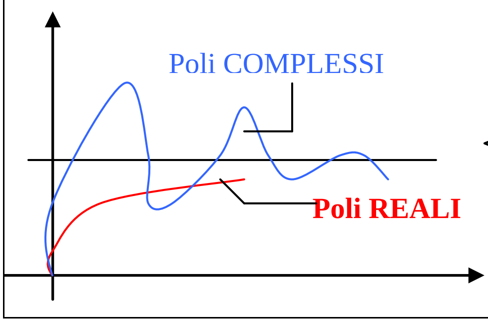
$= r_L (t) = 1 / RC\ \ L^{-1}(1 / \ S + 1 / RC) = 1 / RC\ e^{-t / RC}.$

Si ricorda che spesse volte 1 / RC si indica con τ.

Infine c'è da osservare che, l'andamento della risposta libera o transitoria, è fondamentale per lo studio della **STABILITA'** del sistema.
Si definisce **ORDINE di un SISTEMA, il numero dei POLI della sua FUNZIONE di TRASFERIMENTO.**
IN CONCLUSIONE i SISTEMI possono essere di:
ORDINE ZERO: nel caso in cui D(S) non si annulla mai, ossia è privo di poli, in altri termini le f.d.t sono del tipo: **H(S) = K ; H(S) = KS.**
ORDINE UNO: le f.d.t ha una D(S) di 1° grado, e quindi un POLO, ossia un valore di S che annulla D(S). In questo caso la f.d.t sono del tipo: **K / S oppure K / S + a.**

ORDINE DUE: è il caso in cui la D(S) è un polinomio di 2° grado, e quindi presenta due poli. In questo caso la f.d.t si presenta nella forma seguente: **K / S² + a S + b.**

La tabella riporta la RISPOSTA dei sistemi BASE, se all'ingresso viene applicato il gradino unitario.

SISTEMA di ORDINE 0 	In questo caso può essere H (S) = K Y (S) = K X (S) = K / S L^{-1}(K / S) = K L^{-1}(1 / S) = K u (t)
SISTEMA di ORDINE 1  	Sia in questo caso ad esempio: H (S) = 1 / S + a. Ora la risposta al gradino di detto sistema è ottenibile nel modo seguente: Y (S) = H(S) X(S) = 1 / S (S + a). Decomponendo si desume che: A / S + B / S + a, e ciò implica A (S + a) + B S = 1, da cui si ottiene il sistema: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A\ a = 1, \end{cases}$ e da ciò risalgo ai seguenti due valori di A e di B, ossia A = 1 / a e B = - A = - 1 / a. In definitiva si ricava che: vedi pag. succ. Y(S) = (1/a / S) – (1/a / S + a) 1/a L^{-1}(1 / S – 1 / S + a) = = 1 / a (1 – e^{-at}).
SISTEMA di ORDINE 2  	La sua f. d. T si presenta nel modo seguente: H(S) = 1 / a S² + b S + c. La risposta di detto sistema al gradino unitario è: Y(S) = H (S) X(S) =1/S (a S² + b S + c

IL DIAGRAMMA DI BODE

Nel caso dei segnali SINUSOIDALI, anziché impiegare la variabile complessa S si utilizza la variabile complessa **immaginaria pura j ω**, dove con **ω** si esprime la pulsazione del segnale, che è legata alla FREQUENZA del segnale di ingresso; infatti, **ω = 2 π f.**
Si tenga presente che la VARIABILE COMPLESSA S ha la forma: **$S = \sigma + j\,\omega$.**
Allo stesso modo si definisce **funzione di trasferimento complessa**, F (j ω), di un sistema lineare, il rapporto fra la funzione complessa di uscita Y e quella di ingresso X, ossia: $F(j\omega) = Y / X$, dove X è la trasformata complessa del segnale sinusoidale x (t), con ampiezza A e fase φ si intende il numero complesso X che può essere scritto, come: $X = A \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)$ ⇨ $X = A\, e^{-\varphi t}$ che ne è la sua <u>forma polare</u>.
Dalla f.d.t F (j ω) del sistema, nota la trasformata X della sinusoide d'ingresso con frequenza $f = \omega / 2\pi$, possiamo di conseguenza ricavare la trasformata complessa Y dell'uscita y(t): $Y = F(j\omega)\ X$.
Determiniamo l'espressione della sinusoide del segnale di uscita y(t), considerando che:

- la sua ampiezza è pari al MODULO del numero complesso $|Y|$: Y ;
- la fase è quella di Y: $\angle Y$;

mentre la frequenza è la stessa di quella del segnale di ingresso, essendo il sistema lineare, allora per quanto detto risulta che:

$$y(t) = |Y|\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \angle Y).$$

Si fa notare che con il metodo della trasformata complessa, otteniamo solo la risposta FORZATA o di REGIME del sistema, mentre la TRASFORMATA di LAPLACE ci consente di ricavare pure la risposta LIBERA o TRANSISTORIA del sistema.
Il metodo della trasformata COMPLESSA si differenzia da quella di LAPLACE, perché:

- vale solo per segnali sinusoidali, mentre LAPLACE vale per qualsiasi segnale;
- non fornisce la risposta LIBERA o TRANSITORIA.

Per determinare Y, ossia il modulo Y e la fase $\angle Y$, sfruttiamo le proprietà delle operazioni con i numeri complessi; infatti l'espressione $Y = F(j\omega)\ X$, è equivalente a:

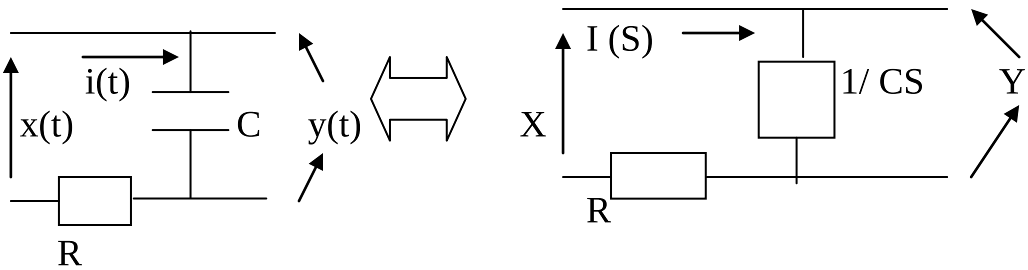
$$|Y| = |F(j\omega)|\ |X| \quad \text{e} \quad \angle Y = \angle F(j\omega) + \angle X .$$

In pratica il modulo di F (j ω) della f.d.t, rappresenta il rapporto tra le AMPIEZZE della sinusoidi di uscita e quella di ingresso:

$|F(j\omega)| = |Y| / |X|$, mentre la sua FASE

$\angle F(j\omega)$ fornisce lo SFASAMENTO tra la sinusoide di uscita e quella di ingresso, ossia, $\angle F(j\omega) = \angle Y - \angle X$.
Noti, per ogni valore della pulsazione ω del segnale d'ingresso x(t), la fase ed il modulo della f.d.t, ricaviamo l'uscita y(t).

ESEMPIO
Consideriamo il circuito RC di figura:



f.d.t = $F(j\omega) = Y / X = (1 / j\omega C) I / (R + 1 / j\omega C) I =$
$= 1 / 1 + j\omega CR$
In funzione della pulsazione ω, il modulo e la fase della f.d.t valgono:

- $|F(j\omega)| = 1 / \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$
- $\angle F(j\omega) = - \text{arcTg}(\omega RC) = - Tg^{-1}(\omega RC)$.

In genere l'andamento del modulo e della frequenza della f.d.t F (jω), in funzione della pulsazione ω, sono forniti tramite **i diagrammi di BODE.**
In pratica , per ricavare la f.d.t complessa da quella in S, e viceversa, è sufficiente porre S = jω, senza però dimenticare però le differenze indicate precedentemente, fra il metodo della trasformata di LAPLACE e quello complesso. Infatti nell'esempio precedente, cioè nel circuito RC indicato, la funzione di trasferimento in S che si ricava ponendo S = jω è:

F(S) = 1/(1+ RCS),

pari a quella calcolata con il metodo della TRASFORMATA di LAPLACE.

FORMA STANDARD DI UNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

La funzione di trasferimento può essere scritta nella forma standard.
La forma standard consiste nell'esprimere la FUNZIONE nel prodotto di una COSTANTE K e una FRAZIONE.
La FRAZIONE consiste nel fatto che il numeratore e il denominatore siano costituiti dai fattori seguenti:

- $j\omega$;
- $(j\omega)^n$;
- $1 + j\omega\tau$;
- $(1 + j\omega\tau)^n$;
- $1 / j\omega$, oppure, $1 / (j\omega)^n$;
- $1 / 1 + j\omega\tau$, oppure, $1 / (1 + j\omega\tau)^n$,

dove τ è un numero reale e positivo, che ha le dimensioni di un tempo e che spesso, corrisponde ad una COSTANTE di TEMPO. Si osserva che se si pone $S = j\omega$, si ottengono i termini standard in S: S^n; $(1 + S\tau)$; $(1 + S\tau)^n$; $1 / S$; $1 / S^n$; $1 / (1 + S\tau)$; $1 / (1 + S\tau)^n$.
In definitiva una funzione di trasferimento complessa, si potrà scrivere nella forma standard indicata, ossia nella forma:

$$F(j\omega) = K \frac{j\omega \ldots (j\omega)^n . (1 + j\omega\tau) \ldots (1 + j\omega\tau)^n}{j\omega \ldots (j\omega)^m . (1 + j\omega\tau') \ldots (1 + j\omega\tau')^m}$$

Nel caso di trasformata di LAPLACE:

$$F(S) = K \frac{S \ldots S^n . (1 + \tau S) \ldots (1 + \tau S)^n}{S \ldots S^m . (1 + \tau' S) \ldots (1 + \tau' S)^m} .$$

In questo caso la costante τ' rappresenta anche l'inverso del polo:

e dunque: è un polo della F.d. T.
In modo analogo τ è l'inverso dello zero:

dunque è uno zero della F.d.T.

La costante K è indicata con il nome di GUADAGNO STATICO; K è pari al valore della F. d. T, calcolato in $S = 0$: $K = F(0)$.

ESEMPIO. La f.d.t del circuito RLC: $F(S) = 1/ 1+SRC$,
può essere scritta ponendo $RC = \tau$: $F(S) = 1/ 1+S\tau$ e
presenta un polo $p = - 1/\tau$ e guadagno statico $K = 1$.
Per $F(S) = -5 (1 + 2S) / (1 + 10 S). (1 +100 S)$ abbiamo:
un guadagno statico di $K = - 5$; uno zero: $z = -1/2$;
due poli : $p1= - 1/10$ e $p2 = - 1/100$.

<u>Osservazione:</u> **per ricavare la forma standard si devono determinare le radici del numeratore e del denominatore e scriverle sotto forma di prodotto di fattori. Poi, successivamente, si mettono in evidenza queste radici, cambiandone il segno per ottenere la forma standard.**

ESEMPIO. $F(S) = 6S^2 + 3S / S^2 + 5S + 6$.
$N(S) = 6S^2 + 3S = 0$ se $S = 0$ oppure $S = - ½$;
mettendo in evidenza 0,5 ricaviamo:
espresso nella forma standard.
$D(S) = S^2 + 5S + 6 =$ si può anche scrivere $=(S + 2) . (S + 3)$.
Da cui si ottiene:
$3S (2S + 1) / (S + 2) (S + 3) =$
$= 1 / 2 (S) (1 + 2S) / (1 + S / 2) (1 + S / 3)$

<u>ed infine</u>:

- $G(S) = 2 (S+4) (S+2) / (S+100) (S+5) (S+10)$.

La funzione ha due zeri in $z1 = - 4$ e $z2 = - 2$, e tre poli $p1 = -100$,
$p2 = - 5$, $p3 = - 10$. <u>Può essere scritta nella forma standard</u>:

$G(S) = \cancel{16} (1 + S/4) (1 + S/2) / 5.\cancel{000} (1 + S/100) (1 + S/5) (1 + S/10)$

$= 2/625 (1 + j\, 0{,}25\omega)(1 + j\, 0{,}5\omega) / (1 + j\, 0{,}01\omega)(1 + j\, 0{,}2\omega)(1 + j\, 0{,}1\omega)$
Il guadagno statico vale: $K = 2/625$.

- Una funzione $H(S)$ presenta i seguenti poli reali: $p1 = - 1000$, $p2 = - 10$ e uno zero $z1 = - 5$; sapendo che il guadagno statico $K = H(0) = 50$.
Potremo allora scrivere:

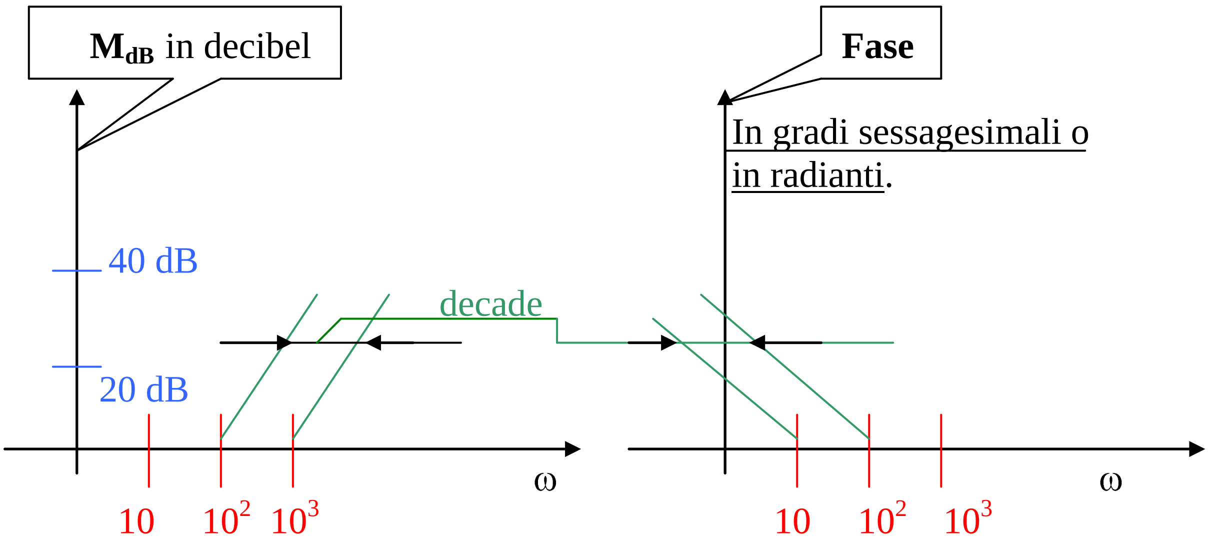
$H (j\omega) = 50 (1 + j\, 0{,}2\omega) / (1 + j\, 0{,}1\omega) (1 + j\, 0{,}001\omega)$.

DIAGRAMMA DI BODE

Abbiamo visto che il sistema in regime sinusoidale è descritto dalla sua f.d.t complessa F(jω), della quale dobbiamo conoscere MODULO e FASE.
I diagrammi di BODE forniscono l'andamento sia del modulo M che della fase φ di F(jω) in **funzione della pulsazione ω.**
Nella rappresentazione del modulo e della fase usiamo la scala logaritmica per l'asse delle ascisse, mentre per le ordinate il modulo M viene espresso in decibel, (dB):

$$MdB = 20 \log M.$$

L'unità dell'asse è indicata come decade, mentre per la fase si utilizza la scala lineare in gradi o radianti.



Si osserva che se M > 1, allora $M_{dB} > 0$; se M = 1 si desume che $M_{dB} = 0$, mentre se M < 0, si ha che $M_{dB} < 0$.
Si dimostra, che l'andamento del modulo e della fase della f.d.t complessa, possono essere ricavati come effetto risultante dei termini standard che, compongono il numeratore e denominatore.
A questo punto è necessario introdurre i DIAGRAMMI di BODE del **modulo** e della **fase** di tutti i possibili termini che compongono la nostra f.d.t., distinguendo i termini a numeratore, che caratterizzano gli zeri, e quelli a denominatore che caratterizzano i poli:

- La costante K,
- Zero nell'origine (jω);
- Zero qualsiasi (1 + jωτ);
- Polo nell'origine 1/ jω;
- Polo qualsiasi 1 / (1 + jωτ).

DIAGRAMMA DI BODE di una costante K :

Il modulo espresso in decibel, (dB), di una qualsiasi costante K si ottiene nel Seguente modo: $|K|_{dB} = 20 \log K$. Come si capisce il valore di K_{dB} espresso in decibel, non dipende dalla pulsazione ω. Conseguentemente, il diagramma di Bode del modulo di una costante K, è rappresentata da una retta orizzontale. Per quanto riguarda la fase possiamo ammettere che un valore costante, dal punto di vista dei numeri complessi può essere così espresso: $K = K + j\,0$ e ciò implica che la fase del numero stesso si può esprimere come, $\boldsymbol{\varphi = Tg^{-1}(0 / K) = 0}$ **se** $\boldsymbol{K > 0}$, $\boldsymbol{\varphi = Tg^{-1}(0 / K) = 180}$ **se** $\boldsymbol{K < 0}$, e come si osserva anche la fase è indipendente dalla pulsazione.

Esempio Rappresentiamo il diagramma di BODE di K = 100.

$M_{dB} = 20 \log |100| = 20 \log 100 = 40$ dB.

Essendo K > 0, allora φ = 0.

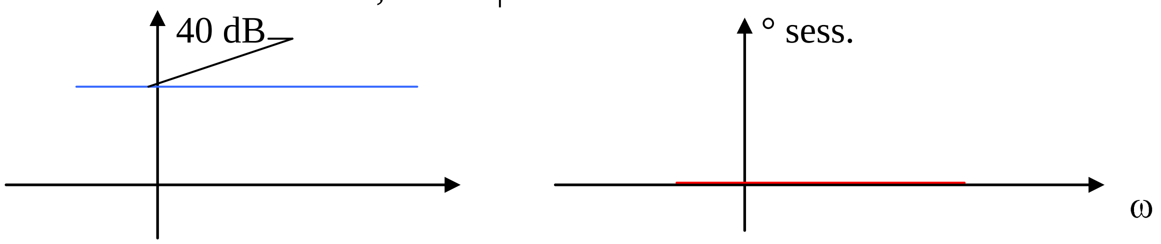


DIAGRAMMA DI BODE dell'espressione jω :

Indichiamo per comodità lo zero nell'origine: z = 0.

Il modulo M, $|M| = j\omega$, $M_{dB} = 20 \log |M| = 20 \log j\omega$.

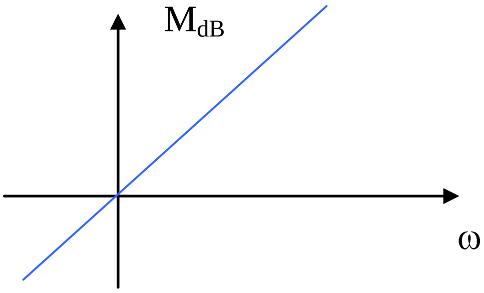
Il modulo dipende dalla pulsazione, da cui si capisce che il diagramma di Bode del modulo è rappresentato da una retta passante per l'origine, con una pendenza di 20 dB / decade.

Per esempio se per ω = 100 rad / s, si ha $M_{dB} = 7$ dB, allora nella decade successiva, ossia per ω = 1000 rad / s, il modulo assume il valore di $M_{dB} = (7 + 20)$ dB = 27 dB.

La fase φ jω è un numero immaginario PURO che scriviamo:

$j\omega = 0 + j\omega$

$\boldsymbol{\varphi = \arctan \omega/0 = 90°}$, dunque la fase è costante ed è indipendente dalla pulsazione, la curva è una retta orizzontale:



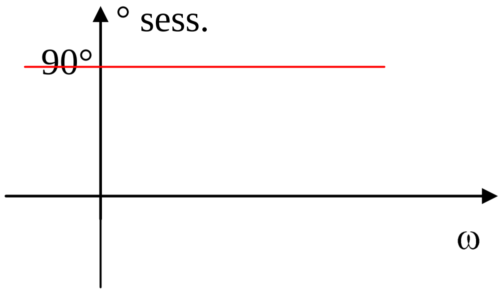


DIAGRAMMA DI BODE dell'espressione 1 + j ωτ :

Indichiamo per comodità lo zero come z = - 1/τ.

Il modulo M $\quad M = |1 + j\omega\tau|$, $M_{dB} = 20 \log |M| = 20 \log |1 + j\omega\tau|$.

Il modulo dipende dalla pulsazione; la curva rappresentante l'espressione di MdB in funzione della ω si approssima con la **spezzata:** MdB = 0 dB.
Questo per ω < 1/τ, mentre per ω > 1/τ la curva è una retta crescente con pendenza di 20 dB / decade.

La fase φ La fase di 1 + jωτ si determina come:

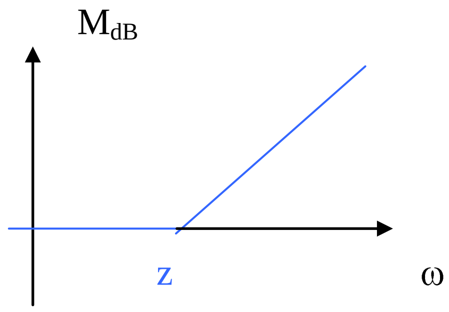
$$\varphi = \text{arctang } \omega/1 = \text{arctang } \omega.$$

La fase dipende, come si vede dalla pulsazione. La curva si approssima con una spezzata:

φ = 0 per ω < z /10,
φ = 90° per ω > 10 z ,

dove per z /10 < ω < 10 z la curva è una retta crescente che va da 0° a 90° assumendo il valore angolare φ = 45° quando ω = z, ossia quando ω assume il valore dello zero.

ESEMPIO. Rappresentiamo i diagrammi di BODE di 1 + j 0,01ω.
Abbiamo uno zero per z = 1/τ = 1/0,01 = 100. Pertanto il MODULO è nullo fino a ω = z = 100 rad/s e poi cresce di 20 dB, ogni decade e vale
20 dB per ω = 10 z = 1 000 rad/s, 40 dB per ω = 100 z = 10 000 rad/s.
La fase invece è nulla per ω < z /10 = 10 rad/s;
mentre è
φ = 90° per ω > 10 z = 1 000 rad/s, ed infine vale
φ = 45° per ω = z = 100 rad/s.



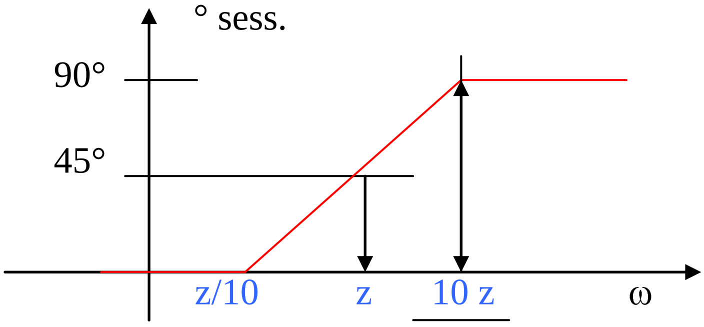


DIAGRAMMA DI BODE dell'espressione 1/ j ω :

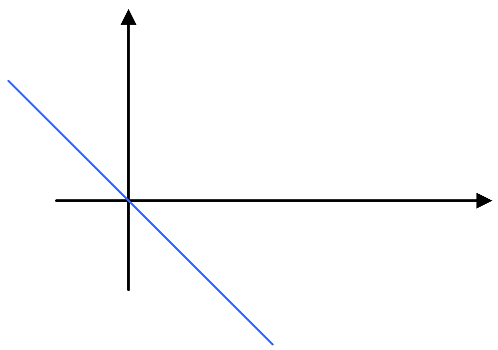
Indichiamo per comodità il polo nell'origine p = 0.

Il modulo M $M = \left| 1/ j\,\omega \right| = 1 / \left| j\,\omega \right|$.

$$MdB = 20 \log M = 20 \log \left| 1/ j\,\omega \right| = 20 \log 1 - 20 \log \left| j\,\omega \right| =$$
$$= 0 - 20 \log \left| j\,\omega \right|.$$

Il modulo dipende dalla pulsazione, rispetto al caso dello zero nell'origine, cambia solo il segno, e proprio per questo l'espressione del modulo si rappresenta con una retta decrescente, passante per l'origine e con la solita pendenza di 20 dB / decade.
In pratica adesso il modulo decresce di 20 dB quando la pulsazione viene incrementata di
10 volte.

La fase φ 1/ j ω è un numero immaginario puro che scriviamo come, **j ω , e questo implica che: φ = arctang - ω/0 = - 90°,** dunque la fase è costante ed indipendente dalla pulsazione, la curva è una retta orizzontale con φ = - 90°. Si vedano i due grafici seguenti:



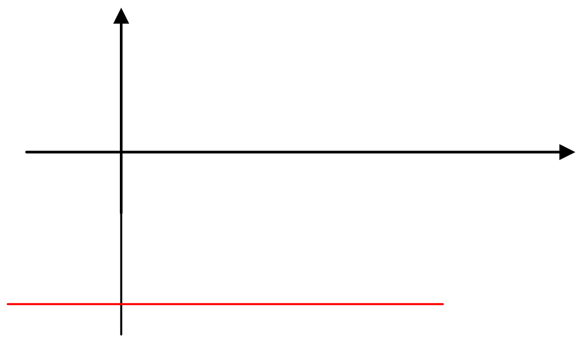


DIAGRAMMA DI BODE dell'espressione $1 / (1 + j\omega\tau)$:

Indichiamo per comodità il polo $p = -1/\tau$.

Il modulo M $M = 1/ |1 + j\omega\tau|$ da cui ne segue che:

$$M_{dB} = 20 \log M = -20 \log |1 + j\omega\tau|.$$

Il modulo come si vede dipende dalla pulsazione, la curva rappresentante l'espressione di M_{dB}, in funzione di ω, si approssima con la spezzata di figura. Si noti che:

per $\omega < 1/\tau = p$ si ha $M_{dB} = 0$,

per $\omega > 1/\tau = p$ si desume che la curva è una retta decrescente con la solita pendenza di 20 dB/decade.

La fase φ In modo analogo, nel caso dello zero, si ricava che la fase dipende dalla pulsazione, e la curva si approssima da una spezzata:

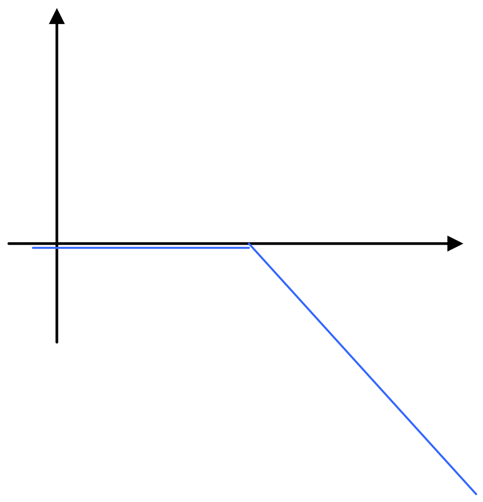
$\varphi = 0$ per $\omega < p/10$,

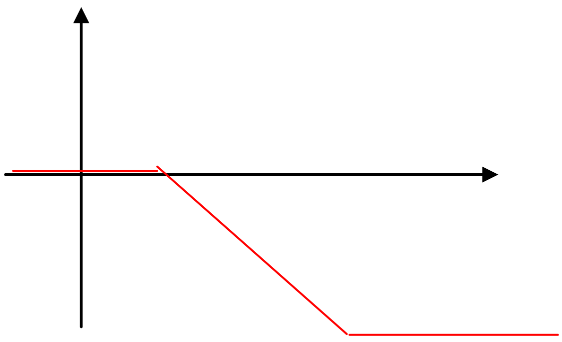
$\varphi = -90°$ per $\omega > 10\,p$, ed infine per

$p/10 < \omega < 10\,p$ la curva è una retta decrescente che va da 0° a - 90° con $\varphi = -45°$ quando $\omega = p$, ossia quando la pulsazione assume il valore di frequenza del polo.

ESEMPIO

Rappresentiamo i diagrammi di BODE di $1 / 1 + j\,0{,}01\omega$.
In questo caso si ha un polo in $p = -(-1/0{,}01) = 100$, e così il modulo risulta nullo fino a $\omega = p = 100$ rad/s, poi decresce di 20 dB ogni decade, fino a $\omega = 10\,p = 1\,000$ rad/s, dove qui avrà valore di –20 dB, mentre per $\omega = 100\,p = 10\,000$ rad/s risulterà $M_{dB} = -40$ dB.
La fase invece è nulla per $\omega < p/10 = 10$ rad/s, mentre risulterà $\varphi = -90°$ per $\omega > 10\,p = 1\,000$ rad/s, ed infine è $\varphi = -45°$ per $\omega = p = 100$ rad/s.





La f.d.t di questo esempio è quella del circuito RC visto in precedenza, in pratica abbiamo RC = τ = 0,01.
Dal diagramma del modulo vediamo che il sistema si comporta come un filtro PASSA - BASSO con pulsazione di taglio:
$\omega_L = 1/\tau = 1/RC = 100$ rad/s o frequenza di taglio,
$f_L = 1/2\pi RC = 16$ Hz.

ESEMPI.

1. **F (j ω) = 31,6 (1 + j0,01 ω) / (1 + j0,1 ω) (1 + j0,001 ω)**;
2. **F (j ω) = 316,2 / (1 + j0,1 ω) (1 + j0,001 ω)**.

Lo scopo è quello di costruire i diagrammi del modulo e della fase di questi due casi, come esercitazione a quanto detto in precedenza.
Cominciamo dalla prima equazione. Per costruire i diagrammi di Bode si procede nel valutare il modulo di tutti i componenti standard e le fasi di tutti i componenti medesimi. Poi, di ogni componente si determina il corrispondente diagramma, o del modulo o della fase e se ne realizza la composizione, in modo tale da ottenere un unico diagramma sia del modulo che della fase. Il diagramma conclusivo si può dire diagramma risultante.

1. **F (j ω) = 31,6 (1 + j0,01 ω) / (1 + j0,1 ω) (1 + j0,001 ω)**.

Componente 31,6 il cui valore espresso in dB è ottenuto come,

$$(31,6)_{dB} = 20 \log 31,6 = 30 \text{ dB}.$$

Inoltre la funzione data risulta possedere uno zero in corrispondenza di $z1 = 100$ rad / s e presenta due poli nei punti $p1 = 10$ rad/s e $p2 = 1.000$ rad/s
Infine, il guadagno statico $G0 = 31,6$. Esso si ottiene ponendo $\omega = 0$. Costruzione dei diagrammi:

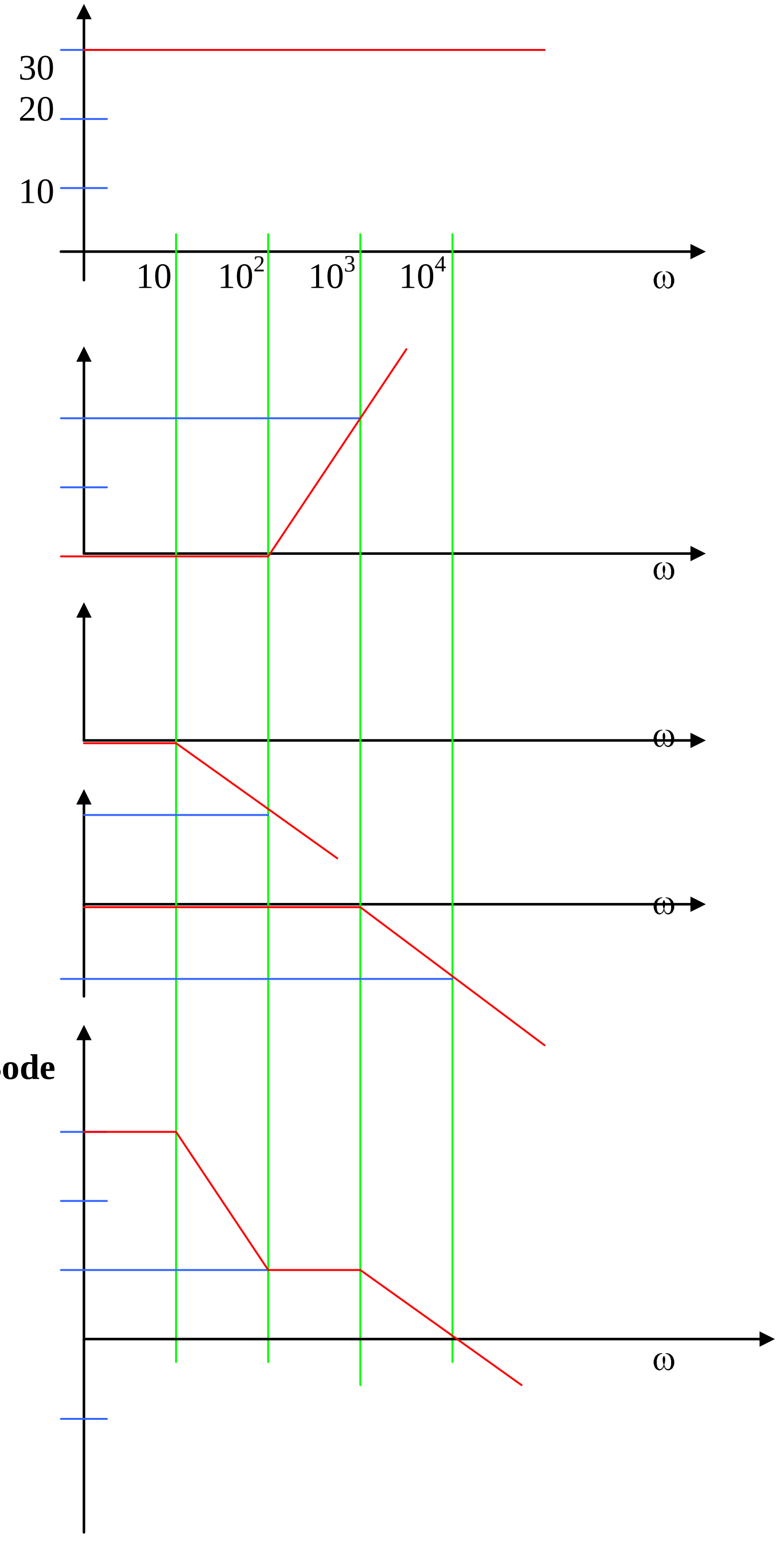


Diagramma di Bode dei MODULI
RISULTANTE

I **diagrammi delle fasi** dei vari componenti, risultano i seguenti, (in questo caso non considero il diagramma delle fasi del termine costante 31,6, in quanto essendo un termine positivo ha fase nulla per tutti i valori delle frequenze).

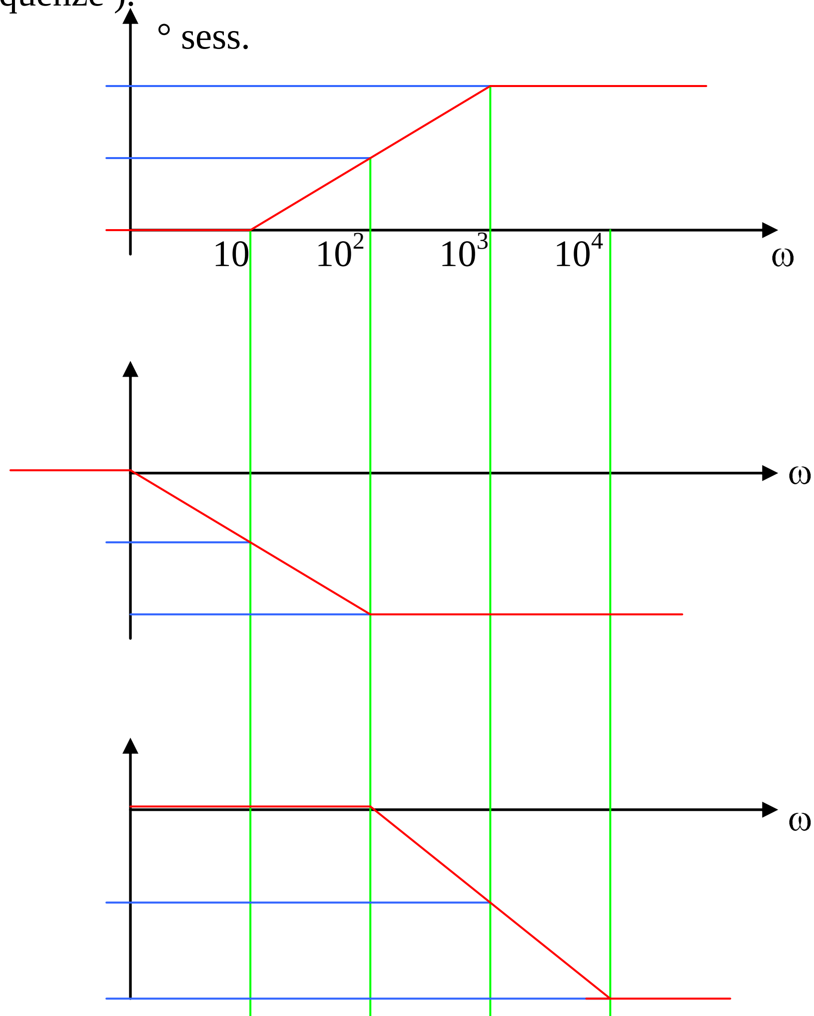
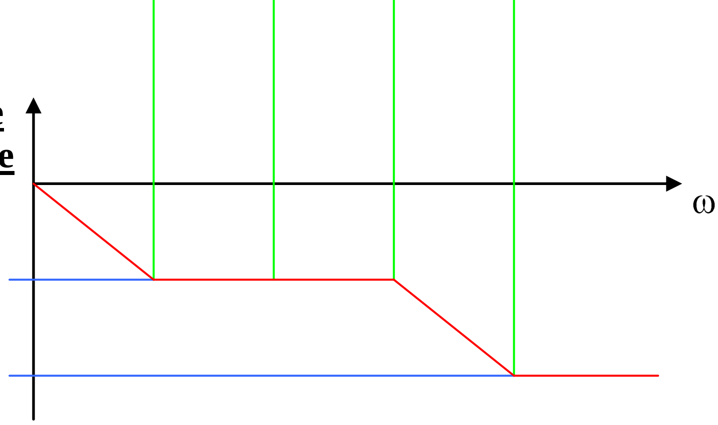
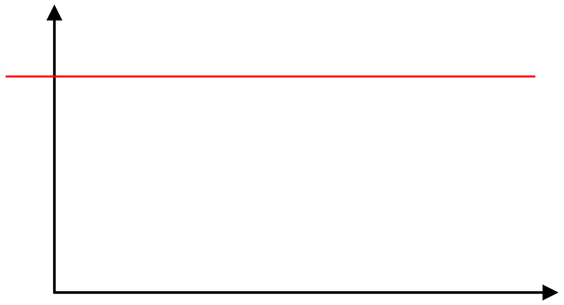
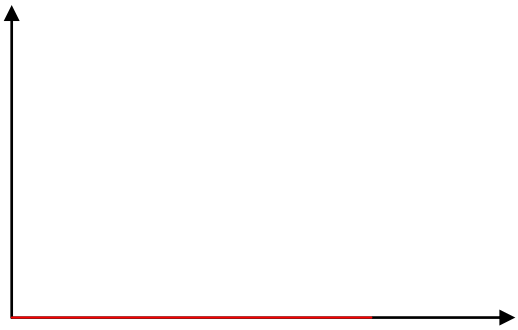
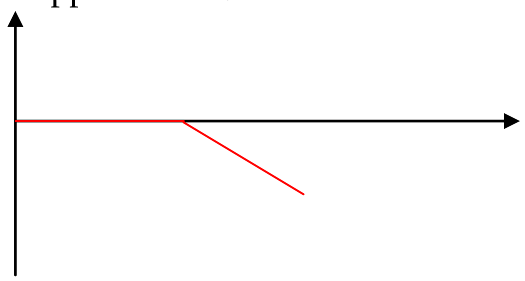
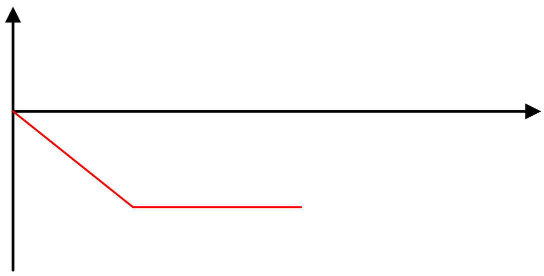
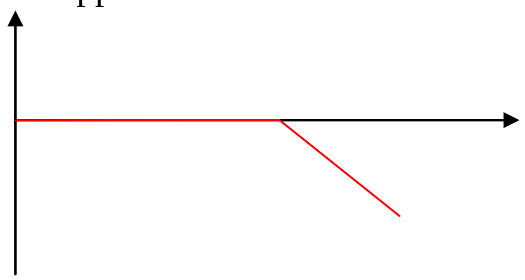
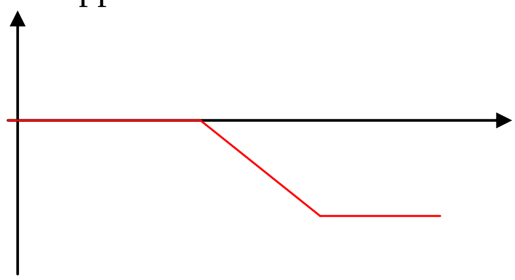
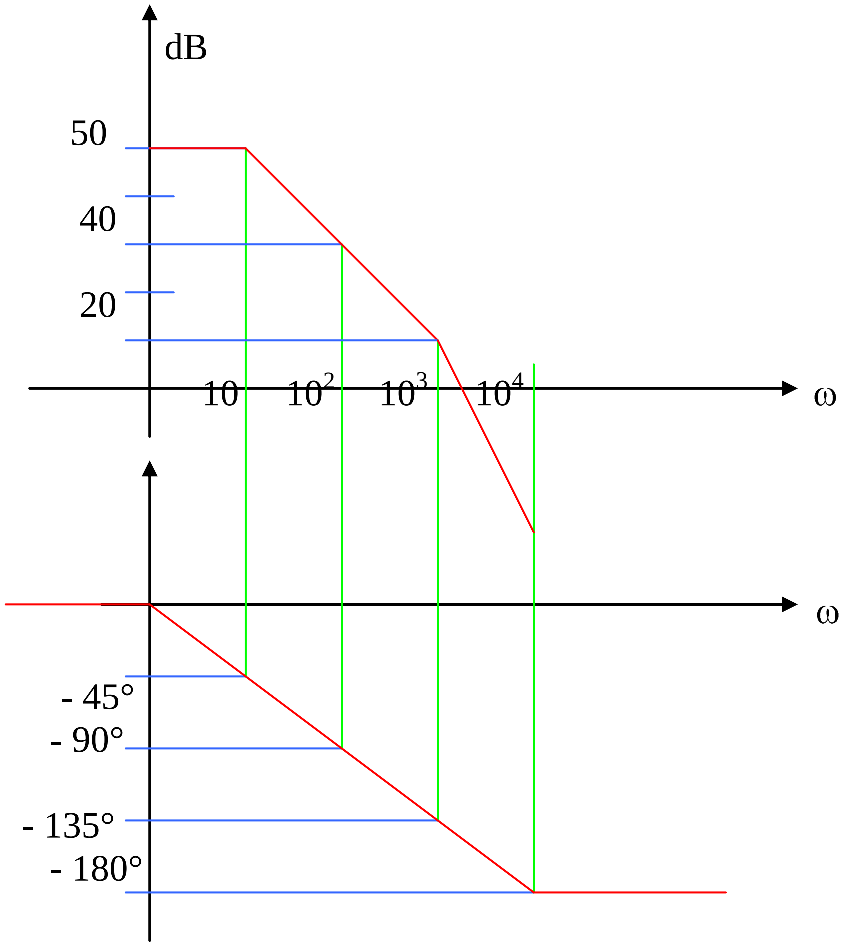


Diagramma di Bode Risultante della Fase



L'esercizio 2. **F (j ω) = 316,2 / (1 + j0,1 ω) (1 + j0,001 ω)**, risulta caratterizzato da soli due poli nei punti, rispettivamente p1 = 10 rad / s e p2 = 1.000 rad / s. Il guadagno statico in questo caso corrisponde con il valore di 316,2. Inoltre il termine costante 316,2 risulta avere un valore in dB dato da: $(316{,}2)_{dB} = 20 \log 316{,}2 = 50$ dB.

Il diagramma del modulo del componente costante, pari a 316,2, in dB è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ω passante nel punto pari a 50 dB: 	Il diagramma della fase del termine costante, positivo, pari a 316,2 è rappresentato da un valore nullo per tutti i valori delle frequenze: 
Il diagramma del modulo del componente 1 / (1 + j0,1 ω) è così rappresentato: 	Il diagramma della fase del termine 1 / (1 + j0,1 ω) è così rappresentato: 
Il diagramma del modulo del componente 1 / (1 + j0,001 ω) è così rappresentato: 	Il diagramma della fase del componente 1 / (1 + j0,001 ω) è così rappresentato: 
Nella pagina successiva sono <u>RISULTANTI</u>.	**rappresentati i diagrammi**



I due diagrammi precedenti rappresentano rispettivamente il diagramma risultante del **modulo** e della **fase** dell'esercizio 2.

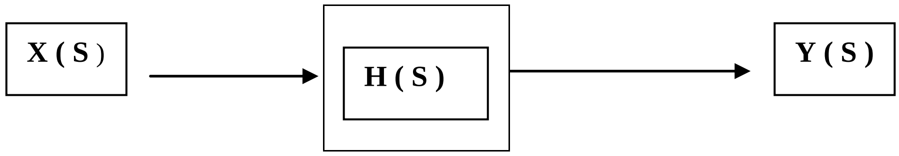
I SISTEMI DI CONTROLLO: ANALISI, CONTROLLO E REGOLAZIONE DI UN SISTEMA.

Consideriamo un sistema caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento F(S).
Noi abbiamo visto che è possibile determinare la risposta y(t), di un tale sistema a qualsiasi sollecitazione o comando x(t), conoscendo per l'appunto la funzione di trasferimento: **Y(S) = F(S) X(S)**, dove,

- la **Y(S)** è la trasformata di LAPLACE del segnale di uscita y(t);
- **F(S)** è la f.d.T;
- **X(S)** è la trasformata di LAPLACE del segnale di ingresso.

EFFETTUANDO l'antitrasformata di **Y(S)** si ricava per l'appunto la risposta y(t).

Questo studio, che consiste nel ricavare l'andamento del segnale di uscita, noto l'andamento del segnale di ingresso che lo sollecita, si dice ANALISI del SISTEMA. TUTTO questo viene così schematizzato:



Spesso nella realtà capita il problema inverso, ossia noto l'andamento dell'uscita si richiede di risalire al segnale di ingresso che ha, per l'appunto determinata detta risposta.
In questo caso si parla di CONTROLLO del SISTEMA.
Le operazioni da svolgere per ottenere detta risposta, o meglio l'andamento del segnale di uscita fornito, prende il nome di REGOLAZIONE.
Si parla di regolazione:

- ✓ A valore fisso, quando la grandezza da controllare assume un valore costante;
- ✓ A valore asservito, (o asservimento), quando la grandezza controllata varia nel tempo con un andamento noto.

Ad esempio, il caso di regolazione con valore fisso in uscita, è il caso in cui si voglia una velocità costante di un motore in C.C, oppure si voglia mantenere costante la temperatura di un ambiente o di un forno.
Nell'asservimento, non si vuole che la grandezza controllata assuma un solo valore, ma vari nel tempo secondo una legge prefissata.

REGOLAZIONE AD ANELLO APERTO

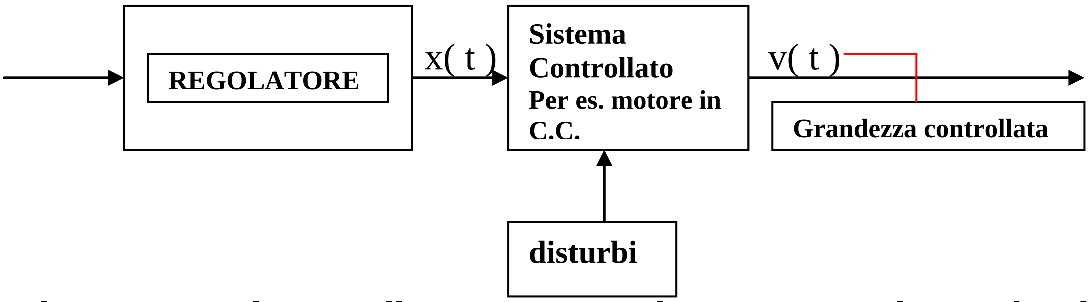
Consideriamo il problema della regolazione della velocità di un motore in corrente continua. La catena è costituita dalla figura seguente:

- ❖ Un sistema controllato;
- ❖ Un regolatore.

Il sistema controllato, o da controllare è il motore in C.C.
Come noi sappiamo è possibile modificare la velocità del motore, agendo sulla tensione di armatura. Il REGOLATORE è il dispositivo

che fornisce il valore corretto della tensione, per ottenere il valore prefissato della velocità del rotore.
Il REGOLATORE è dunque, il dispositivo di COMANDO, del sistema controllato.
Nell'esempio, del motore il segnale x(t) fornito dal regolatore, diventa la tensione di armatura del motore; in questo modo variando il segnale x(t), fornito dal regolatore, varia la velocità del motore.

La regolazione ad anello aperto si presenta nel modo seguente:



Alcuni sistemi da controllare necessitano di una potenza elevata che, il regolatore non è in grado di erogare, si ricorre allora ad un AMPLIFICATORE di POTENZA, detto **ATTUATORE**. Il suo compito è di amplificare la potenza fornita dal regolatore rendendola, così adatta a pilotare il sistema.

Ci rappresenta sempre una **CATENA APERTA**.

Il valore di x(t) è impostato dal regolatore senza sapere quanto vale la grandezza controllata. Infatti normalmente si procede, nel modo seguente:
si imposta il valore della tensione tramite il regolatore ed eventualmente, si procede alla misura diretta della velocità del motore, ossia della grandezza controllata.
In definitiva in questo tipo di controllo si effettua una regolazione, senza conoscere a priori il valore dell'uscita controllata: si parla così di **controllo ad anello aperto**.
I parametri che un controllo deve possedere sono legati:

- **alla precisione del regolatore**;

- **agli effetti dei vari disturbi sulla grandezza controllata**.

  Nell'esempio di regolazione della velocità di un motore in C.C, per ottenere una ben precisa velocità, occorre stabilire con precisione la tensione fornita dal regolatore; infatti se fosse stabilito un valore diverso, anche la velocità assumerebbe valori diversi da quelli previsti o desiderati.
  Inoltre c'è da osservare che sul SISTEMA possono agire dei segnali indesiderati, e non manipolabili, di cui non si conoscono i valori.
  Tali segnali sono per noi i DISTURBI; che possono essere:

- Additivi o riduttivi;
- Parametrali.

I **disturbi additivi , (o riduttivi),** sono segnali che si sommano, (o che si sottraggono), agli ingressi previsti, e di conseguenza alterano la il valore del segnale di uscita.
I **disturbi parametrali** sono provocati da variazioni di uno o più parametri del SISTEMA stesso.

Il controllo ad anello aperto presenta lo svantaggio che, un'eventuale variazione dell'uscita, rispetto al valore desiderato, dovuta per esempio a disturbi o alla scarsa precisione del REGOLATORE, non viene percepita all'ingresso del REGOLATORE stesso, e pertanto esso non può modificare i valori di partenza per avere il valore corretto, agente sul sistema, per ottenere la RISPOSTA desiderata.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO APERTO

Si indichino con:

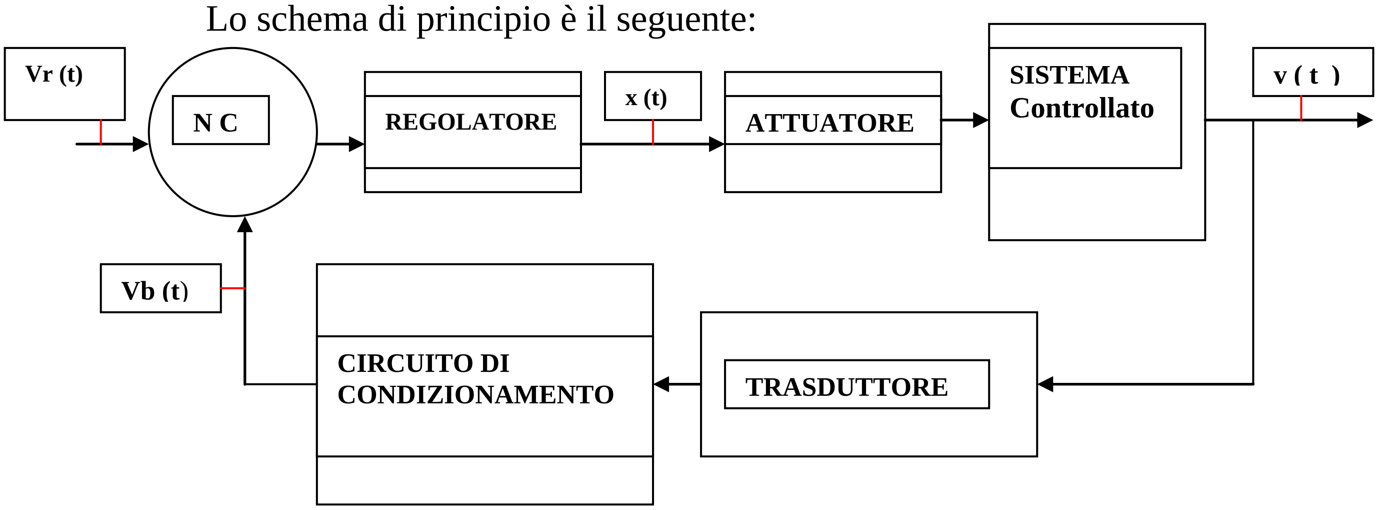
- **R(S) la f.d.T del regolatore;**
- **A(S) quella dell'eventuale amplificatore di potenza;**
- **C(S) la f.d.T del sistema controllato.**

Essendo i tre blocchi in cascata, otteniamo che la f.d.T **G(S)** del sistema di controllo ad anello aperto vale: **G(S) = R(S). A(S). C(S) .**

REGOLAZIONE ADANELLO CHIUSO

Il controllo ad anello chiuso consente di eliminare il problema dell'anello aperto che, non si accorge dell'eventuale valore sbagliato dell'uscita. Infatti nell'anello chiuso si fa in modo che il regolatore sia conoscenza del valore della grandezza di uscita. Allora, automaticamente, il regolatore potrà agire di conseguenza modificando la propria uscita, per riportare la grandezza controllata al valore desiderato.

Lo schema di principio è il seguente:



Dove Vr (t) è il segnale di riferimento, ossia il segnale elettrico che, rappresenta il valore desiderato della grandezza da controllare; Vb (t) è il segnale di uscita riportato in ingresso e rappresenta una misura della grandezza da controllare;
Ve (t) è il segnale errore e rappresenta la differenza tra il valore di riferimento e quello misurato. NC è il nodo di confronto, che effettua la differenza tra i segnali elettrici Vr(t) e Vb(t), che rappresentano rispettivamente la differenza tra il valore di riferimento e quello misurato; in uscita dal nodo abbiamo il segnale errore Ve(t):

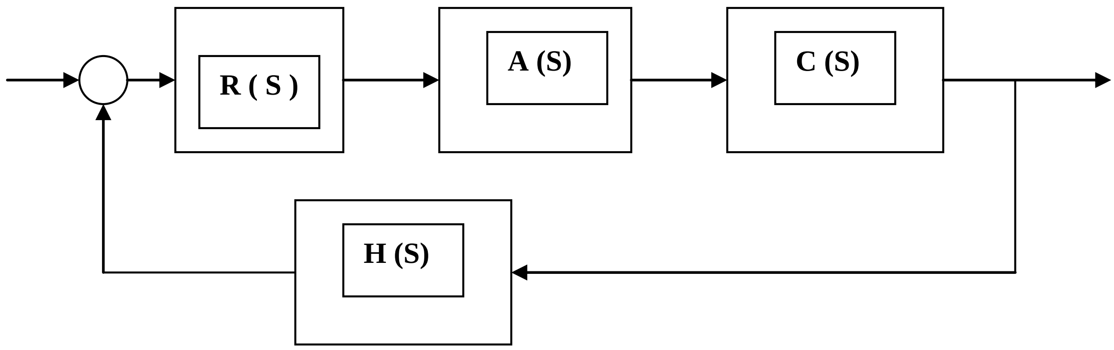
$$\mathbf{Ve(t) = Vr(t) - Vb(t).}$$

Il trasduttore effettua la conversione della grandezza fisica da controllare, ossia ad esempio una temperatura, una velocità, ecc., in un segnale elettrico proporzionale, in modo tale che possa essere confrontato con il segnale di riferimento. Il trasduttore riporta all'ingresso la grandezza di uscita introducendo così una **reazione**.
Il blocco trasduttore contiene anche i dispositivi di condizionamento del segnale, che proviene dal vero e proprio trasduttore; infatti il segnale da esso uscente può non avere le caratteristiche adatte, ad esempio in termini di ampiezza, per essere confrontato con il segnale di

riferimento, e proprio per questo nel blocco possono essere contenuti un amplificatore ed un traslatore di livello. Inoltre se il trasduttore fornisce un segnale sotto forma di corrente, si inserisce un convertitore I/V.
A questo punto possiamo descrivere il principio di funzionamento dell’anello chiuso:
il valore di uscita, ossia della grandezza da controllare, viene riportato in ingresso dal trasduttore e confrontato con il segnale di riferimento, producendo un errore che comanda il regolatore. Pertanto una variazione dell’uscita, dovuta anche ad un disturbo viene riportata in ingresso dal nodo di confronto. Dal nodo di confronto esce un segnale di errore Ve(t): **Ve(t) = Vr(t) – Vb(t).**
Proprio questo segnale errore va a pilotare il regolatore che modifica la propria uscita x(t) per riportare l’uscita al valore di riferimento.
La correzione dell’uscita avviene automaticamente, senza intervento dall’esterno, a differenza dell’anello aperto.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO CHIUSO

Il sistema di regolazione, si può così schematizzare:



lo schema ci consente di osservare, che l’anello chiuso è costituito da,

- Un regolatore con f.d.t R(S);
- Un attuatore con f.d.T A(S);
- Il sistema controllato C(S);
- Un trasduttore, con relativo circuito di condizionamento, avente f.d.T H(S).

I tre blocchi, che rappresentano un regolatore, un attuatore ed un sistema controllato, sono collegati in serie o in cascata, perciò con G(S) posso indicare la f.d.T del BLOCCO EQUIVALENTE: **G(S) = R(S) A(S) C(S)**,
proprio per questo otteniamo una struttura ad anello equivalente a quella superiore:

dove si ha che, $Vb = H(S)\ V$, $V = Ve\ G(S)$, ossia $V / G(S) = Ve$,

$Ve = Vr - Vb = Vr - H(S)\ V$

$V / G(S) = Vr - H(S)\ V$

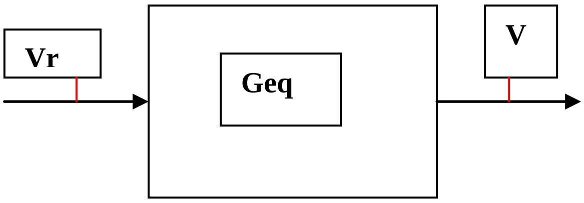
$V\ (1/GS) + H(S)\ ) = Vr$

$V\ ((1 + H(S)\ G(S) / G(S))\ ) = Vr$.

La funzione di trasferimento Geq dell'anello chiuso vale dunque:

$$\mathbf{Geq = V/Vr = G(S) / 1 + H(S)\ G(S)},$$

Al posto del sistema possiamo sostituire un blocco equivalente con f.d.T Geq, con il seguente schema:



- Della catena diretta: $G(s) = R(S)\ A(S)\ C(S)$;
- Ad anello aperto del sistema di regolazione ad anello chiuso,

$$\mathbf{G0l = G(S)\ H(S)},$$

spesso solo indicata con G(S) H(S), e OL sta per Open Loop = anello aperto, che rappresentano il rapporto della Ve rispettivamente con V e Vr:

$$\mathbf{G(S) = V/Ve}, \qquad \mathbf{Gol(S) = (Vr/Ve) - 1.}$$

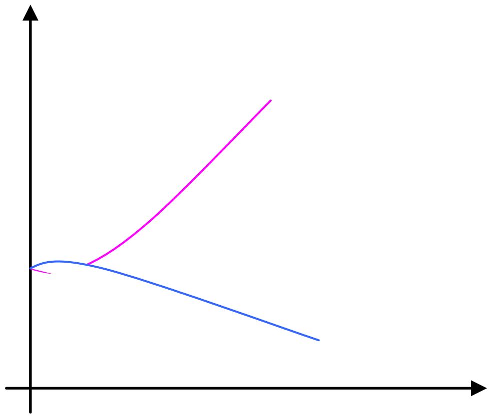
Anche nel caso di sistemi semplici il calcolo della f.d.T ad anello chiuso presenta delle difficoltà, in particolare per determinare i poli della Geq, come si vedrà.
Un altro inconveniente dell'anello chiuso riguarda la **stabilità**, che non è più assicurata a causa dell'introduzione della reazione.
Infatti sapendo che: $V = G\ (S\ ) / Ve$ $\Longrightarrow$ $V / Ve = G\ (S\ )$ e
$Vr - Vb = Ve$
$Vr = Ve + Vb = Ve + H\ (S\ )\ V = Ve + H\ (S\ )\ G\ (S\ )\ Ve$, ossia
$Vr = Ve\ (1 + H\ (S\ )\ G\ (S\ )\ )$, da cui si deduce che,

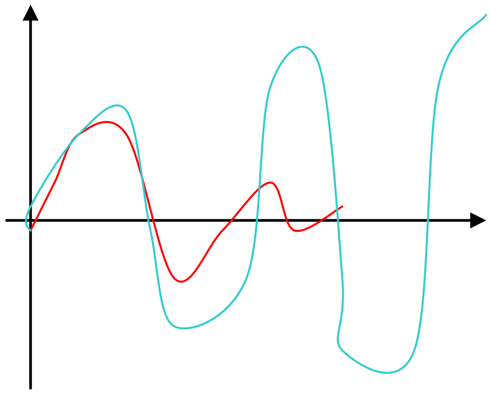
$Vr / Ve = 1 + H\ (S\ )\ G\ (S\ )$ e ciò implica che,

$(Vr / Ve) - 1 = H\ (S\ )\ G\ (S\ ) = G0l$, <u>come volevasi dimostrare</u>.

STABILITA’ DI UN SISTEMA

Un sistema si dice stabile, quando la sua risposta ad un segnale di durata limitata, in ingresso, ha anch’essa durata limitata.
In pratica una volta che l’ingresso del sistema è nullo, ossia sia cessato, l’uscita dopo un certo lasso di tempo deve anch’essa azzerarsi.
Inoltre, si è visto che la risposta, ad un segnale di ingresso qualsiasi, si compone di una risposta TRANSITORIA e di una risposta di REGIME.
La risposta di REGIME o FORZATA è dello stesso tipo del segnale di ingresso, mentre la risposta LIBERA o TRANSITORIA dipende solo dalle caratteristiche del sistema. La risposta LIBERA del sistema si ottiene considerando nulli gli ingressi.
Si capisce che un sistema è stabile quando la sua risposta libera è di tipo transitorio, ossia si annulla dopo un certo tempo.
Abbiamo anche visto che la risposta libera r_L si calcola eseguendo l’ANTITRASFORMATA di LAPLACE della funzione di trasferimento del sistema.
Si può dimostrare che tale antitrasformata è composta da una somma di funzioni del tipo:
esponenziale e^{-pt} dove p sono i poli reali della funzione di trasferimento; e del tipo
$\operatorname{sen}\omega t \cdot e^{-at}$, nel caso di poli complessi: $p = a + j\omega$.
Nelle figure sono riportati gli andamenti delle funzioni suddette:





Dagli andamenti delle due figure riportate, si osserva che la risposta libera si annulla quando i poli reali p sono negativi, oppure se i poli sono complessi, essi devono avere parte reale negativa, a < 0. Possiamo così enunciare il seguente criterio generale di stabilità.

Un sistema lineare è stabile se tutti i poli della sua funzione trasferimento hanno la parte reale NEGATIVA.

Si osserva, infine, che se un polo reale è POSITIVO o un solo polo COMPLESSO ha parte reale positiva, allora il sistema è instabile; infatti la sua risposta libera contiene un termine crescente e non si annulla più.

LA STABILITA' DEI SISTEMI AD ANELLO CHIUSO . Il CRITERIO DI BODE

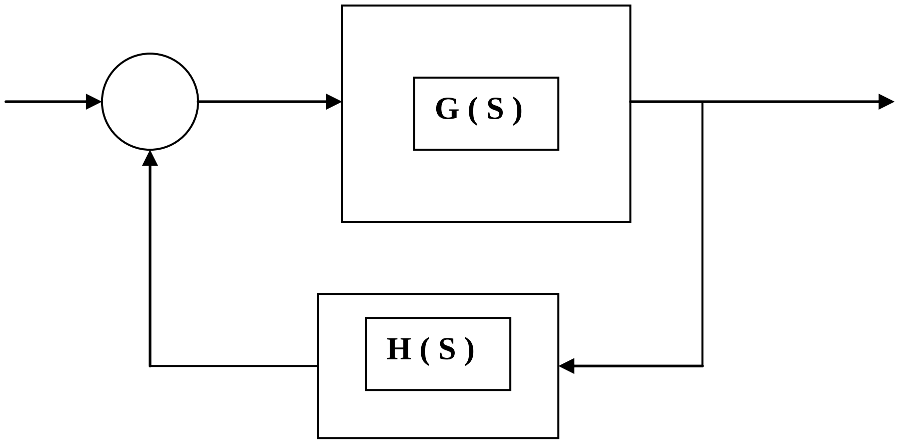
Anche in questo caso possiamo utilizzare lo stesso criterio generale della stabilità, ma generalmente il calcolo dei poli della f.d.T:

$$\mathbf{Geq\ (S) = G(S) / 1 + G(S)\,H(S),}$$

noti quelli di H(S) e G(S), è complicato. Allora si ricorre ad altri criteri.

LA REAZIONE NEGATIVA

Consideriamo il sistema rappresentato dalla figura seguente:



La reazione introdotta da H(S) si definisce:

- negativa se 1 + H(S)G(S) > 1;
- positiva se 1 + H(S)G(S) < 1.

Ad esempio, per un amplificatore G(S) = A, la reazione negativa provoca la diminuzione del guadagno; infatti la quantità A /(1 + HA) è minore di A.
In modo equivalente la reazione è positiva se il segnale di reazione Vb si somma a Vr.

Si dimostra che **la reazione negativa mantiene la stabilità del sistema, mentre quella positiva può portare all'instabilità.**

Dunque, un sistema ad anello aperto stabile, può diventare instabile, qualora lo si inserisca in un anello chiuso; questo rappresenta uno svantaggio della regolazione ad anello chiuso. L'eventuale inversione del segno di Vb è introdotta dalla catena G(S)H(S). Proprio per questo per studiare la stabilità è necessario analizzare la f.d.T ad anello aperto.

Un sistema ad anello chiuso può diventare instabile se la reazione diventa positiva, ossia se G(S)H(S) introduce un'inversione di segno, ossia uno sfasamento di 180°.
Per analizzare la stabilità di un sistema usiamo il criterio di BODE, che si riferisce ai diagrammi di ampiezza e di fase del GUADAGNO ad anello aperto, ossia la **G0l**.

Questo criterio può avere due formulazioni tra loro equivalenti, ed essi sono ottenibili dopo aver tracciato i diagrammi di BODE della FASE e del MODULO della G0l o della funzione di trasferimento ad anello aperto di un sistema in retroazione:

Condizione necessaria e sufficiente, affinché un sistema ad anello chiuso sia STABILE è: che la FASE della G0l , alla pulsazione per la quale il MODULO di G0l vale 0 dB, sia di – 180°;
<u>OPPURE:</u>
che il MODULO di G0l, alla pulsazione per la quale la FASE di G0l vale – 180°, sia minore di 0 dB.

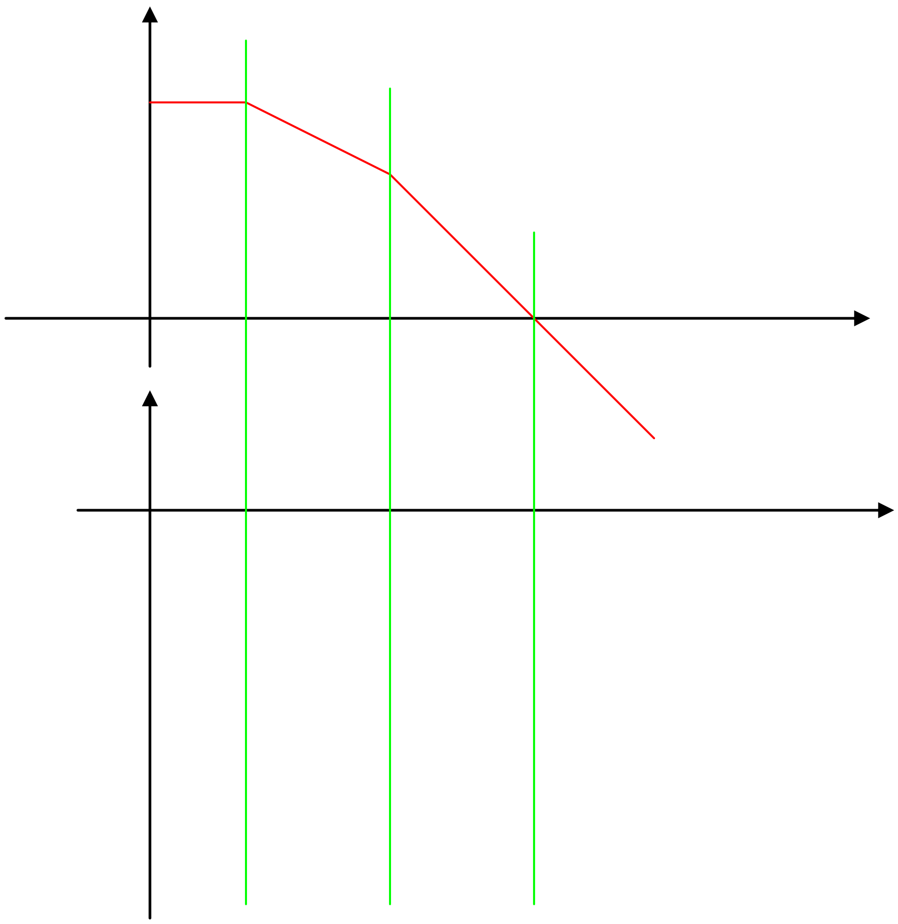
Si ricorda che $|G0l|_{dB} = 0$ dB se G0l = 1. La figura, che si vede nella pagina successiva, ci mostra, per un sistema stabile, che:

- $|G0l| = 0$ dB per $\omega = \omega 3$ e, per questa pulsazione,

  $\angle G0l = -150° > -180°$;

- $\angle G0l = -180°$ per $\omega = \omega 4$ e, per questa pulsazione,

  $|G0l| = -30$ dB < 0.



MARGINE DI AMPIEZZA E DI FASE

Un sistema è stabile se, quando G0L dB = 0 decibel, la fase G0L è maggiore di - 180°, pertanto si considera come margine di sicurezza, l'intervallo compreso tra questo valore, della fase G0L e – 180° (vedi figura).

Si definisce **margine di FASE Mf** l'intervallo seguente:

$$\mathbf{Mf = \left| -180° - \angle G0L(\,\omega 3\,) \right|}$$

Più questo intervallo è ampio, meno il sistema ha probabilità di diventare INSTABILE, si considera **<u>sufficiente un margine di 45°</u>**.

Allo stesso modo si definisce **margine di AMPIEZZA Ma** l'intervallo compreso tra l'asse a 0 dB ed il valore $|G0L|$ dB quando la sua fase $\angle G0L$ = - 180° :

$$\mathbf{Ma = \left| 0 - |G0L(\,\omega 4\,)| \right|}$$

I valori tipici dei margini di ampiezza sono compresi tra 4 e 6 decibel.

<u>Un sistema di controllo con margine di fase sufficiente ha anche un margine di ampiezza sufficiente, NON E' INVECE VERIFICATO IL CONTRARIO.</u>

IL CRITERIO DI BODE SEMPLIFICATO

E' possibile, attraverso il solo diagramma dell'**ampiezza**, del guadagno ad anello aperto, avere indicazioni sulla stabilità di un sistema ad anello chiuso.

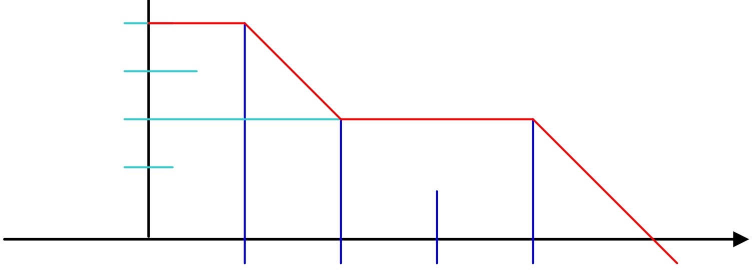
Un sistema ad anello chiuso è STABILE se il diagramma del modulo del guadagno ad anello aperto G(S) H(S) taglia l'asse delle ascisse con una pendenza massima di 20 dB/dec.
Se la pendenza è maggiore o uguale a 60 dB/dec il sistema è sicuramente INSTABILE; con una pendenza di 40 dB/dec il sistema POTREBBE ESSERE INSTABILE, e per averne la conferma è necessario applicare il criterio generale della stabilità.

A questo punto verifichiamo la stabilità di alcuni sistemi caratterizzati dalle seguenti f.d.T ad anello aperto:

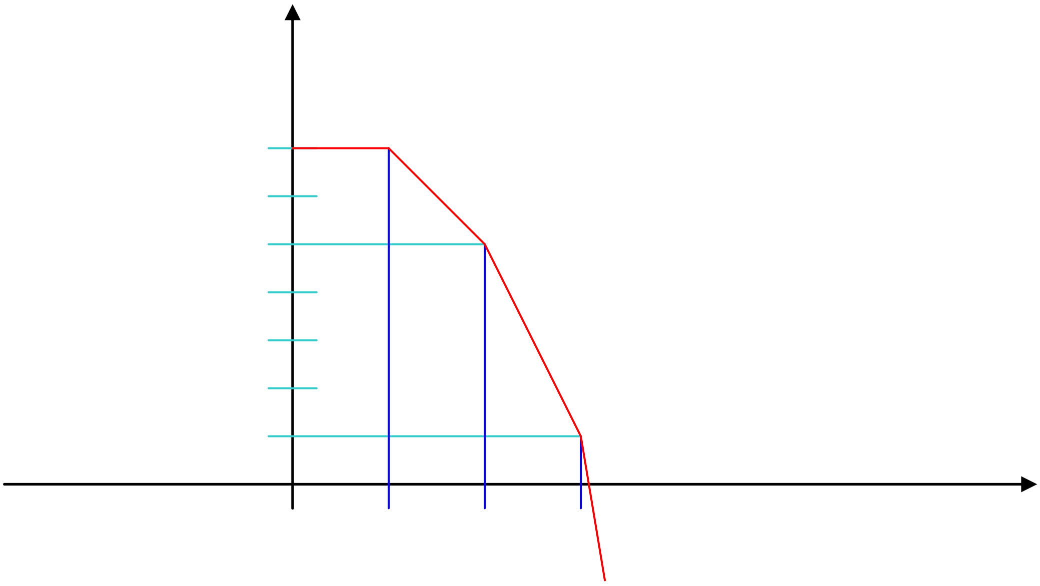
A) G(S) H(S) = 316 (1 + 0,01 S) / (1 + 0,1 S) (1+ 0,0001 S)
B) G(S) H(S) = 3.162 / (1 + 0,1 S) (1 + 0,01 S) (1+ 0,001 S)
C) G(S) H(S) = 316 / (1 + 0,1 S) (1 + 0,01 S)

A) In questo caso il guadagno ad anello aperto presenta uno zero nel punto ω = 100 rad / s e due poli p1 e p2 nei punti di frequenza, rispettivamente, p1 = 10 rad / s e p2 = 10.000 rad / s. Inoltre si deve osservare che il guadagno statico   K = 316 espresso in dB, è dato da, 20 log 316 = 50 dB. Il diagramma del modulo della G (S) H (S) ha dunque un aspetto del seguente tipo:

Come si osserva, per il Criterio semplificato di Bode, il diagramma taglia l'asse delle ω con una pendenza di 20 dB / decade, pertanto il sistema avente la G0l data è **<u>STABILE</u>**.

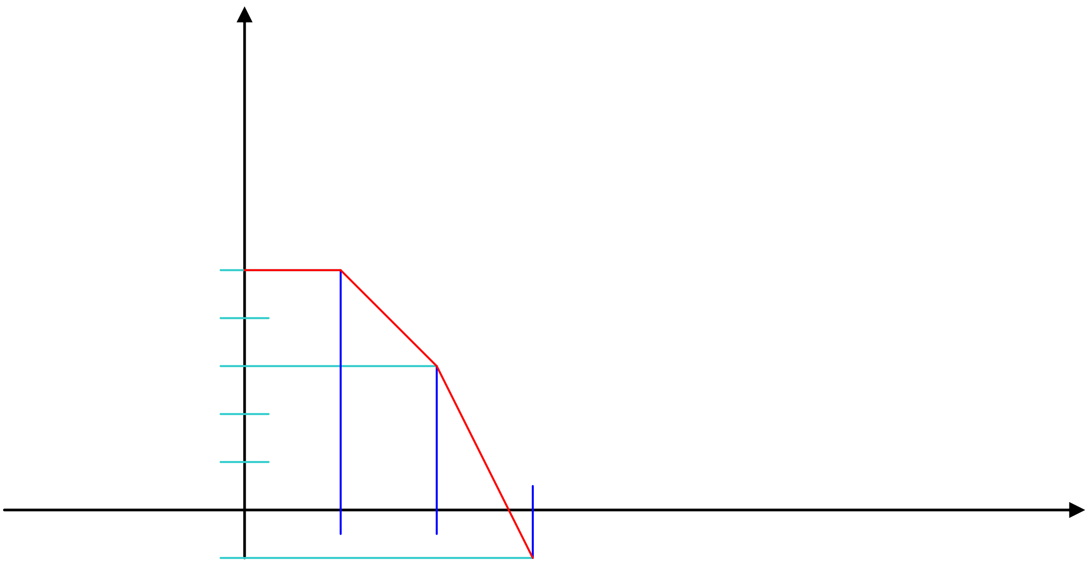


B) In questo nuovo caso il guadagno ad anello aperto presenta tre poli: p1 = 10 rad / s; p2 = 100 rad / s e p3 = 1.000 rad / s. Il guadagno statico della costante 3.162 in decibel risulta espressa dalla relazione, 20 log 3.162 = 70 dB. Il grafico del modulo della G (S) H (S) o della G0l risulta avere il seguente aspetto:



Rispetto al caso precedente il diagramma del modulo della G0l taglia l'asse delle ω con una pendenza di 60 dB / decade, pertanto per il criterio semplificato di Bode il sistema risulta certamente **INSTABILE**.

C) In quest'ultimo caso la G (S) H (S) o la G0l è caratterizzata da due Poli, il polo p1 = 10 rad / s ed il polo p2 = 100 rad / s. Il grafico del modulo della G0l assume allora il seguente aspetto, tenendo conto che la costante statica 316, in decibel, è espressa da 20 log 316 = 50 dB, come si è visto nel primo caso):



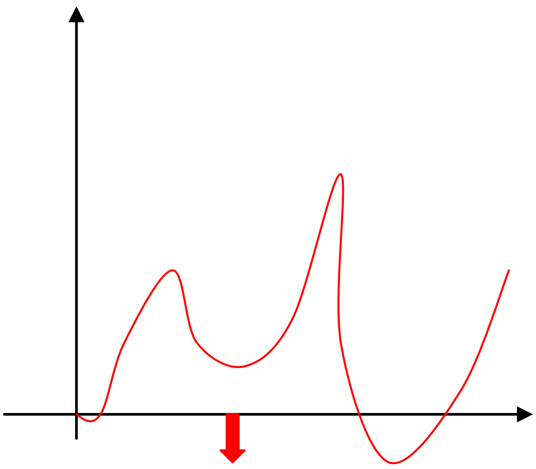
SENSORI E TRASDUTTORI

Nella tecnologia attuale la differenza fra sensore e trasduttore, è difficilmente individuabile, perché le loro funzioni tendono ad equivalersi.
Possiamo dire che i **sensori** sono le **terminazioni nervose** che, **percepiscono le varie grandezze fisiche presenti nel sistema da controllare, inteso come processo o macchinario.**
I sensori poi, devono necessariamente convertire la grandezza fisica, a cui sono sensibili, in uno stato elettrico, agendo secondo due modalità:

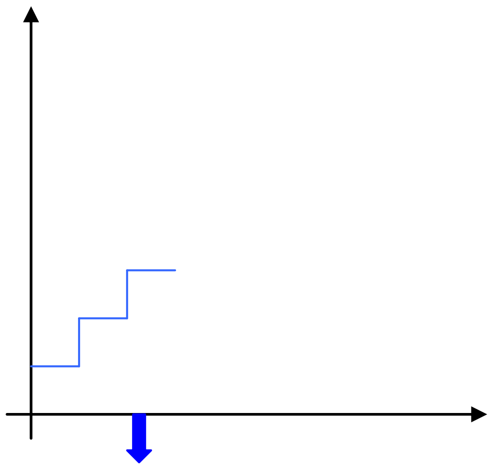
1) DIGITALE, se la grandezza viene convertita in uno stato elettrico di contatto aperto o chiuso, (on – off), oppure in un segnale discreto , (livello 0 – 1);

2) ANALOGICA, se la grandezza fisica viene convertita in uno stato elettrico, (segnale), ad essa proporzionale che, varia in modo continuo, seguendo le variazioni della grandezza fisica.

Osservazione: Le informazioni che vengono trattate da dispositivi e attrezzature possono essere analogiche o digitali. I segnali **analogici** sono variabili con continuità, come si osserva dalla figura sotto riportata, e sono caratterizzati dai seguenti parametri: FORMA, AMPIEZZA, PERIODO, FREQUENZA.

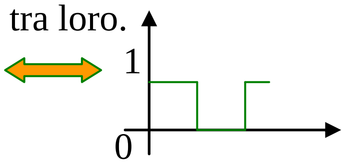


Rappresenta una forma, una ampiezza di un segnale non in frequenza e non periodico



I segnali digitali variano in in modo discreto o a scatti, con intervalli di variazione uguali tra loro.

Il tipico segnale digitale è quello **BINARIO**.



Il sensore che opera secondo le modalità analogica viene denominato **TRASDUTTORE**.
Il **trasduttore** è in grado di trasformare una grandezza fisica, velocità, pressione, temperatura, lunghezza, peso, intensità luminosa, posizione, ecc., in un segnale elettrico.
Lo schema a blocchi di un trasduttore è rappresentato in figura:

Il trasduttore impiegato nella tecnologia attuale è costituito da più **sottosistemi**:

- Il **sensore**, che è il dispositivo che possiede un parametro in grado di variare la grandezza fisica da trasdurre;
- La **parte** che ha la **funzione di elaborazione**, **di amplificazione** e di **generazione** del segnale elettrico uscente sulla base delle variazioni percepite dal sensore;
- La **sezione di alimentazione** che fornisce l'energia elettrica necessaria per il funzionamento dell'intero dispositivo.

La classificazione dei trasduttori può essere fatta in vari modi, privilegiando le caratteristiche costruttive, i principi di funzionamento, la grandezza fisica a cui sono sensibili ed altre proprietà ancora.
Una possibile suddivisione è quella che si basa sul principio di conversione della grandezza fisica da misurare, in grandezza elettrica.

Vediamo i tipi più significativi di TRASDUZIONE:

- **TRASDUZIONE ELETTROMAGNETICA**. La grandezza fisica è convertita nella tensione indotta in un conduttore, che si muove in un campo magnetico.
- **TRASDUZIONE INDUTTIVA**. La grandezza fisica è convertita nella variazione di induttanza di un avvolgimento, dovuta al movimento del nucleo di materiale ferromagnetico.
- **TRASDUZIONE CAPACITIVA**. La grandezza fisica è convertita nella variazione di capacità, dovuta al movimento di un'armatura o del dielettrico di un condensatore.

- **TRASDUZIONE RESISTIVA**. La grandezza fisica è convertita nella variazione della resistenza di un conduttore.
- **TRASDUZIONE PIEZOELETTRICA**. La grandezza fisica è convertita nella variazione di tensione dovuta alla sollecitazione meccanica di un cristallo.
- **TRASDUZIONE FOTOVOLTAICA**. La grandezza fisica è convertita nella variazione di tensione che, nasce in una giunzione di un semiconduttore, investita da un'onda luminosa di intensità variabile.
- **TRASDUZIONE TERMOELETTRICA**. La grandezza fisica è convertita nella tensione, che nasce nella giunzione di due metalli di diversa natura, mantenuti a temperatura diversa, (effetto SEEBACK).
- **TRASDUZIONE ad effetto HALL**. La grandezza fisica è convertita nella tensione provocata dall'effetto HALL, che nasce in una lastrina di un semiconduttore, percorsa da una corrente I ed immersa in un campo magnetico, con **B** perpendicolare alla lastrina stessa; la differenza di potenziale generata è proporzionale ai valori di B e di I.

Vediamo, ora, i tipi di trasduttori suddivisi per GRANDEZZA FISICA da rilevare:

Grandezza fisica	**Tipo di trasduttore**
Posizione rettilinea	• Potenziometro rettilineo • Trasduttore a ultrasuoni
Posizione angolare	• Potenziometro rotativo • Trasduttore synchro • Trasduttore resolver • Trasduttore capacità • Encoder ottico
Velocità angolare	• Dinamo tachimetrica • Encoder ottico incrementale
Pressione	• Trasduttore capacitivo • Trasduttore induttivo • Trasduttore estensimetrico
Temperatura	• Termistore • Termocoppia • Trasduttore a raggi infrarossi
Umidità	• Trasduttore a cella elettrolitica • Trasduttore capacitivo

TRASDUTTORI DI POSIZIONE

Potenziometri Sono dispositivi che non raggiungono precisioni molto elevate, ma il loro uso è molto diffuso, per la loro semplicità di costruzione. I potenziometri trasducono sia la **posizione lineare** che **angolare** nella **grandezza elettrica tensione**.
Si vedano le due figure, A e B, di riferimento:

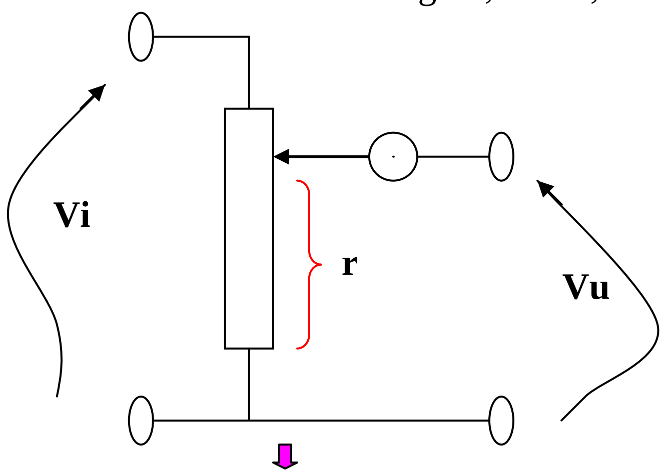


FIG. A

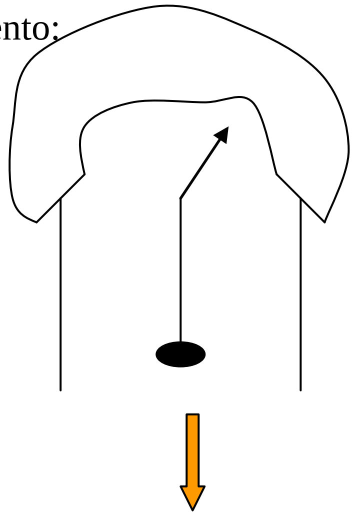


FIG. B

La figura A rappresenta un **trasduttore lineare**, la figura B un **trasduttore angolare**.
In riferimento a dette figure, applicando la tensione di ingresso **Vi** ai capi dell'elemento resistivo **R**, chiamando **r** la resistenza variabile tra il cursore ed il morsetto **U**, si ha una tensione di uscita **Vu**, che si ricava dalla seguente relazione:

$$Vu = Vi \cdot r / R$$, dove $Vi/R = I$ si ricava dalla legge di OHM.

Se l'elemento resistivo è OMOGENEO, la relazione che lega la resistenza alla posizione del cursore è di tipo lineare, ed è espressa dalla formula:

$$R = \rho L / S,$$

dove ρ è la resistività del materiale, L è la sua lunghezza ed S la sua sezione.

Trasduttore rettilineo a ultrasuoni Il trasduttore a ultrasuoni è costituito da una parte fissa Rettilineo ad (un tubo in acciaio con all'interno un tubo in ferro- nichel), e da una parte mobile, (anello scorrevole sul tubo, entro cui si trovano 4 magneti permanenti). Il campo magnetico assiale provocato dai 4 magneti permanenti si sovrappone a quello Magnetico circolare, generato da un impulso di corrente, inviato attraverso il tubo interno. Si ottiene, quindi, nella zona dell'indicatore di posizione, (anello), un campo magnetico RISULTANTE. Per effetto del fenomeno di magnetostrizione, viene a crearsi lungo il tubo in ferro e nichel un impulso ad ultrasuoni che si propaga ad una velocità di circa 2 800 m/s; l'onda si propaga verso la parte iniziale del tubo, viene recepita da un sensore che la trasforma, tramite un circuito elettronico, in segnale elettrico. Il tempo che intercorre tra la generazione dell'impulso a ultrasuoni e la ricezione da parte del sensore, è direttamente proporzionale alla distanza tra anello, (indicatore di posizione), ed il punto dove è situato il sensore. La struttura del trasduttore rettilineo a ultrasuoni è molto robusta, e quindi si adatta a impieghi molto gravosi, quali laminatoi, presse tranciatrici, impianti di fonderia, ecc. Inoltre la sua tecnologia consente di impiegarli, anche per distanze superiori ai tre metri.

TRASDUTTORE SYNCHRO E TRASDUTTORE RESOLVER

Funzionano secondo il trasformatore di tensione, variando la posizione angolare del rotore rispetto allo statore. Pertanto variando il flusso magnetico variano anche le tensioni indotte.

TRASDUTTORE ANGOLARE A CAPACITA'

Trova applicazione quando è richiesta una soluzione costruttiva particolarmente robusta. Si basa sulla variazione di capacità prodotte da un rotore a forma di placchette, solidale con l'albero di cui si vuole rilevare la posizione, che si muove rispetto a due superfici fisse, che costituiscono gli statori.

ENCODER OTTICO

Questo dispositivo basa il suo funzionamento sull'interruzione del fascio luminoso, prodotta da un corpo che lo intercetta. Un disco dotato di fori, viene collegato alla parte che di cui si vuole conoscere la posizione, in modo che il movimento rotatorio del disco e della parte, siano solidali tra loro. La sorgente luminosa è costituita generalmente da un LED; il ricevitore, eccitato dalla luce, passata attraverso il foro del disco, invia il segnale ad un contatore bidirezionale, in grado di rilevare il verso di rotazione del corpo, che conta gli impulsi che intercorrono fra la posizione iniziale e la posizione da rilevare.

Il grado di risoluzione è in relazione al numero di fori del disco.

Spesso per ottenere una maggiore precisione si adotta la soluzione di collegare l'albero in movimento, al disco forato, tramite un moltiplicatore di giri.

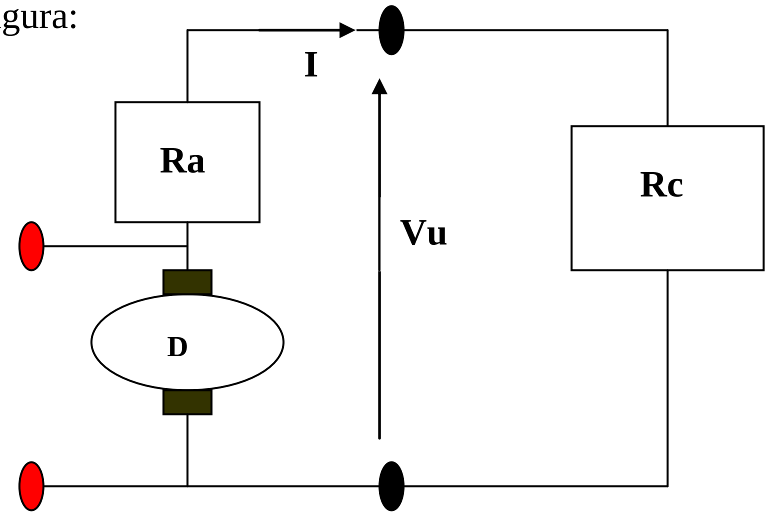
CHIARIMENTI SUL DIODO LED

Il diodo LED; (Light Emitting Diode), è un diodo emettitore di Luce. Appartiene alla categoria dei diodi a giunzione, realizzato con fosfuro di arseniuro di gallio. La caratteristica di questo composto è quella di emettere luce rossa, gialla o verde a seconda della composizione, quando la giunzione è polarizzata direttamente e di non effettuare alcuna emissione luminosa se polarizzata inversamente. Va ricordato che in un diodo a giunzione polarizzato direttamente gli elettroni passano dalla zona N alla zona P e qui si ricombinano con le lacune vicino alla giunzione; lo stesso processo avviene per le lacune che si muovono nella direzione opposta. Ad ogni ricombinazione si sviluppa energia, che generalmente si manifesta con l'aumento della temperatura. Nel fosfuro di arseniuro di gallio parte dell'energia liberata si manifesta sotto forma di luce, che viene emessa dal LED.

TRASDUTTORI DI VELOCITA' ANGOLARE

Dinamo tachimetrica

Viene installata in modo coassiale all'asse di cui si vuole rilevare la velocità. Tachimetrica significa infatti misuratrice di velocità. La dinamo è una macchina elettrica in grado di generare, una forza elettromotrice continua, proporzionale alla velocità del rotore, secondo la relazione: **E = Kd . N**, dove **N** esprime il numero di giri al minuto effettuati dall'asse. La relazione sopra riportata esprime la trasformazione della **grandezza velocità angolare** dell'asse, nel segnale elettrico **E**. La precisione del valore di **E** e quindi dell'intero dispositivo Trasduttore, dipende dalla variazione subite da **Kd** per effetto della temperatura. Quando la dinamo, poi, è attiva avviene l'erogazione della corrente **I**, come evidenziato dallo schema di figura:



Nella figura, E rappresenta la forza elettromotrice a vuoto; Ra la resistenza degli avvolgimenti; Rc la resistenza del carico; Vu la tensione di uscita ed infine, I la corrente.

La tensione **Vu** ai suoi morsetti diventa: **Vu = E – Ra . I**, e presenta una certa ondulazione. Per renderla continua si introduce nel circuito un filtro opportuno.

CHIARIMENTI SULLA DINAMO

La **dinamo** è una macchina elettrica rotante in grado di produrre corrente continua. Il suo funzionamento si basa sul principio dell'induzione elettromagnetica, cioè sulla forza elettromotrice che si manifesta ai capi di una spira metallica, posta in rotazione all'interno di un campo magnetico.
La dinamo è costituita essenzialmente da un magnete, (**induttore**), che genera il campo magnetico, con le sue espansioni polari opportunamente sagomate, in mezzo alle quali ruota un corpo cilindrico, costituito da lamierini di acciaio, sui quali è avvolto un circuito, (**indotto**), costituito da spire opportunamente collegate fra loro.
Quando l'indotto è posto in rotazione, ogni spira è attraversata da un flusso magnetico variabile e quindi diventa sede di una forza elettromotrice indotta. Il flusso magnetico è prodotto dagli avvolgimenti di eccitazione disposti nelle espansioni polari, (**poli**). La corrente di eccitazione può essere fornita da una sorgente esterna, di corrente continua, nel qual caso si ha il funzionamento **ad eccitazione indipendente** oppure dallo stesso indotto e si ha quindi il caso di **auto eccitazione**.

Encoder ottico incrementale

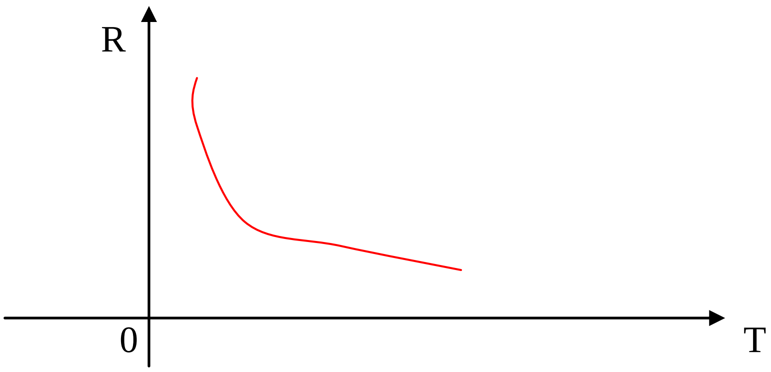
E' analogo alla dinamo tachimetrica con la differenza che in questo caso, l'apparecchiatura di controllo, conta gli impulsi per un determinato periodo, e divide il risultato ottenuto per il numero di tacche presenti sul disco dell'encoder, ottenendo il valore della velocità di rotazione del disco e quindi dell'albero in giri al minuto. Si chiama **incrementale,** perché il metodo di riferimento non si basa su un punto fisso, invariabile, ma sul punto definito dall'ultima rilevazione effettuata.

TRASDUTTORI DI PRESSIONE

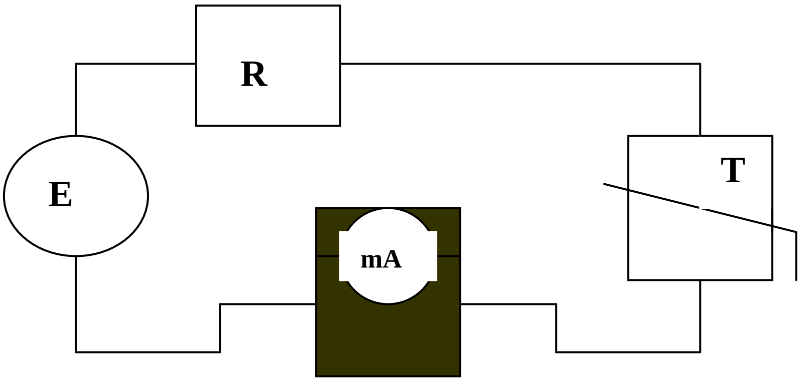
Tutti i dispositivi di questo tipo contengono un elemento elastico in grado di rilevare una forza per unità di superficie, (pressione).
Questo elemento elastico, nel caso dei **trasduttori di pressione capacitivi**, è una delle due armature del condensatore; i **trasduttori di pressione induttivi**, invece, si basano sulla variazione della riluttanza magnetica che, si ottiene collegando il centro dell'elemento elastico, con il nucleo mobile di una bobina.
I **trasduttori di pressione estensimetrici** sono i più usati e si basano su tecnologie a semiconduttore, che garantiscono notevole sensibilità ed elevata precisione.

TRASDUTTORI DI TEMPERATURA

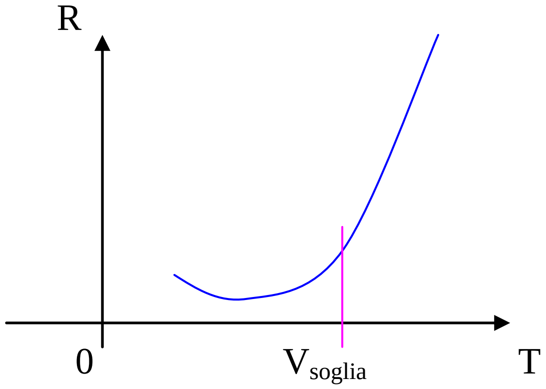
Termistori Derivano da **thermic resistor**; (resistore termico), e sono dispositivi a semiconduttore, la cui resistenza varia notevolmente con la temperatura.
Vengono utilizzati per il rilievo della temperatura in varie situazioni, perché possono essere riscaldati sia dall'ambiente esterno che internamente dalla corrente che li attraversa.
Il tipo **NTC** (**Negative Temperature Coefficient**), a coefficiente termico negativo è quello più utilizzato. La resistenza diminuisce con l'aumentare della temperatura, come si osserva dalla figura:



Vengono realizzati con ossidi di nichel, manganese ed altri elementi che assumono, dopo i vari trattamenti, un aspetto ceramico. Il suo funzionamento si può illustrare con il circuito di figura, che è un semplice circuito di un termometro elettronico che, impiega un termistore:



Nella figura stessa E indica un alimentatore in continua e T indica un termistore.
Le variazioni di temperatura producono variazioni della resistenza del termistore, e quindi, della corrente che lo attraversa. Queste variazioni di corrente sono segnalate dal milliamperometro. E' sufficiente tarare lo strumento in temperatura, per ottenere la misurazione della temperatura dell'ambiente.
Nel tipo **PTC**, (**Positive Temperature Coefficient**), a coefficiente termico positivo, la resistenza aumenta rapidamente, superato un dato valore di temperatura.
Proprio per questa ragione essi vengono quasi esclusivamente impiegati a protezione di quei circuiti o dispositivi, che se attraversati da correnti estremamente elevate li possono danneggiare irreparabilmente.



TERMOCOPPIA Se due conduttori metallici, diversi fra loro, vengono saldati ad una estremità, che costituisce il cosiddetto **giunto caldo**, agli altri due capi liberi, che costituiscono il **giunto freddo**, vi è la presenza di una differenza di potenziale.
Il valore di questa differenza di potenziale è dell'ordine dei millivolt e dipende sia dai tipi di metallo posti a contatto, sia dalla differenza di temperatura tra le giunzioni.

Con le termocoppie si può misurare la temperatura di un punto rispetto all'altro, ponendo il giunto caldo in un punto Tn ed il giunto freddo in un punto di riferimento Ta. Per ottenere un valore di misura attendibile è necessario che, la temperatura del giunto freddo Ta resti costante, proprio per questo il giunto freddo viene inserito in un ambiente controllato da un termostato.

TRASDUTTORI A RAGGI INFRAROSSI Tutti i corpi a temperatura superiore allo zero assoluto, emettono delle radiazioni nel campo della frequenza dell'infrarosso, e quindi energia. Per misurare detta energia si usa il **termometro a radiazione**, che è un dispositivo elettronico in grado di trasformare i **fotoni**, (ossia le particelle elementari della luce), emessi da un corpo caldo in un segnale elettrico.

TRASDUTTORI di UMIDITA'

I dispositivi classici per misurare l'umidità dell'aria, utilizzavano come elemento sensibile un piccolo fascio di capelli. Attualmente vengono usati igrometri di tipo elettronico che si basano sulla variazione di una resistenza o di una capacità. Ricordiamo che le misure igrometriche da misurare sono:

- l'**umidità assoluta**, che è definita dal numero di grammi di vapore acqueo per metro cubo d'aria;
- l'**umidità relativa**, che è definita dal rapporto tra la quantità di vapore acqueo contenuto in una data massa d'aria e la quantità necessaria per raggiungere la saturazione.

Trasduttore a cella elettrolitica

E' di tipo resistivo ed è costituito da una cella elettrolitica collegata a due avvolgimenti di metallo nobile, ricoperti da una pellicola igroscopica, cioè capace di assorbire l'umidità dell'aria. In questa cella, piccole variazioni del valore di umidità relativa, vengono tradotte in altrettante variazioni della resistenza elettrica. La precisione di questo trasduttore è dell'ordine del ± 1,5 % ed il tempo di risposta è di qualche secondo.

Trasduttore Capacitivo

E' in grado di rilevare la variazione della costante dielettrica
di un materiale igroscopico, compreso fra due elettrodi, in genere di oro. E' quindi possibile correlare la variazione di umidità con la variazione di capacità.

PER CONCLUDERE ALCUNI ESERCIZI

ESERCIZIO 1.
Un potenziometro rettilineo , con una corsa di 4 cm, viene alimentato con una tensione di 10 Volt. Determinare lo spostamento corrispondente ad una rilevazione di tensione pari a 2,5 Volt.

Ricordando che $\Delta l = (Vu / Va) . l_{max}$ dove l_{max} rappresenta la corsa massima che può effettuare il cursore del potenziometro e tenendo conto che Vu è la tensione misurabile in uscita e Va è la tensione di alimentazione del potenziometro stesso, si ottiene che:
$\Delta l = Vu / Va. l_{max} = (2,5 / 10)\ . 4 = 1$ cm = 0,01 metri.

ESERCIZIO 2.
Il costruttore di una dinamo tachimetrica fornisce per Kd, costante della dinamo, il valore di 0,2 V / giri . minuto. Si determini il valore della E nel caso in cui la velocità sia N1 = 24 giri . minuto; N2 = 18 giri . minuto ed N3 = 54 giri . minuto.

Tenendo conto di quanto espresso precedentemente, noi sappiamo che:
E = Kd . N, da cui si ottiene,

E1 = Kd . N1 = 0,2 . 24 = 48 Volt; infatti

(V / Giri ~~minuto~~) . Giri ~~minuto~~ = Volt.

Inoltre sarà che:
E2 = Kd . N2 = 0,2 . 18 = 3,6 Volt;
E3 = Kd . N3 = 0,2 . 54 = 10,8 Volt.

ESERCIZIO 3.

Si prenda in esame un encoder dotato di 40 aperture. Il disco viene fatto ruotare a velocità elevate, nell'intervallo che va da 10.000 a 30.000 giri al minuto. Si devono determinare i valori di frequenza minima e massima relativi al segnale in uscita.

La frequenza del segnale di uscita di un encoder è funzione della velocità di rotazione ω, e del numero N di aperture del disco, secondo la seguente relazione: $f = (\omega N) / 60$.

Nel nostro caso risulta che:

per ω = 10.000 si ha f_{max} = 10.000 . 40 / 60 = 6.666 Hz = 6,666 kHz;

per ω = 30.000 si ha f_{max} = 30.000 . 40 / 60 = 20.000 Hz = 20 kHz.

ANCORA SULL'INFLUENZA DEL GUADAGNO DELLA CATENA DIRETTA, SULLA STABILTA' DEL SISTEMA.

Consideriamo il caso C) visto in precedenza. In quel caso si è detto, per il criterio semplificato di Bode, che il sistema ha una stabilità dubbia, in quanto l'asse delle pulsazioni viene tagliato, dal diagramma del modulo della G0l con una pendenza di 40 dB / decade.

E' possibile migliorare la stabilità o rendere stabile tale sistema ?

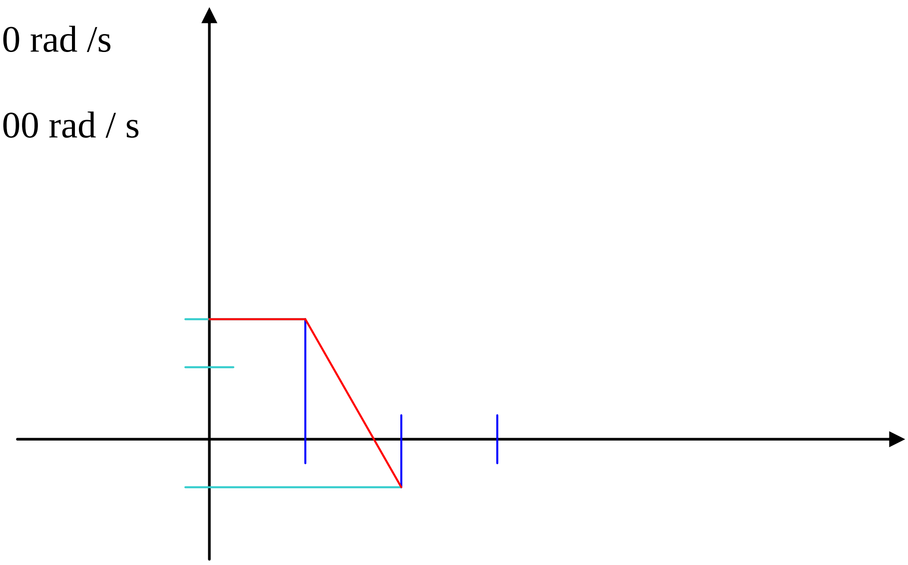
Un miglioramento è osservabile se si riuscisse a modificare il valore della costante statica del sistema stesso. Ciò dimostra, quanto influenza il guadagno della catena diretta, la stabilità del sistema stesso. Proprio per questa ragione ipotizziamo che l'amplificazione della catena diretta sia minore; infatti ammettiamo che, per esempio:

$$G(S)\,H(S) = 5{,}62 \,/\, (1 + 0{,}1S)\,(1 + 0{,}01S).$$

Ora, la curva del MODULO di G(S) H(S) ha il seguente andamento:
(l'esempio rappresenta sempre il caso C), dove in questo caso si ammette che il guadagno statico della catena aperta sia diminuito dal valore di 316 al valore 5,62. In questo caso cambia l'espressione in decibel della costante; infatti si ha che: 20 log 5,62 = 15 dB.)

p1 = 10 rad /s

p2 = 100 rad / s

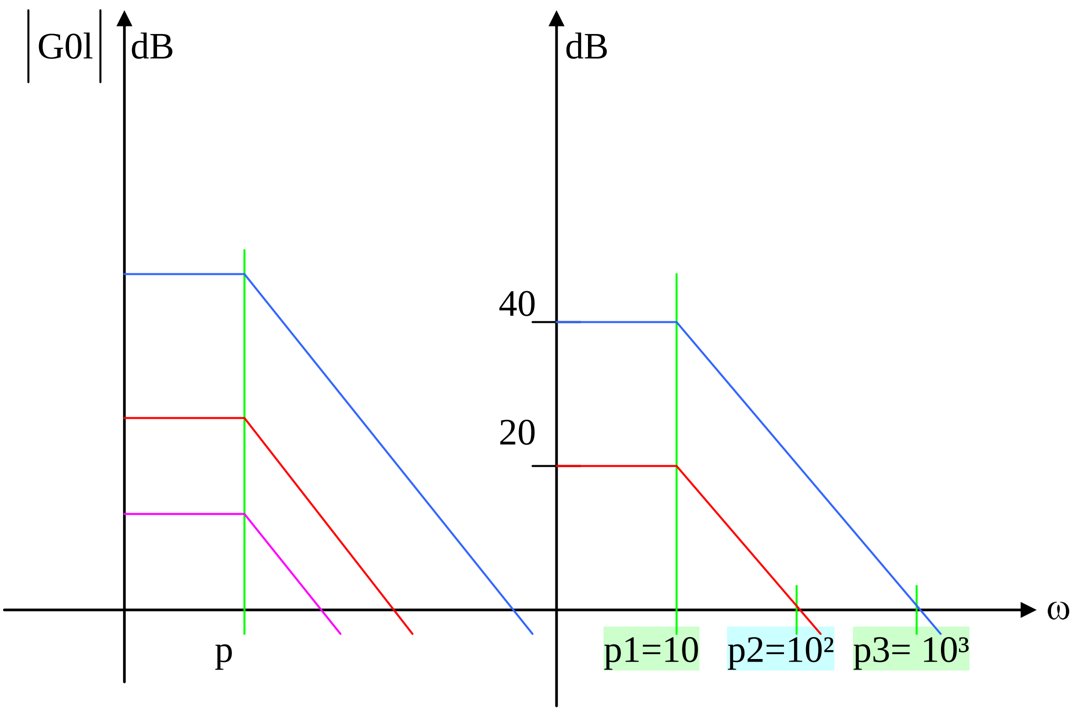


Il sistema avente ora la G (S) H (S) data, o la G0l indicata, risulta per il criterio semplificato di Bode, **STABILE**, poiché l'asse delle ω è tagliato con una pendenza di 20 dB / dec. Tutto ciò mostra l'influenza sopra detta, ma mette in luce il fatto che operando opportunamente è possibile migliorare, se non addirittura creare, la stabilità dei sistemi in retroazione. Si osserva dunque che, in genere, all'aumentare dell'amplificazione della catena diretta il sistema rischia di andare in INSTABILITA'. Anche il sistema con il guadagno ad anello aperto del **caso B)**, può essere riportato in condizioni di stabilità diminuendo

l'amplificazione, oppure operando, come si vedrà con opportune **reti correttrici o reti di correzione**.
Si deve tenere presente che, oltre all'amplificazione K della catena diretta, la stabilità è legata, anche, al numero dei poli della G(S) H(S) e della loro posizione reciproca. Ogni polo incrementa ulteriormente la pendenza di 20 dB/decade, e perciò all'aumentare del numero dei poli cresce il rischio di INSTABILITA'. Per esempio se G(S) H(S) presenta un solo polo non si hanno problemi di stabilità; infatti la pendenza è di 20 dB/dec., e l'attraversamento dell'asse avviene sicuramente con questa pendenza, e indipendentemente da K.
Nel caso di due poli consecutivi, la stabilità è legata all'amplificazione K e alla loro posizione reciproca:

$$G(S)\,H(S) = K / (1 + S/p1)\,(1 + S/p2).$$

Più i poli p1 e p2 sono distanti e maggiore può essere l'amplificazione senza rischiare l'instabilità. Ad esempio per p1 = 10 dB, e p2 = 100 dB, l'amplificazione può essere al massimo di K dB = 20 dB, in modo tale che quando, dopo una decade, arriva il nuovo polo, che incrementerebbe la pendenza fino a 40 dB, l'attraversamento sia già avvenuto.
Invece se p2 = 1000 rad/s, ossia se dista due decadi dal primo polo, la diminuzione del modulo, della catena aperta o diretta, è di 40 dB, e di conseguenza si può aumentare il valore dell'amplificazione fino a 40 dB. Si vedano i grafici di riferimento:

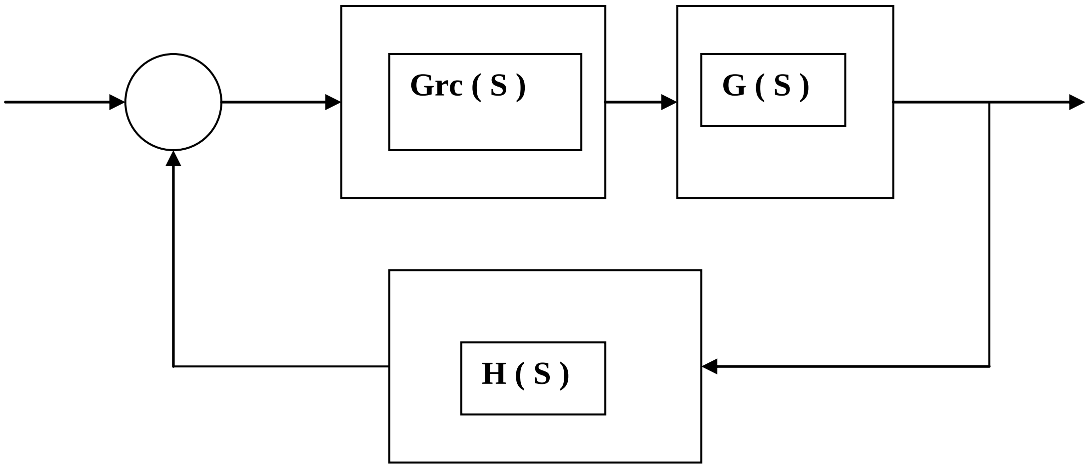


CENNO SULLE RETI DI COMPENSAZIONE

Per rendere **stabili** i sistemi INSTABILI o AUMENTARE i MARGINI di AMPIEZZA e di FASE di quelli **stabili** o **per migliorare la loro stabilità si inseriscono delle RETI di COMPENSAZIONE** o **CORRETTRICI**.

D) **Come sono inserite all'interno di un sistema ad anello chiuso ?**

R) Ciò viene chiarito osservando lo schema grafico di figura:



Grc(S) è la f.d.T della rete correttrice, così che abbiamo il nuovo guadagno ad anello aperto: **Grc(S) G(S) H(S)**
da analizzare per studiare la stabilità.
Le reti di compensazione possono essere:

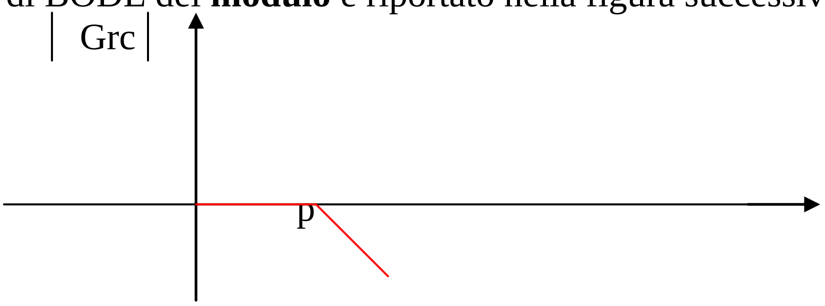
- a polo dominante;
- ritardatrici;
- anticipatrici.

RETE A POLO DOMINANTE

La rete comprende un solo polo p a frequenza molto più bassa, rispetto a quella dei poli presenti nella G(S) H(S). La sua f.d.T può essere scritta, come:

$$Grc(S) = 1 / 1 + S/p.$$

Il diagramma di BODE del **modulo** è riportato nella figura successiva:

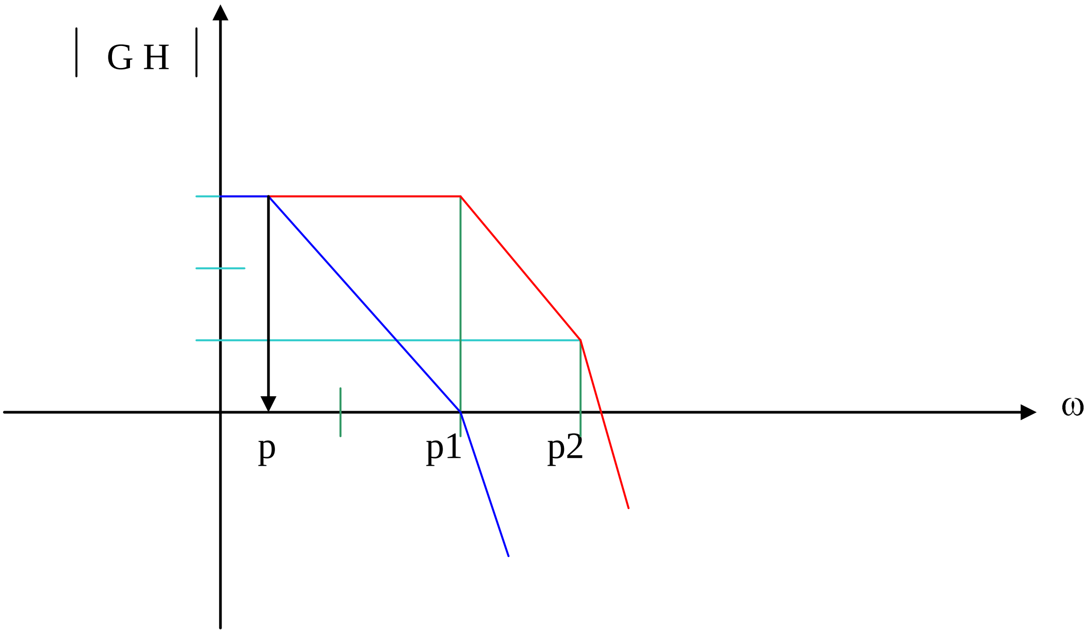


La scelta del polo deve essere effettuata in modo che l'attraversamento dell'asse delle ascisse, del diagramma di BODE del **modulo** di

Grc(S) G(S) H(S), avvenga per la pulsazione corrispondente al primo polo della G(S) H(S); in questo modo la pendenza è sicuramente di 20 dB / dec., e dunque il **sistema è stabile**.
Si veda l'esempio di figura, legata alla G0l seguente:

G 0l = G (S) H (S) = 31,6 / (1 + 0,01 S) (1 + 0,001 S).

I due poli si hanno per p1 = 100 rad / s e p2 = 1.000 rad / s. L'andamento del modulo è riportato, nel diagramma, come figura I.
Per ottenere il polo della rete correttrice, partiamo graficamente dal polo p1, con una retta avente una pendenza di 20 dB / dec. L'intersezione con la curva I ci consente di ottenere il valore del polo p delle rete correttrice a polo dominante; (infatti il polo p ricavato per via grafica, risulta il polo che domina tutti gli altri). La curva II mette in rilievo l'azione della rete correttrice indicata per stabilizzare il sistema dato. Con la presenza della rete correttrice si deve tenere conto che la funzione di trasferimento ad anello aperto si trasforma nel seguente prodotto: **G0l'(S) = Grc(S) . G0l (S) = Grc (S) G (S) H (S)**.
<u>Osservazione</u>: 20 log 31,6 = 30 dB.



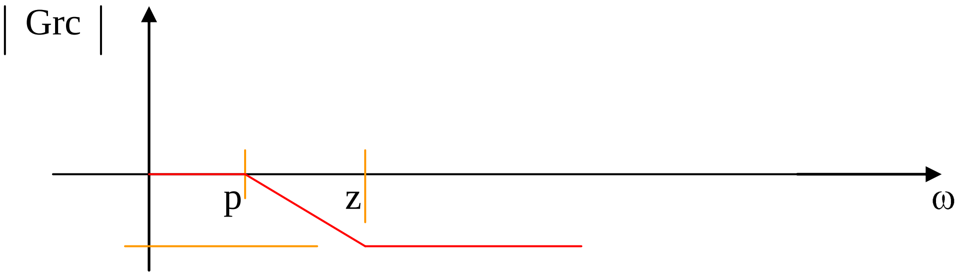
L'inserimento della rete correttrice a polo dominante, ha però uno svantaggio, ossia riduce notevolmente la pulsazione per la quale il modulo della **Grc (S) G (S) H (S)** risulta uguale a 0 dB. Detta pulsazione si dice pulsazione di **<u>cross over</u>**. La riduzione della pulsazione di **<u>cross over</u>** comporta anche una diminuzione della **banda passante**.

LA RETE RITARDATRICE

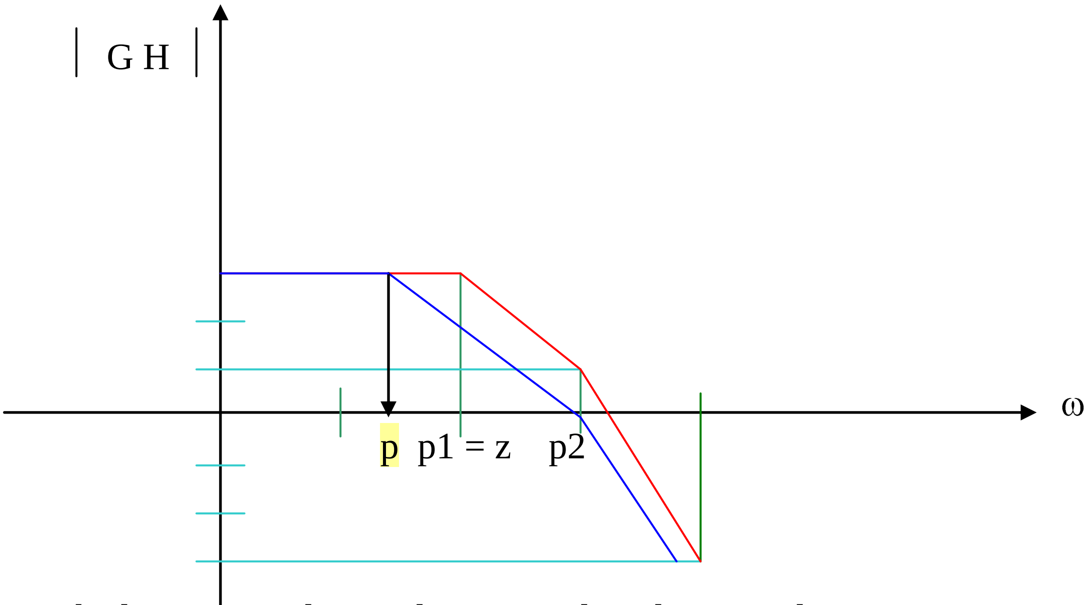
Questa rete presenta **un polo p e uno zero z**, con **p < z** :

$$\mathbf{Grc(S) = (1+ S/z) / (1+ S/p).}$$

Il diagramma di BODE del modulo è riportato in figura:



La scelta dei valori del polo e dello zero deve essere effettuata secondo questo criterio.
Lo **zero z della Grc(S)** deve essere pari, al massimo, al valore del primo polo p1, con
p1 < z < p2, della G(S) H(S), mentre il polo p deve avere un valore tale che, il modulo della Grc(S) G(S) H(S) abbia valore di 0 dB alla pulsazione del secondo polo p2 di G(S) H(S). Si consideri il seguente esempio:



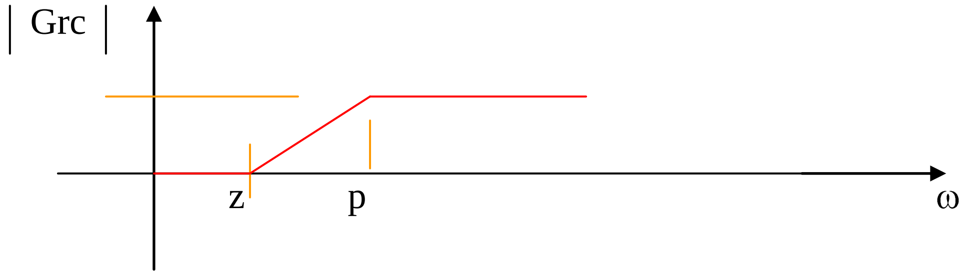
Anche la rete ritardatrice diminuisce la pulsazione di **cross over**, ma in maniera molto minore rispetto a quella della rete a polo dominante.

LA RETE ANTICIPATRICE

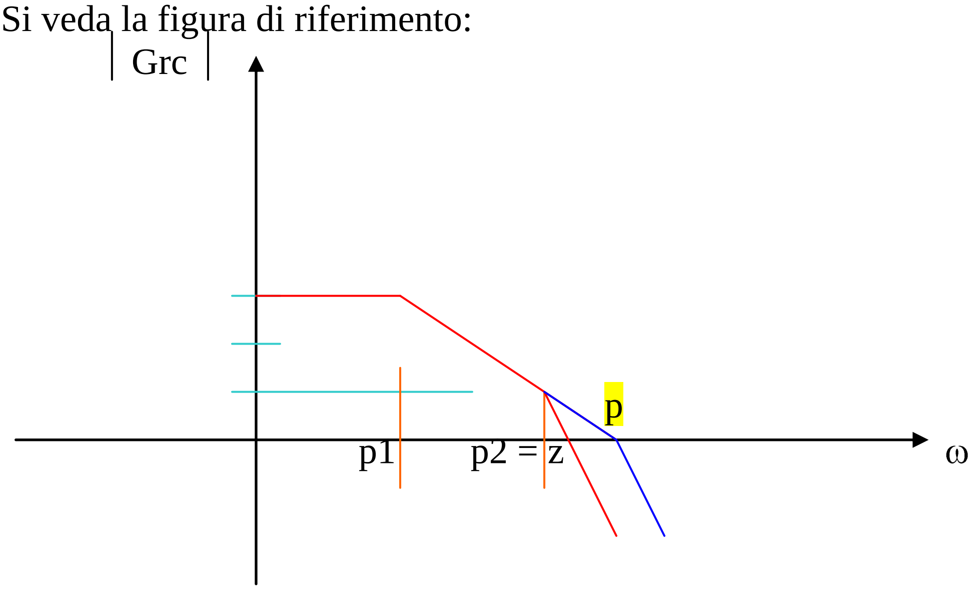
Questa rete presenta sempre **un polo p e uno zero z**, ma con p > z :

$$Grc\,(S) = (1 + S/z) / (1 + S/p).$$

Il diagramma di BODE del modulo è riportato in figura:



La figura riporta un esempio di compensazione di questo tipo.
Lo zero z della Grc(S) è pari al secondo polo p2 di G(S) H(S); per il polo p deve essere tale che il modulo di Grc(S) G(S) H(S) sia di valore pari a 0 dB , e determina l'intersezione della curva con l'asse delle ascisse con un tratto a pendenza di 20 dB.
Si veda la figura di riferimento:



La rete anticipatrice presenta il vantaggio di **aumentare la pulsazione** di **cross over**.

VELOCITA' DI RISPOSTA

Nel progetto di un sistema di controllo ad anello chiuso occorre tenere conto oltre che dalla stabilità, di altri due parametri, la **velocità di risposta** e la **precisione**.

La velocità di risposta di un sistema rappresenta la velocità con la quale si estingue la fase transitoria e rimane solo la risposta forzata.

La precisione rappresenta la capacità di un sistema di produrre una risposta più vicina possibile a quella desiderata. La precisione di un sistema è evidenziata dall'errore permanente o a regime, definito come differenza fra il segnale desiderato Vr (t) e quello fornito Vu (t), esaurita la fase transitoria, e quando in ingresso vengono forniti i segnali tipici:

- gradino;
- rampa;
- parabola.

Inoltre per quanto detto si ha che: **e (t) = Vr (t) – Vu (t)**.

A seconda del segnale fornito in ingresso l'errore si distingue in:

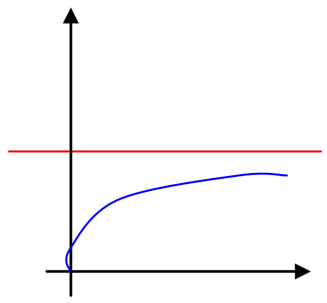
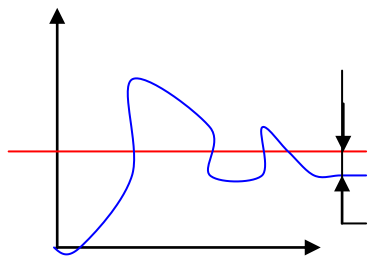
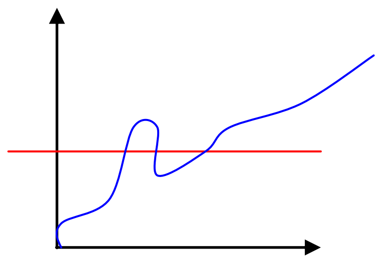
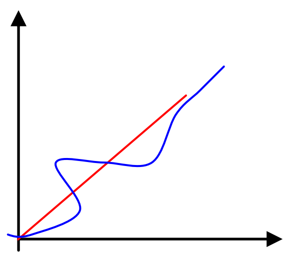
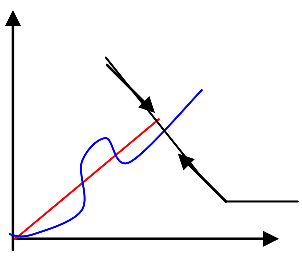
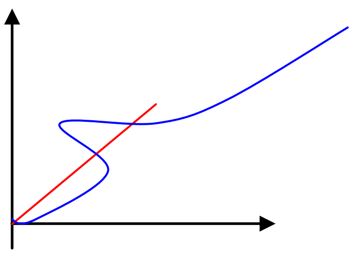
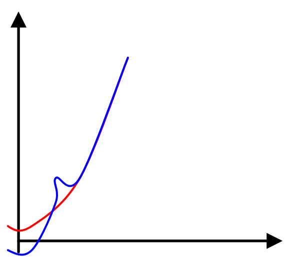
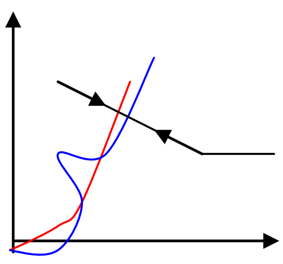
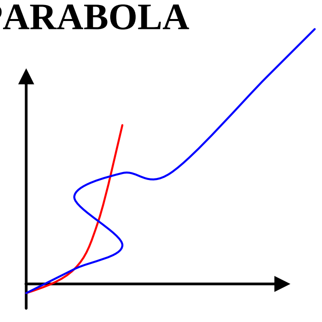
errore di POSIZIONE, se l'ingresso è a GRADINO;

errore di VELOCITA, se l'ingresso è a RAMPA;

errore di ACCELERAZIONE, se l'ingresso è a PARABOLA.

In ogni caso l'errore può assumere 3 valori distinti:

- **e (t) = 0: errore NULLO** e ciò comporta che, Vr (t) = Vu (t);
- **e (t) = K**: **errore COSTANTE** e ciò comporta che, Vr (t) - Vu (t) = K;
- **e (t) = ∞** : **errore INFINITO** e ciò comporta che, la RISPOSTA si allontana sempre più da quella desiderata. Nella pagina successiva è indicata una tabella con le risposte ai segnali tipici, in cui emergono le tre situazioni di errore.

ERRORE di Posizione: **risposta al GRADINO**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = 0**	**ERRORE di Posizione:** **risposta al GRADINO**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = K**	**ERRORE di Posizione:** **risposta al GRADINO**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = ∞**
ERRORE di Velocità: **risposta alla RAMPA**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = 0**	**ERRORE di Velocità:** **risposta alla RAMPA**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = K**	**ERRORE di Velocità:** **risposta alla RAMPA**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = ∞**
ERRORE di Accelerazione: risposta alla PARABOLA  **Caso in cui l’errore** **e (t) = 0**	**ERRORE di Accelerazione: risposta alla PARABOLA**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = K**	**ERRORE di Accelerazione: risposta alla PARABOLA**  **Caso in cui l’errore** **e (t) = ∞**

In conclusione con l'errore NULLO dopo la fase transitoria, in uscita, si ha il segnale desiderato, mentre con l'errore costante K, l'uscita, dopo la fase transitoria è molto prossima a quella desiderata, ma non in modo perfetto, in altri termini rispetto alla risposta desiderata c'è un leggero scostamento che si mantiene costante nel tempo. Infine, nel caso di errore infinito, dopo la fase transitoria, la risposta tende ad allontanarsi sempre più da quella desiderata.
Si osserva, inoltre, che l'errore commesso dal sistema ai segnali tipici dipende dal **TIPO** di sistema stesso.
Si definisce **TIPO di sistema, il numero di poli presenti nell'origine della G0l (S), ossia della funzione di trasferimento data dal seguente prodotto:**

F.d. T = G (S) H (S).

Per esempio in un sistema di **tipo 0** non sono presenti poli nella G0l, nel **tipo 1** e nel **tipo 2** sono presenti rispettivamente 1 polo e due poli nell'origine, pertanto la G0l presenta espressioni del tipo 1 / S e 1 / S^2.

Quest'ultima tabella mette in luce, a seconda del **tipo di sistema**, il corrispondente valore dell'errore:

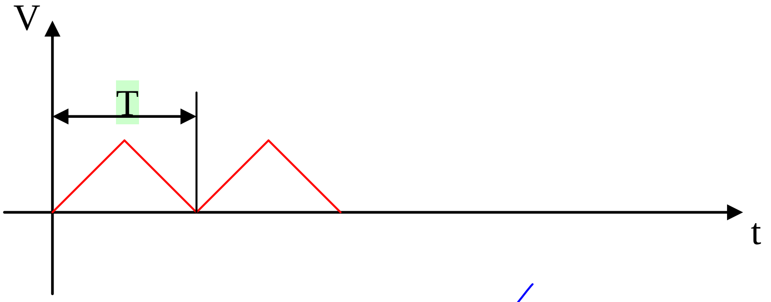
TIPO di Sistema	ERRORE di Posizione	ERRORE di Velocità	ERRORE di Accelerazione
0	**Costante = K1**	∞	∞
1	**0**	**Costante = K2**	∞
2	**0**	**0**	**Costante = K3**

Le costanti K1, K2 e K3 sono diverse fra loro, ma risultano proporzionali all'amplificazione del guadagno ad anello aperto. Se l'amplificazione è elevata, la precisione migliora, ma si aumenta il rischio di instabilità; (è necessario definire, quindi, dei valori di compromesso.)

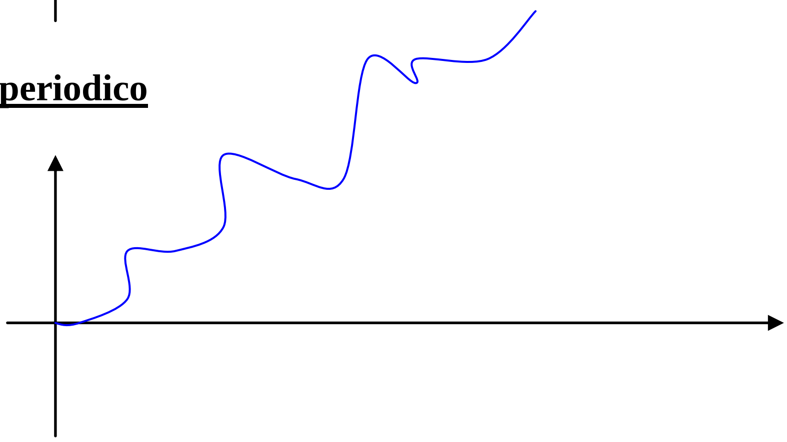
I SEGNALI

Per **segnale** si intende in linea di massima una grandezza fisica le cui variazioni nel tempo risultano significative ai fini della comunicazione di un'informazione.
Per noi risultano particolarmente importanti i **segnali elettrici periodici.**

Segnale periodico



Segnale aperiodico



Si dice PERIODICO un segnale che dopo un certo intervallo di tempo, (detto appunto **periodo**), torna ripetersi uguale a sé stesso.
Il periodo si indica con **T** e si misura in **s**.
Il numero di periodi che si ripetono nell'unità di tempo si dice frequenza s, e si dice Hertz.
Matematicamente un segnale periodico è una funzione del tempo del tipo:

$$\mathbf{v = v(t) = v (t + nT),} \text{ con } \mathbf{n = 0,1,2,3,\ldots.}$$

Questa relazione afferma che il segnale **v(t)** all'istante **t** presenta un valore identico all'istante **t + nT**.

I segnali privi di periodicità prendono il nome di **segnali aperiodici**; questi si possono ritenere periodici con **periodo T infinito**.

Il segnale trasmesso dalle emittenti radiofoniche in FM, consiste in un segnale sinusoidale in alta frequenza MODULATO in FREQUENZA del segnale audio. Questa modulazione consiste nel far variare la frequenza della SINUSOIDE in alta frequenza, detta PORTANTE del segnale audio, in modo direttamente proporzionale all'AMPIEZZA del segnale audio stesso, (detto segnale MODULANTE).

In ricezione è possibile recuperare l'informazione del segnale audio, contenuto nella sua AMPIEZZA, dalla variazione della frequenza della sinusoide PORTANTE.
L'informazione contenuta nella PORTANTE non è quindi nella sua legge di periodicità , ma nella variazione della sua frequenza.

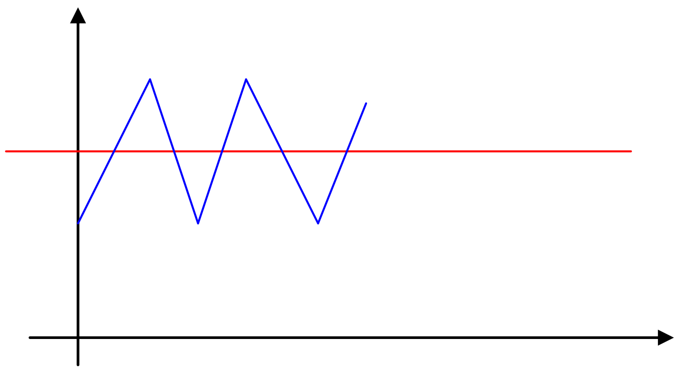
Anche le grandezze COSTANTI, (spesso impropriamente dette CONTINUE), si ritengono dei segnali, anche se per definizione NON presentando VARIAZIONI nel TEMPO, non potrebbero essere considerate come tali.
A giustificazione di quanto detto è possibile effettuare queste considerazioni:

a) **si considera normalmente CONTINUA una grandezza che subisce delle variazioni molto lente nel tempo;**

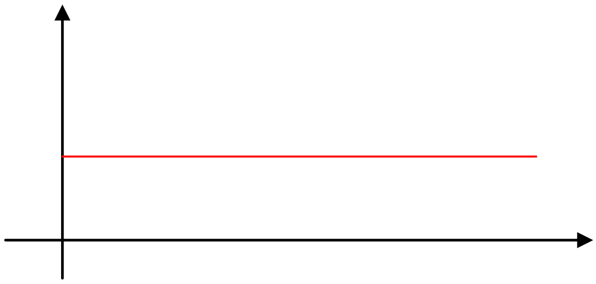
b) **ai fini dell'analisi del funzionamento di un circuito, si procede spesso alla misura dei parametri delle grandezze elettriche presenti, anche una grandezza continua, se assume un valore diverso dal previsto, può quindi contenere un'informazione utile.**

Indipendentemente dalla periodicità o meno di un segnale , esso può essere UNIDIREZIONALE o BIDIREZIONALE, in relazione al segno che, la grandezza fisica, assume al variare del tempo.

<u>Segnale bidirezionale</u>



<u>Segnale unidirezionale</u>



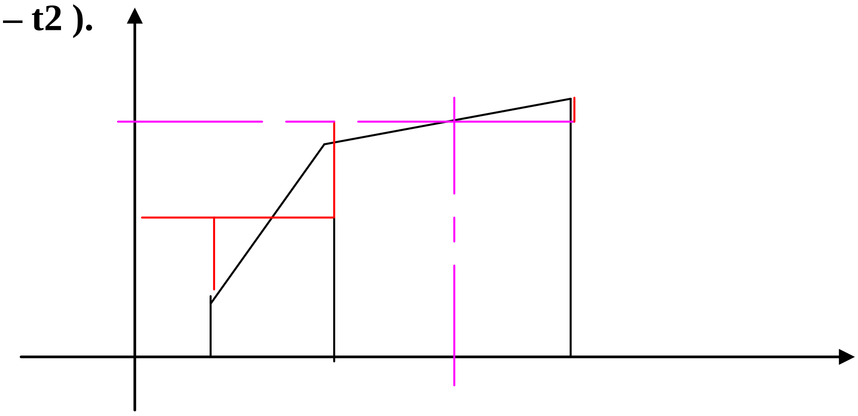
E' interessante ricordare che se ad un segnale BIDIREZIONALE si aggiunge un segnale CONTINUO, di valore opportuno, si ottiene un SEGNALE UNIDIREZIONALE.

<u>Il VALORE MEDIO</u>

Si consideri una grandezza variabile nel tempo v = v(t). Nell'intervallo [t1, t2], stante l'andamento lineare della v = v(t), si veda la figura sotto riportata, il VALOR MEDIO è pari a Vm1 che si trova a metà dei valori Va e Vb. Si noti che le due aree tratteggiate sono uguali, e pertanto, il rettangolo di base t2 – t1 ed altezza Vm1 presenta la medesima area del quadrilatero ABt2t1.

Analogo discorso si può effettuare per l'altro tratto:

area rettangolo di altezza Vm2, per la base t3 – t2, uguale area del quadrilatero BC(t3 – t2).

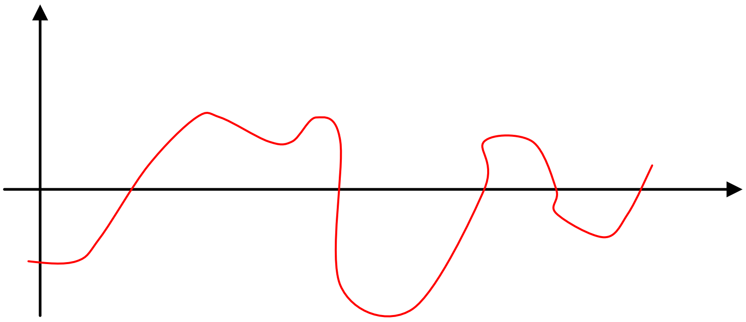


Estendendo il ragionamento a tutto l'intervallo [t1, t3], si può quindi dire che il valore medio di v = v(t) è pari a Vm, altezza del rettangolo, con base t3 – t1, ed è uguale all'area del pentagono ABCt3t1.

Per una generica funzione v = v(t), variabile nel tempo, si può generalizzare il concetto di VALORE MEDIO**, ossia:**

il valore medio di v = v(t) in un dato intervallo è pari all'altezza del rettangolo di base pari all'intervallo di tempo considerato ed area uguale a quella sottesa dalla funzione nello stesso intervallo.

VALORE MEDIO di una curva BIDIREZIONALE:



Nel caso di un segnale BIDIREZIONALE, il valore medio si ottiene calcolando l'area sottesa della curva come SOMMA ALGEBRICA delle aree sottese dalla curva superiormente ed inferiormente all'asse x.

Potremo allora ammettere che:

$$V_m = (A1+A3+A5-A2-A4-A6) / (t2 - t1).$$

L' eventuale componente continua di un segnale coincide con il suo VALORE MEDIO.

In definitiva un segnale a VALORE MEDIO NULLO è privo di componente continua.

SEGNALI ALTERNATI

Si definisce segnale ALTERNATO un segnale periodico a VALORE MEDIO NULLO.

Il segnale più importante di questo tipo è il segnale SINUSOIDALE, la cui equazione è del tipo: $v = v(t) = V_M \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$, **dove** ω **è la pulsazione, e** φ **è la fase del segnale. Inoltre la pulsazione e la frequenza sono legate dalla relazione seguente:**

$\omega = 2 \pi f$ e dove $f = \omega / 2 \pi$, **e questo implica che**

$T = 2 \pi / \omega$.

VALORE EFFICACE – RMS = ROOT MEAN SQUARE.

Si definisce valore efficace di una corrente alternata il valore CONTINUO che, attraversando una resistenza provocherebbe, in un PERIODO, lo stesso effetto termico della corrente alternata effettivamente presente nella resistenza.

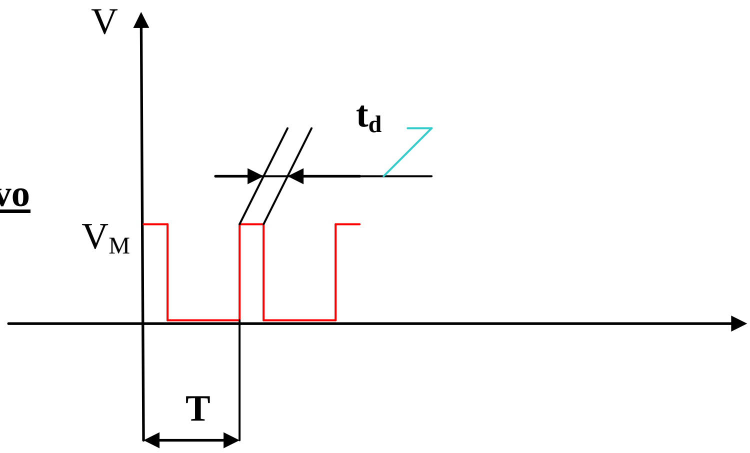
ESEMPIO:

se si dice che una lampadina alimentata in alternata con tensione 220 Veff., presenta una potenza di 60 W equivale a dire che la stessa lampadina alimentata con tensione continua di 220 Volt, produrrebbe una potenza di 60 Watt. Se un segnale è costituito da due livelli, e se i due livelli hanno una durata diversa, allora si parla di **SEGNALI IMPULSIVI.**

Un parametro importante per i segnali a due livelli, in special modo per quelli impulsivi, è il **DUTY CYCLE,** (**CICLO UTILE**), definito come:

il rapporto tra il tempo di durata del livello alto,(basso), ed il tempo di ripetizione D = td / T.

Segnale impulsivo



Vi faccio ora un cenno su un teorema importante, ossia il TEOREMA di FOURIER, esso afferma che, (questo teorema è inoltre effettivamente dimostrabile):

Una qualsiasi grandezza periodica è sempre decomponibile in infiniti termini sinusoidali.

Il termine di frequenza eguale a quella del SEGNALE è detto ARMONICA FONDAMENTALE o si parla di frequenza principale**, mentre tutte le altre frequenze multiple di quella fondamentale, si dicono ARMONICHE SECONDARIE, ed esse hanno ampiezza decrescente all'aumentare della frequenza stessa.**

SI INSERISCONO ALCUNI ESEMPI DI SEGNALI TIPICI

SEGNALE ALTERNATIVO SINUSOIDALE

SEGNALE RADDRIZZATO A SEMIONDA

SEGNALE RADDRIZZATO A DOPPIA SEMIONDA

SEGNALE TRIANGOLARE ALTERNATO

IL SISTEMA TERMICO (PRIMO ORDINE)

Si consideri un SISTEMA TERMICO costituito da una stanza **non isolata termicamente** e riscaldata da una resistenza, in grado di fornire una certa QUANTITA' di CALORE per UNITA' di TEMPO:

$\Delta q / \Delta t = \phi qi (t)$ = FLUSSO TERMICO in INGRESSO.

Prima di affrontare il ragionamento si tenga presente che si indicherà con:

T (t) = la temperatura interna della stanza;

Ta = la temperatura esterna alla stanza.

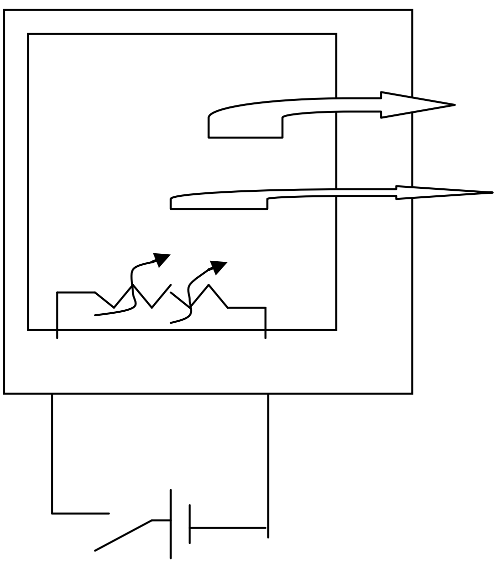
Si osservi che, la temperatura Ta, si può ritenere costante per lunghi intervalli di tempo.

Voglio ora studiare la variazione nel tempo della temperatura interna della stanza, ossia voglio studiare l'equazione T (t), nell'ipotesi che, all'istante t = 0 il sistema sia sottoposto alla seguente sollecitazione a gradino:

$$\phi qi (t) = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \phi qi \text{ per } t \geq 0. \end{cases}$$

Si osservi la seguente figura di riferimento:

$\phi qu (t)$ = è il FLUSSO TERMICO ISTANTANEO TRASFERITO per CONVEZIONE verso l'AMBIENTE ESTERNO o FLUSSO in USCITA.



Si capisce allora che, $\Delta Q = \phi qi (t) - \phi qu (t)$, con ΔQ = quantità di calore che, nell'unità di tempo rimane nella stanza, e dove $\phi qi(t)$ è la quantità di calore, che nell'unità di tempo, è immessa nella stanza, mentre $\phi qu(t)$ è la quantità di calore trasferita nell'unità di tempo all'ambiente esterno. Si possono a questo punto prevedere i seguenti tre casi:

I. Se $\phi qi(t) > \phi qu(t)$, ciò implica che la temperatura della stanza aumenta;
II. Se $\phi qi(t) < \phi qu(t)$, ciò implica che la temperatura della stanza diminuisce;
III. Se $\phi qi(t) = \phi qu(t)$, ciò implica che la temperatura della stanza rimane costante.

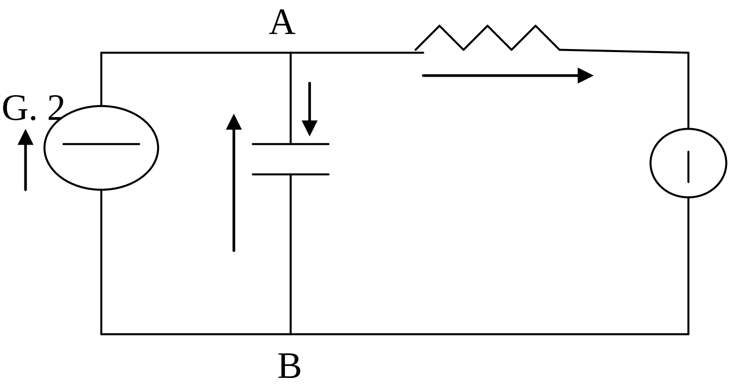
Ipotesi: per $t = 0$, ciò implica che $T(0) = 0$, il sistema può essere schematizzato, dalla seguente figura2, vedi più avanti.
L'ipotesi ulteriore è che il trasferimento di calore avvenga solo per CONVEZIONE, e perciò la trasformata del FLUSSO TERMICO trasmesso dalla stanza all'ambiente esterno è:

$\phi qu(S) = (T(S) - Ta(S)) / Rt$, con Rt resistenza termica, definita come,

$Rt = 1 / h A$.

In definitiva, posso rappresentare lo schema di figura 1 con il seguente circuito ANALOGO, di figura 2:

FIG. 2



Dal circuito di figura si possono ricavare le seguenti equazioni:

1. $\phi qi(t) - \phi q(t) - \phi qu(t)$; per il primo principio di Kirchoff relativa al nodo A;
2. $\phi q(t) = C_T (d T(t) / dt)$; per il comportamento elettrico dei CONDENSATORI;
3. $T(t) - Rt\, \phi qu(t) - Ta = 0$; per il secondo principio di Kirchoff, legato alla maglia.

Sostituendo la 2. Nella 1., si ottiene:

4. $\phi qu(t) = \phi qi(t) - \phi q(t) = \phi qi(t) - C_T (d T(t) / dt)$;

Sostituendo la 4. Nella 3. si ricava che:

5. $T(t) – Rt\ \phi qu(t) – Ta = T(t) – Rt\ \phi qi(t) - C_T(dT(t)/dt) -$
$- Ta = 0.$

Sistemando si ottiene che: $Rt \cdot C_T(dT(t)/dt) + T(t) = Rt \cdot$
$\cdot \phi qi(t) + Ta$,
indicando ora con $Rt \cdot C_T = \tau$ la COSTANTE di TEMPO sarà alla fine determinata la seguente equazione: $dT(t)/dt + T(t)/\tau = \phi qi(t)/C_T + Ta/\tau$ 6.
Poiché non sappiamo risolvere l'equazione differenziale 6., allora noi ricorriamo alla trasformata di LAPLACE:
$(S\,T(S) – T(0)) + T(S)/\tau = \phi qi(S)/C_T + Ta(S)/\tau$, ma per ipotesi $T(0) = 0$,

(per ipotesi iniziali). Allora si ottiene che:

$S\,T(S) + T(S)/\tau = \phi qi(S)/C_T + Ta(S)/\tau$, da cui raccogliendo la relazione si trasforma nella forma seguente,

$T(S)(S + 1/\tau) = \phi qi(S)/C_T + Ta(S)/\tau$,

$T(S)((\tau S + 1)/\tau) = \phi qi(S)/C_T + Ta(S)/\tau$, da cui dividendo per $\tau S + 1/\tau$, il tutto si trasforma nella forma,

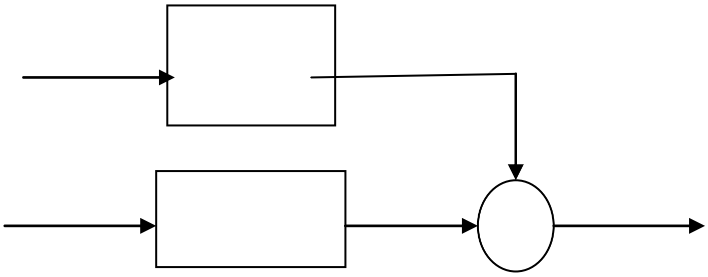
$T(S) = (\phi qi(S)/C_T)(\tau/\tau S + 1) + Ta(S)\,\tau/\tau(\tau S + 1)$;

$T(S) = (\phi qi(S)/C_T)(Rt\,C_T/\tau S + 1) + Ta(S)/\tau S + 1$;
in modo definitivo si ottiene alla fine che:
$T(S) = (Rt \cdot \phi qi(S)/\tau S + 1) + Ta(S)/(\tau S + 1)$, 7.

dove Ta (S) è il DISTURBO AGENTE SUL SISTEMA.

Inoltre è $G1(S) = 1/\ 1 + Rt\,C_T\,S$; $G2(S) = Rt/\ 1 + Rt\,C_T\,S$.

Nel nostro caso i PARAMETRI sono: C_T = CAPACITA' TERMICA;
Rt = RESISTENZA TERMICA,



Si ricordi che Rt C_T = COSTANTE di TEMPO del SISTEMA, da cui le dimensioni di essa è data come: $(s\ \cancel{K} / \cancel{J})\ (\cancel{J} / \cancel{K})$ = s = secondi.

La risposta del SISTEMA è ottenibile applicando al SISTEMA, il PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI:
$T (t) = (\phi qi (t) . Rt + Ta) (1 - e\ \ \ \ )$.

Concludendo: se la temperatura della stanza aumenta gradualmente, essa raggiunge la temperatura di REGIME dopo un tempo pari a 4 – 5 volte la COSTANTE di TEMPO del SISTEMA. Ciò si verifica, allora, quando la POTENZA, fornita al sistema, è maggiore di quella ceduta per convezione all'ambiente esterno.

LA RESISTENZA TERMICA

E' noto che due corpi aventi temperatura diversa, messi a contatto, raggiungono l'equilibrio termico; infatti il CALORE fluisce spontaneamente dal corpo a temperatura maggiore verso quello a temperatura minore, fino a quando i due corpi non raggiungono la stessa temperatura, o l'equilibrio termico.
La propagazione del calore avviene in modo diverso, in relazione allo stato della materia: nei solidi si propagazione per **conduzione**, ovvero senza trasporto di materia, nei fluidi per **convezione** ovvero con trasporto di materia, nel vuoto per **irraggiamento**, ovvero attraverso la propagazione di onde elettromagnetiche.

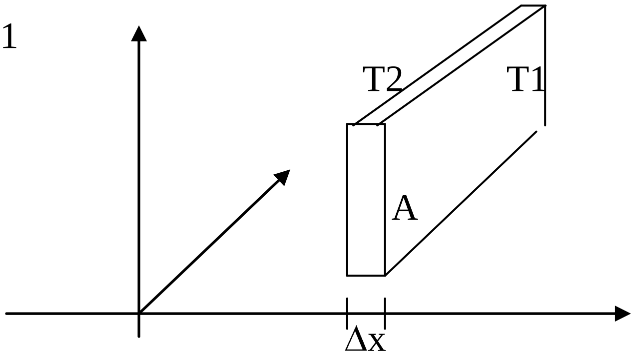
CONDUZIONE NEI SOLIDI

Nella trasmissione per CONDUZIONE, propria dei solidi, il calore si trasmette spontaneamente dalla sorgente a temperatura maggiore a quella a temperatura minore, perché le molecole a causa dell'agitazione termica, cedono alle molecole contigue, parte della loro energia cinetica, la quale è proporzionale alla temperatura.

Per lo studio della trasmissione del calore, si consideri una lastra di materiale omogenea a facce piane parallele, di sezione A e spessore Δx. Una faccia sia mantenuta a temperatura COSTANTE T2 e l'altra a temperatura fissa T1, con T1 minore di T2. In tali condizioni il flusso termico ϕq che, fluisce perpendicolarmente alle due facce della lastra, è proporzionale alla differenza di temperatura delle due facce, secondo la legge di FOURIER:

$$\boldsymbol{\phi q = k\ A\ \Delta T / \Delta x}$$

FIG.1



dove :

- ϕq = flusso termico trasmesso in Watt;
- A = superficie della sezione della lastra in m^2;
- $\Delta x = x2 - x1$ = con $x1 < x2$, ossia spessore della lastra di metallo, in metri;
- $\Delta T = T2 - T1$= differenza di temperatura tra le due facce, con $T2 > T1$;
- K = costante di proporzionalità, detta conducibilità termica in Joule / s. K. M.

NB. Una sostanza avente un K elevato è un buon conduttore di calore, mentre è un buon isolante se K ha un valore basso.

Se poniamo $\Delta x = L$ nell'equazione $\phi q = k\ A\ \Delta T / \Delta x$, con riferimento alla figura tracciata, avremo che la QUANTITA' di CALORE che, nell'UNITA' di TEMPO $\phi q(t)$ è trasferita per conduzione dalla faccia a temperatura maggiore T2, verso quella a temperatura minore T1, è: $\phi q(t) = (T2\ (t) - T1\ (t)) / Rt$, cioè
$\phi q(t) = T\ (t) / Rt$, dove $Rt = L / K\ A$ in (s. K / Joule) è la resistenza termica di conduzione; $T(t) = T2\ (t) - T1\ (t)$ è la differenza di temperatura della superficie a temperatura maggiore rispetto quella a temperatura minore.
La relazione $\phi q(t) = T\ (t) / Rt$ è il modello matematico del sistema termico di FIG. 1, costituito da un corpo solido OMOGENEO, (stessa natura), e ISOTROPO, (ossia con le stesse proprietà fisiche in ogni direzione), attraverso il quale è possibile trasferire calore per conduzione.
La trasformata di LAPLACE di ambo i membri dell'equazione $\phi q(t) = T\ (t) / Rt$, ossia la TRASFORMATA, secondo

$$L\ (\phi q(t) = T\ (t) / Rt) = \phi q(S) = T (S) / Rt.$$

Ora, poiché il FLUSSO TERMICO è una VARIABILE PASSANTE, (ossia viene misurata in un solo punto), che è un flusso analogo a quello di una corrente elettrica o di un'intensità elettrica, mentre invece la temperatura è una VARIABILE TRASVERSALE, (cioè viene misurata contemporaneamente in due punti), e ciò è omologo alla differenza di potenziale, allora è possibile rappresentare il SISTEMA CONSIDERATO con il CIRCUITO EQUIVALENTE di figura:

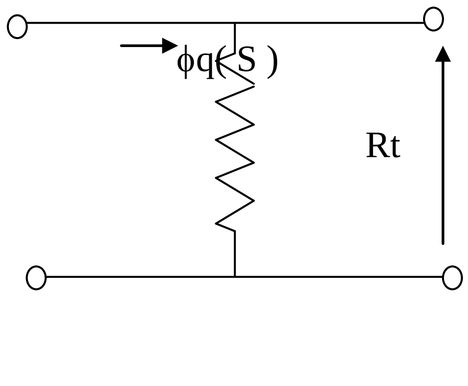
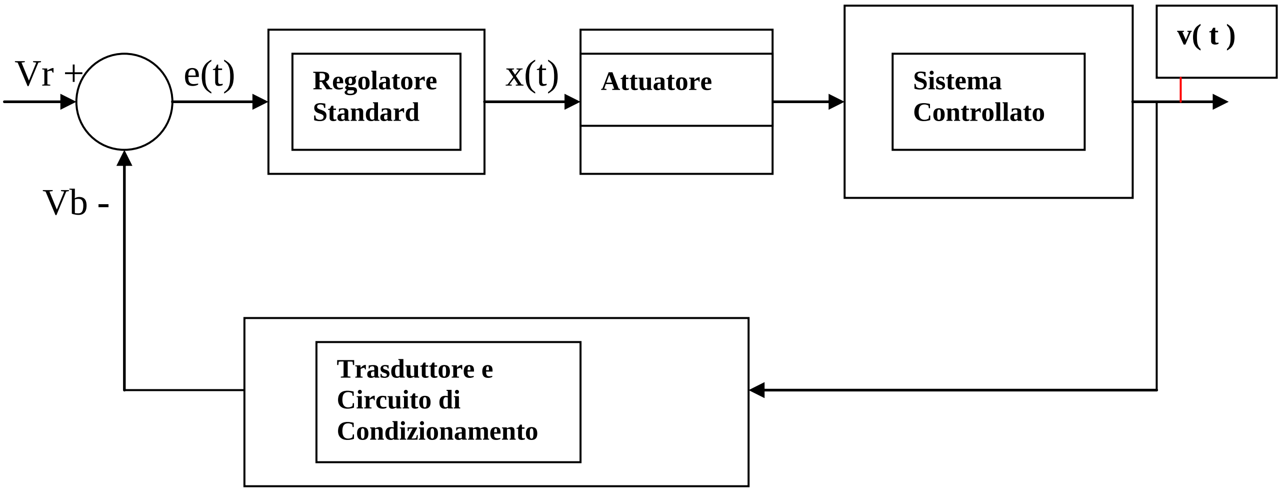


FIG 2.

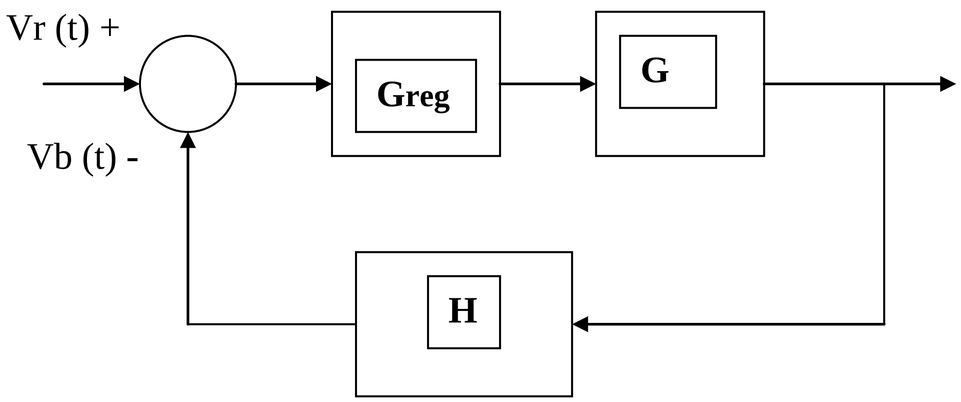
<u>La rappresentazione del sistema TERMICO con un circuito elettrico è detta ANALOGIA</u>.

I REGOLATORI STANDARD

Abbiamo visto che per stabilizzare un sistema di controllo ad anello chiuso, si inserisce nella catena diretta una rete di compensazione o una rete correttrice. Una tale rete assieme ad un amplificatore di segnale, costituisce un **REGOLATORE**. Per progettare questa rete è necessario conoscere i modelli matematici, ossia le f. d. T, degli elementi che compongono il sistema stesso. Nel circuito proposto in figura, che rappresenta il nostro sistema, il più delle volte, nella realtà, non si conosce l'espressione data come prodotto fra G (S) e H (S), e perciò per realizzare la stabilizzazione è necessario ricorrere a **REGOLATORI STANDARD**, presenti sul mercato.



Il circuito stesso può essere schematizzato nel modo seguente, per migliore semplicità di rappresentazione:



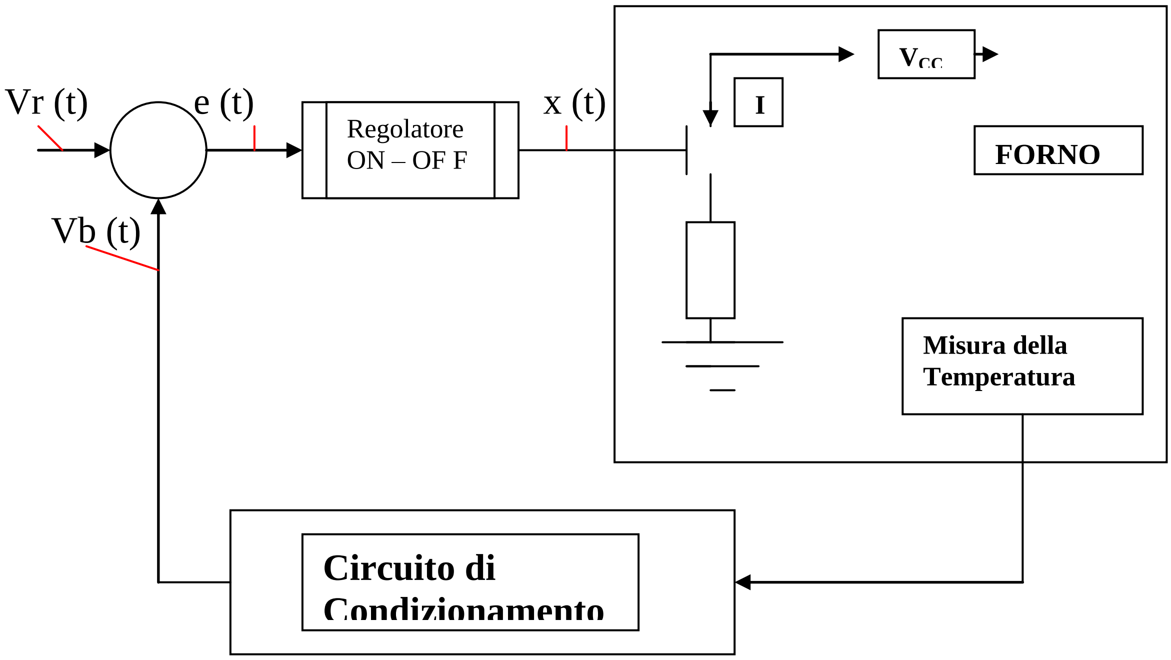
Esistono diversi tipi di regolatori, con caratteristiche di funzionamento e prestazioni diverse, ma ognuno di essi può essere inserito in un qualsiasi sistema di controllo; infatti alcuni parametri di essi sono variabili, in modo tale che possano essere adattati al sistema da controllare.

I regolatori standard possono essere:

- **On – Off;**
- **Proporzionale o tipo P;**
- **Proporzionale – Derivativo o tipo PD;**
- **Proporzionale – Integrativo o tipo PI;**
- **Proporzionale – Integrativo – Derivativo o tipo PID.**

REGOLATORI ON – OFF

Il segnale x (t) in uscita dal regolatore on – off può assumere solo due valori, che rappresentano le due posizioni possibili, ossia quella di **aperto** e quella di **chiuso**. Un'applicazione tipica che ne chiarisce il funzionamento è il controllo della temperatura, per esempio di un forno elettrico. La sua schematizzazione è qui sotto riportata:



Si tenga presente che:

- Vr (t) è il segnale di riferimento, che rappresenta il valore desiderato della temperatura T_R del forno;
- Vb (t) è il segnale legato al valore della temperatura T_M misurata dai sensori.

Indicando con 0 ed E i due valori possibili di tensione di x (t), da ciò ne segue:

x (t) = 0 se Vr (t) < Vb (t), pertanto l'errore risulterebbe negativo; infatti se ne avrebbe: e (t) = Vr (t) – Vb (t) < 0.

Inoltre x (t) = E se Vr (t) > Vb (t), pertanto l'errore risulterebbe positivo; infatti se ne avrebbe: e (t) = Vr (t) – Vb (t) > 0.

In poche parole, se la temperatura misurata T_M è maggiore di quella fissata T_R, allora **Vr (t) < Vb (t)**, perciò **x (t) = 0** $\longrightarrow$ **stato di OFF**. In questo caso il regolatore apre il contatto: non circola più la corrente in R e il forno si raffredda, per tornare al valore stabilito di temperatura T_R.
Invece, se la temperatura T_M è minore di quella fissata T_R, allora **Vr (t) > Vb (t)**, perciò **x (t) = E** $\longrightarrow$ **stato di ON**. Il regolatore chiude il contatto**:** nella resistenza R circola la corrente I e il forno si riscalda, per raggiungere la temperatura desiderata T_R.

<u>IL REGOLATORE PROPORZIONALE o di tipo P</u>

Il regolatore On – Off presenta lo svantaggio di essere poco flessibile; il regolatore proporzionale, invece, quando la temperatura supera il valore di riferimento, anziché aprire completamente il circuito, fa diminuire in modo proporzionale la quantità di calore fornita, (per esempio, diminuendo la tensione di alimentazione.) Viceversa, se la temperatura è insufficiente, si aumenta il calore fornito di una quantità che dipende dalla differenza di temperatura $T_R - T_M$.
In generale nel regolatore proporzionale il segnale di regolazione x (t) è proporzionale al segnale errore e (t):

x (t) = Kp . e (t).

La costante di proporzionalità Kp è un parametro caratteristico del regolatore P. La f. d. T del regolatore Gr (S)è dunque una costante:

Gr (S) = X (S) / E (S) = Kp.

Il diagramma di Bode del modulo della Gr (S) è una retta parallela all'asse delle ω, (retta orizzontale).

<u>INFLUENZA di Kp SULLA STABILITA', SULLA PRECISIONE e la VELOCITA' di RISPOSTA</u>.

Abbiamo visto che se l'amplificazione della catena diretta aumenta, il sistema rischia di andare in instabilità, conseguentemente, il regolatore proporzionale P deve avere un valore Kp non troppo elevato. C'è da osservare, però, che all'aumentare di Kp aumenta la velocità di risposta del sistema. Inoltre se la funzione di trasferimento **G (S)** della catena diretta, **<u>non presenta poli nell'origine</u>**, il sistema è di tipo 0 e l'errore nella risposta al gradino è costante, (K1). In questo caso l'errore permanente è inversamente proporzionale all'amplicazione della catena diretta e, perciò, la precisione aumenta se Kp è elevato.

CRITERI di PROGETTO

Per progettare il regolatore proporzionale P, ossia per determinare il valore di Kp si sceglie un valore di compromesso per ottenere buone caratteristiche sia di velocità, sia di precisione che di stabilità. Si può dimostrare che è sufficiente progettare il regolatore P, fissando un **margine di fase pari a 45°**.

Il regolatore proporzionale ha uno svantaggio che ne limita l'uso o l'impiego: nel caso di disturbo piccolo, ma costante e permanente, (come se fosse applicato un gradino all'ingresso), il regolatore stesso non riesce a correggere completamente l'errore di posizione, ma ne mantiene una parte, (essendo un sistema di tipo zero). In definitiva il segnale in uscita sarà leggermente diverso da quello desiderato o di riferimento.

IL REGOLATORE PROPORZIONALE – DERIVATIVO o REGOLATORE di tipo PD

Come si è visto in precedenza, il regolatore proporzionale, fornisce un segnale di comando x (t) proporzionale al segnale errore, ossia più elevato l'errore più grande risulterà il segnale di comando x (t).
Per un sistema di controllo risulta importante non soltanto sapere l'ampiezza dell'errore, ma anche se l'errore è in fase di crescita o di diminuzione. Proprio per questa ragione vengono introdotti, nei sistemi di controllo i regolatori proporzionali – derivativi o regolatori PD. Questi regolatori si possono pensare caratterizzati da due parti:

- una parte fornisce un segnale v_p proporzionale all'errore;
- un'altra parte che fornisce un segnale v_D proporzionale alla derivata del segnale errore.

In poche parole potremo ammettere che:

$$\mathbf{x (t) = v_p + v_D = Kp\, e (t) + K_D (d\, e (t) / dt).}$$

CALCOLO DELLA f. d. T

Ricordando che, $\mathbf{x (t) = v_p + v_D = Kp\, e (t) + K_D (d\, e (t) / dt)}$, ed ammettendo che:

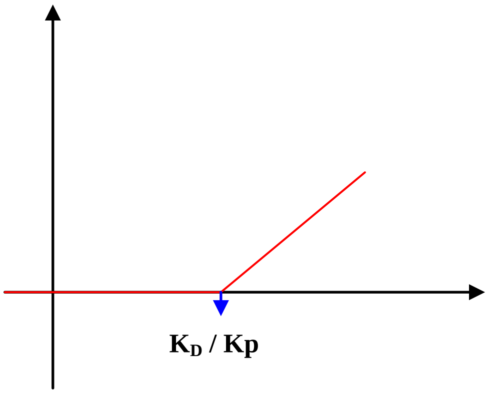
L (x (t)) = X (S);

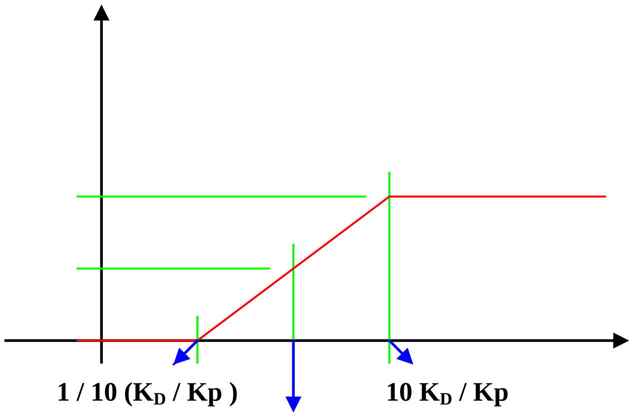
L (e (t)) = E (S); **L (d e (t) / dt) = S E (S)**, ciò ci consente di ammettere che la trasformata di Laplace di x (t) è del tipo seguente, $\mathbf{X (S) = Kp\, E (S) + K_D\, S\, E (S) = E (S) (Kp + K_D\, S).}$

Ne segue allora, raccogliendo il valore di **Kp**, che:

$\mathbf{f.\ d.\ T = Gr_{PD} = X (S) / E (S) = Kp + K_D\, S = Kp (1 + K_D\, S / Kp).}$

Il regolatore PD presenta uno zero Z = - Kp / K_D, i cui diagrammi di Bode sono rappresentati nelle figure sotto riportate:





Alle basse frequenze il regolatore PD si comporta come un regolatore proporzionale o di tipo P; infatti il modulo **Gr_{PD}** risulta essere costante.

<u>INFLUENZA SULLA STABILITA', SULLA PRECISIONE e la VELOCITA' di RISPOSTA</u>.

Il regolatore PD consente una maggiore stabilità, del sistema ad anello chiuso, per la presenza dello zero. La presenza della parte derivativa, evidenzia una maggiore velocità del sistema stesso. Infatti, se ad esempio l'errore aumenta, il segnale di comando x (t) è maggiore rispetto al caso proporzionale. Pertanto, la velocità di risposta risulta maggiore. Comunque, visto che sia la G (S) che la f. d. T del regolatore non presentano poli nell'origine, il sistema rimane di tipo 0, e perciò rimane il solo errore di posizione. In ogni caso è possibile migliorare la stabilità del sistema, aumentando l'amplificazione della catena diretta, (rispetto sempre al caso proporzionale), e ciò consente di diminuire l'errore permanente. **Il regolatore PD consente una maggiore precisione del regolatore proporzionale P**.

<u>CRITERI di PROGETTO</u>

Per progettare il regolatore, ossia per determinare i valori ottimali di Kp e K_D, sono necessarie due condizioni:

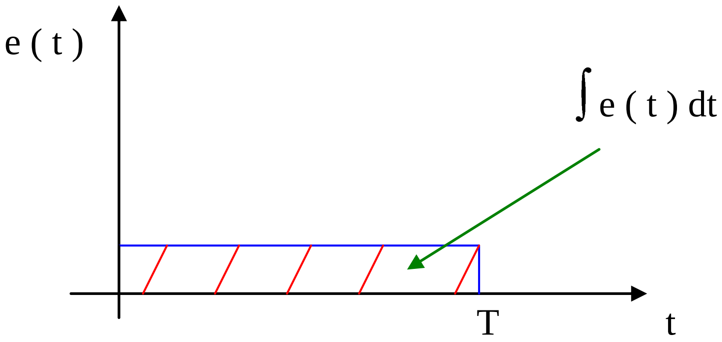
- fare coincidere lo **<u>zero</u>**, **Kp / K_D** , del regolatore con il **<u>secondo polo</u>** della **<u>f. d. T della G0l = G (S) H (S)</u>**;
- fissare un **<u>margine di fase di 45°</u>**.

IL REGOLATORE PROPORZIONALE – INTEGRATIVO o di tipo PI

Il regolatore PI fornisce un segnale di comando che risulta parte legato proporzionalmente all'errore e parte legato all'integrale del segnale errore. In altri termini ne risulta che:

$$\mathbf{x (t) = Kp\, e (t) + K_I \int e (t)\, dt}.$$

L'integrale $\int e (t)\, dt$ rappresenta l'area sottesa dalla curva o l'area sottesa dalla funzione, visibile dalla figura seguente:



La figura evidenzia che, al crescere del tempo t, l'area e dunque, il valore $\mathbf{K_I \int e (t)\, dt}$, aumenta anche se il segnale e (t) è debole. Per questa ragione si utilizza il regolatore PI, nel caso di errore piccolo, ma che perdura nel tempo; infatti i regolatori P e PD non sono in grado di correggere tale errore. L'osservazione importante è che anche un errore piccolo, ma che dura molto nel tempo, può essere disturbo per i sistemi di controllo in retroazione, e perciò, l'unico regolatore in grado di correggerlo è proprio il regolatore PI; infatti all'aumentare del tempo la parte legata all'integrale dell'errore cresce e quindi può influenzare notevolmente sul segnale di comando fornito da x (t) .

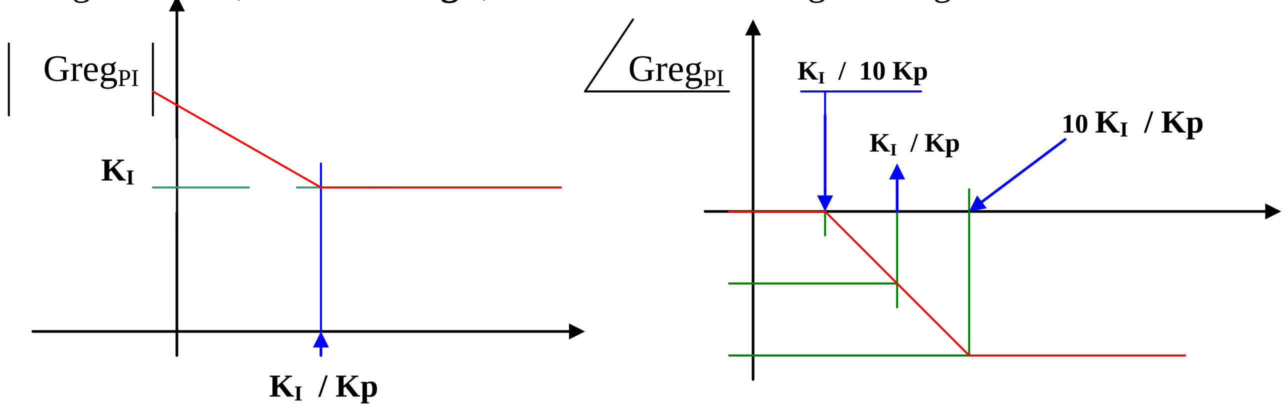
CALCOLO DELLA f. d. T

Tenendo presente che: $\mathbf{x (t) = Kp\, e (t) + K_I \int e (t)\, dt}$ ed ammettendo che, $\mathbf{L\, x (t) = X (S)}$; $\mathbf{L\, e (t) = E (S)}$; $\mathbf{L (Kp\, e (t)) = Kp\, E (S)}$; $\mathbf{L (K_I \int e (t)\, dt) = K_I (E (S) / S)}$. In definitiva la trasformata di Laplace del segnale di comando risulta eguale a:
$\mathbf{X (S) = Kp\, E (S) + K_I (E (S) / S) = E (S) . (Kp + K_I / S)}$. Da quest'ultima relazione possiamo ricavare la funzione di trasferimento del regolatore PI, come:

$\mathbf{X (S) / E (S) = Kp + K_I / S = (Kp\, S + K_I) / S =}$ raccogliendo K_I =

= $\mathbf{K_I (1 + (Kp / K_I S)) / S}$.

In definitiva il regolatore PI presenta un polo nell'origine e uno zero nel punto di valore $\omega = z = - K_I / Kp$. I diagrammi di Bode del modulo e della fase del regolatore PI, ossia di **Greg$_{PI}$,** sono visibili nelle seguenti figure:



<u>INFLUENZA SULLA STABILITA', SULLA PRECISIONE e la VELOCITA' di RISPOSTA</u>.

La presenza del polo nell'origine della f. d. T del regolatore in questione, può causare instabilità del sistema ad anello chiuso alle basse frequenze, fino a quando si giunge allo zero. In modo intuitivo, si è comunque capito che, per la stabilità, il sistema, è più preciso ed il regolatore è in grado di correggere anche piccoli errori o errori estremamente deboli. Il polo nell'origine rende il sistema di tipo 1 e quindi ne viene annullato l'errore di posizione. Per quanto riguarda la velocità di risposta, il regolatore PI ha le stesse caratteristiche del regolatore P, pertanto esso è meno rapido del regolatore PD.

<u>CRITERI di PROGETTO</u>

Per determinare Kp e K_I in genere conviene porre le seguenti condizioni:

- ✓ lo **<u>zero</u> del regolatore, K_I / Kp**, deve coincidere con **<u>il primo polo della funzione di trasferimento ad anello aperto G (S) H (S)</u>**;
- ✓ il **<u>margine di fase deve essere pari a 45°</u>**.

IL REGOLATORE PROPORZIONALE – INTEGRALE – DERIVATIVO o il regolatore di tipo PID

Il regolatore PID riassume le caratteristiche dei tre regolatori introdotti, ossia dei regolatori P, PD e PI. In poche parole si ottiene un regolatore:

- con buona stabilità;
- di risposta veloce;
- preciso.

CALCOLO DELLA f. d. T

In questo caso ne risulta che:

$$x(t) = Kp\, e(t) + K_I \int e(t)\, dt + K_D (d\, e(t) / dt).$$

La corrispondente trasformata di Laplace è:

$$X(S) = Kp\, E(S) + K_I\, (E(S)/S) + K_D\, S\, E(S) = \longrightarrow$$
$$= E(S)\,(Kp + (K_I/S) + K_D\, S) = \longrightarrow$$
$$= E(S)\,((K_D\, S^2 + Kp\, S + K_I)/S).$$

Pertanto la funzione di trasferimento del regolatore PID è esprimibile come:

$$\textbf{f. d. T} = Greg_{PID}(S) = X(S)/E(S) = (K_D\, S^2 + Kp\, S + K_I)/S.$$

Come si osserva la funzione di trasferimento su indicata presenta un **polo nell'origine e due zeri**, che si ottengono risolvendo l'equazione di secondo grado $K_D S^2 + Kp\, S + K_I = 0$.

CRITERI di PROGETTO

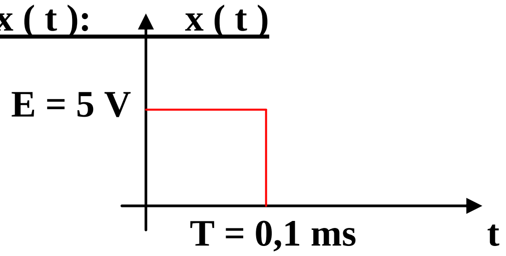
Per progettare il regolatore PID e determinare Kp, K_D e K_I, normalmente si pongono le seguenti tre condizioni:

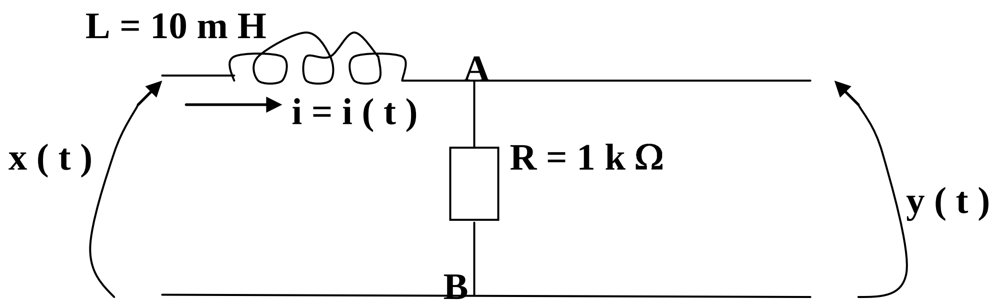
- i **due zeri della funzione di trasferimento del regolatore PID** devono coincidere con **il primo ed il secondo polo della G (S) H (S)**;
- il **margine di fase deve essere di 45°**.

PARTE DEDICATA ALLE ESERCITAZIONI IN CLASSE

Esercizio 1

Questo primo esercizio mette in luce come sia importante l'uso del passaggio dal dominio dei tempi al dominio delle trasformate.
Il circuito elettrico è di tipo R – L, ma può essere di qualsiasi altra tipologia; infatti i passi risolutivi sono sempre gli stessi.
Determinare l'andamento della risposta y (t) del circuito L – R di figura, sollecitato da un ingresso x (t):





Il circuito, nella figura superiore, è rappresentato nel dominio dei tempi. Inoltre, per rispondere alla domanda dell'esercizio, è necessario risalire alla funzione di TRASFERIMENTO del sistema stesso.
(Si ricorda che la f.d.T è espressa come rapporto fra segnale di uscita e segnale di ingresso).
In questo caso, (come in un qualsiasi circuito elettrico), il segnale di ingresso è rappresentato dalla tensione necessaria a vincere tutte le cadute, dovute ai componenti presenti nel sistema stesso. Potremo allora scrivere:

$$x(t) = L\,(d\,i(t)/dt) + R\,i(t).$$

Il segnale di uscita **y (t)** è rappresentato dalla caduta che la corrente **i (t)** determina sulla resistenza **R**, (o fra i componenti posti fra **A** e **B**), ossia:

$$y(t) = R\,i(t).$$

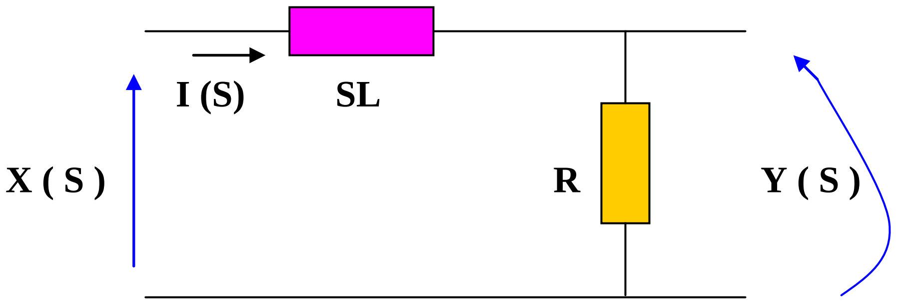
Come si osserva nel dominio dei tempi appaiono delle equazioni differenziali, (equazioni in cui compaiono derivate ed integrali). Nel caso in questione compare la derivata della corrente fatta rispetto al tempo.

Comunque la f.d.T apparirebbe nella forma seguente:

$$\mathbf{y\,(\,t)\,/\,x\,(\,t\,) \quad = \quad R\,i\,(\,t\,)\,/\,L\,d\,i\,(\,t\,)\,/\,dt + R\,i\,(\,t\,)}.$$

Nel dominio del tempo non è facile dunque proseguire, ed ecco perché si ricorre al passaggio nel dominio delle frequenze, grazie alle trasformate di LAPLACE.

Nel dominio trasformato il circuito stesso si può vedere nel modo seguente:



Pertanto ammettendo che: **Ł y (t) = Y (S); Ł x (t) = X (S); Ł i (t) = I (S)** ed infine, **Ł (L d i (t) / dt) = SL I (S), dove con Ł si è indicato l'operatore trasformata di LAPLACE.**

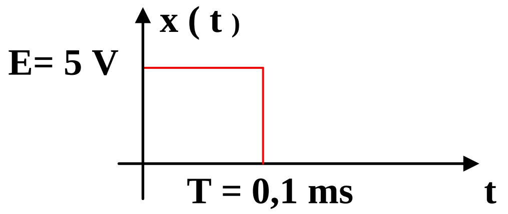
Per quanto scritto in precedenza si desume che:
Y (S) / X (S) = R I (S) / (R + SL) I (S) = dopo avere semplificato =
= R / R + SL, ed essa è la funzione di trasferimento cercata.

Essa si può sistemare raccogliendo il valore della R a denominatore ottenendo così la forma definitiva: **Y (S) / X (S) =** $\mathbf{\cancel{R} / \cancel{R}\,(\,1 + L/\,R\,S\,) =}$
= 1 / (1 + L / R S), ma **L / R** ci rappresenta la Costante di Tempo del circuito L – R dato, che è indicata per comodità come **τ**.

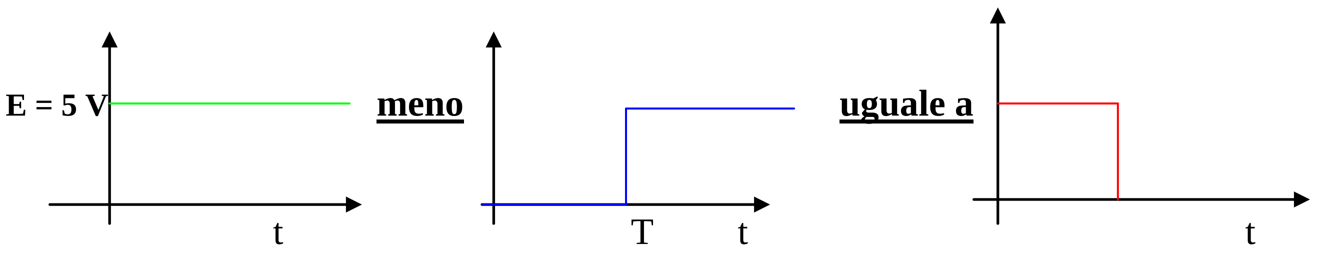
La funzione di trasferimento, nella sua forma definitiva, è esprimibile nel modo seguente:

Y (S) / X (S) = 1 / 1 + τ S.

L'utilità della funzione di trasferimento, di un qualsiasi SISTEMA, è evidente, poiché qualunque sia l'ingresso noi possiamo dedurre la corrispondente risposta;
infatti sarà sempre: **Segnale USCITA = (f. d. T) . Segnale INGRESSO**.
Giunti alla determinazione della funzione di trasferimento è necessario mettere in evidenza il segnale di ingresso. Il segnale di ingresso fornito è così rappresentato:



Ma il segnale dato non corrisponde ai segnali da noi visti, ossia non è né un gradino, né un'esponenziale e né un segnale periodico come quello sinusoidale, ecc. Comunque è possibile pensare il segnale in oggetto come una differenza fra un segnale a gradino ed un segnale a gradino traslato di un lasso di tempo T:



Da ciò è possibile ammettere che: $\mathbf{x(t) = E\,u(t) - E(t - T)}$, da cui trasformando il segnale di ingresso, tenendo presente che,

$$\mathbf{Ł\, u(t) = 1 / S} \implies \mathbf{Ł\, E\,u(t) = E / S} \quad \text{ed è}$$

$$\mathbf{Ł\, E\,u(t - T) = E / S\, e^{-ST}}$$ e che perciò il segnale di ingresso è esprimibile come:

$$\mathbf{X(S) = E / S - E / S\, e^{-ST}.}$$

Pertanto, la RISPOSTA del sistema a tale ingresso sarà esprimibile come:

$$\mathbf{Y(S) = (f.\,d.\,T) \,.\, X(S).}$$

Nel nostro caso risulterà allora:

$$\mathbf{Y(S) = (1 / 1 + \tau S)(E / S - E / S\, e^{-ST}) = E / S(1 + \tau S) - E\,e^{-ST} / S(1 + \tau S)}$$

La risposta del sistema è ora studiabile attraverso il **principio di sovrapposizione degli effetti**, ossia si esamina la risposta del sistema legata alla parte $\mathbf{E / S (1 + \tau S)}$ e si sottrae la risposta del sistema legata alla parte $\mathbf{E\, e^{-ST} / S (1 + \tau S)}$.

In definitiva è come se si ammettesse che la risposta $\mathbf{Y(S) = Y1(S) - Y2(S)}$, per il principio di sovrapposizione da noi menzionato.

<u>Risposta del sistema legata alla parte</u> $\mathbf{E / S (1 + \tau S)}$

Applicando la decomposizione in fratte semplici si ottiene :
$\mathbf{E / S (1 + \tau S) = A / S + B / 1 + \tau S}$, da cui si ricava la relazione:

$$\mathbf{A + A\tau S + BS = E.}$$

Da quest'ultima relazione si deduce il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{A\tau + B = 0} \\ \mathbf{A = E} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{A = E} \\ \mathbf{B = - A\tau = - E\tau} \end{cases}$$

Scriveremo allora, $\mathbf{E / S (1 + \tau S) = E / S - E\tau / 1 + \tau S}$,
dalla seconda relazione ricaviamo $\boldsymbol{\tau}$ ottenendo così la forma definitiva:

$$\mathbf{Y1(S) = E / S - E\cancel{\tau} / \cancel{\tau}(1 + S / \tau) = E / S - E / 1 + S / \tau.}$$

Quest'ultima relazione rappresenta la risposta del sistema al gradino di valore E e di essa, siamo in grado di definire la corrispondente ANTITRASFORMATA.

$$\mathbf{y1 = y1(t) = Ł^{-1}(E / S) - Ł^{-1}(E / 1 + S / \tau) = E\, u(t)(1 - e^{-t/\tau}).}$$

<u>Risposta del sistema legata alla parte</u> $\mathbf{E\, e^{-ST} / S (1 + \tau S)}$

Ricordando la proprietà di TRASLAZIONE, in quanto la seconda parte è legata ad un segnale a gradino, però traslato in avanti di un tempo pari a T, si ricava che: $\mathbf{y2 = y2(t) = E\, u(t - T) - E\, e^{-((t-T)/\tau)}\, u(t - T).}$

In conclusione l'andamento del tempo della risposta del circuito al segnale di ingresso indicato è dato da:
$\mathbf{y(t) = y1(t) - y2(t) = E\, u(t)(1 - e^{-t/\tau}) - E\, u(t - T)(1 - e^{-((t-T)/\tau)}).}$

Si ricordi che per comodità si è ammesso che:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}(Y (S)) = y (t), \\ \mathcal{L}^{-1}(Y1 (S)) = y1 (t), \\ \mathcal{L}^{-1}(Y2 (S)) = y2 (t). \end{cases}$$

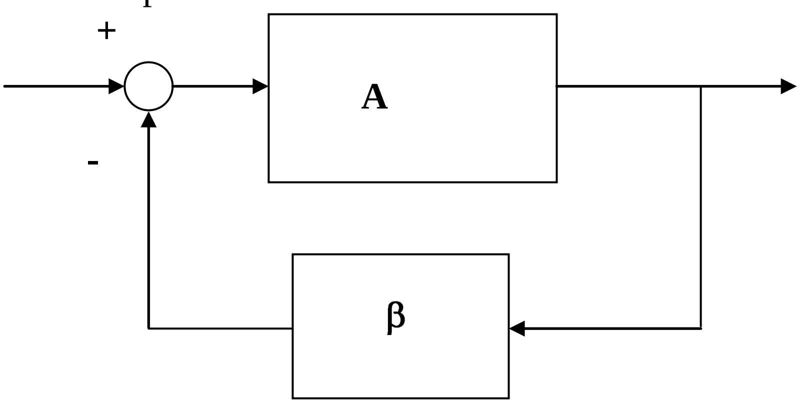
Infine, sostituendo i valori indicati, come ipotesi dell'esercizio, si ottengono i valori di tutte le grandezze.
Il secondo esercizio svolto si propone di far riflettere lo studente sulla STABILITA'. Si ricorda che nello **studio della stabilità** si può impiegare il **criterio semplificato di BODE**, ma anche quello **generalizzato**.
Il **criterio semplificato** è legato al solo diagramma del modulo della **G0L**, ossia della funzione di trasferimento ad anello aperto di un sistema in retroazione. Spesso è sufficiente valutare solo detto diagramma per verificare la stabilità del sistema dato; infatti è sufficiente che il diagramma del modulo tagli l'asse delle ω con una pendenza di 20 dB / decade.
Il **criterio generale**, invece, prevede l'uso sia del diagramma del modulo che del diagramma delle fasi della **G0L**; infatti nel caso controverso in cui il diagramma del modulo tagli l'asse delle ω con una pendenza di 40 dB / decade, (mentre si osserva che se il taglio avvenisse con una pendenza di 60 dB / decade il sistema dato risulterebbe certamente **instabile**), allora si introduce il diagramma delle fasi ed in corrispondenza della ω in cui avviene l'annullamento del modulo deve risultare la fase maggiore di – 180° o viceversa, la fase deve risultare maggiore di – 180° nel punto in cui il modulo annulla il suo valore.

Esercizio 2

Un amplificatore con guadagno o f. d. T,

$$A = 1000 / (1 + 10^{-3} S) (1 + 10^{-5} S)$$

viene reazionato con una rete resistiva β, (in altri termini β funge da blocco proporzionale). Determinare β in modo tale che il sistema sia stabile.
Il sistema si può così schematizzare:

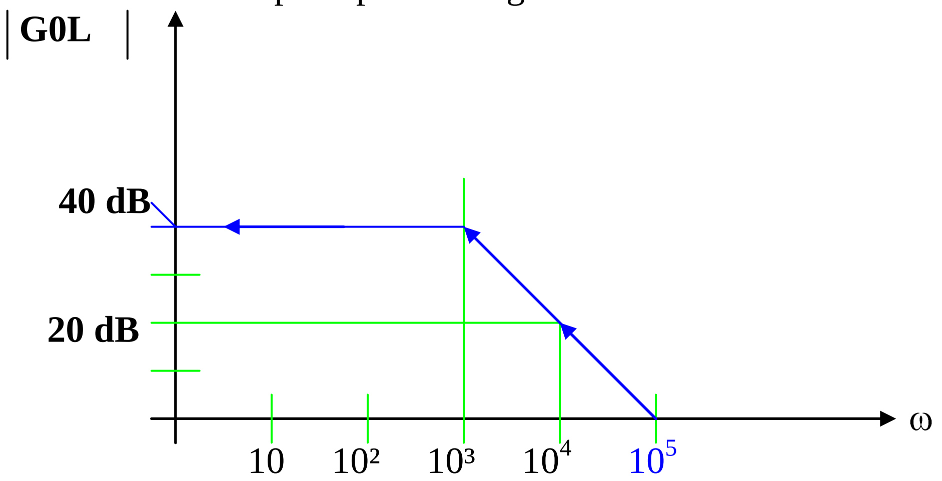


Il guadagno ad anello aperto del sistema in retroazione dato si ottiene come:

$$\mathbf{G0L = \beta A = 1000\,\beta \,/\, (1 + 10^{-3}\,S)(1 + 10^{-5}\,S).}$$

La **G0L** risulta avere due poli in ω eguale a 1000 rad / s e in ω eguale a 100 000 rad / s. In questo caso si può applicare il criterio semplificato di BODE, in quanto noi sappiamo che il primo polo determina una caduta del diagramma del modulo di 20 dB / decade e perciò se vogliamo che il sistema sia stabile, il taglio con l'asse delle ω deve avvenire, con questa stessa pendenza.

Pertanto il diagramma del modulo deve tagliare l'asse delle ω proprio in corrispondenza del secondo polo di 100 000 rad / s. In questo modo siamo in grado di valutare quale sia il valore del modulo della **G0L** che può fornire ciò. Si tratta ora di un semplice problema grafico.



Per costruzione grafica dal secondo polo, con ω = 100 000 rad / s, inviamo una retta con pendenza di 20 dB / decade. Perciò nella decade precedente, ossia quando ω assume il valore di 10 000 rad / s, il grafico si innalza a 20 dB ed infine in corrispondenza di ω uguale a 1000 rad / s, ossia in corrispondenza del primo polo, la retta sale a 40 dB. Proprio questo valore deve avere il modulo della **G0L**, affinché il sistema retroazionato sia stabile, come richiesto dall'esercizio.

Resta da definire il valore da attribuire a **β** per ottenere la stabilità richiesta. Ma noi sappiamo che, per definizione, è:

$|\mathbf{G0L}|$ **= 20 log M =** (per quanto ricavato dal ragionamento grafico) = **40 dB**, tenendo presente che per noi **M** è eguale a **1000 β**.

Ne segue che, **log M = 40 / 20 = 2,** $\Rightarrow$ ricordando che l'operazione inversa al logaritmo decimale è l'elevazione con base 10, si desume che:

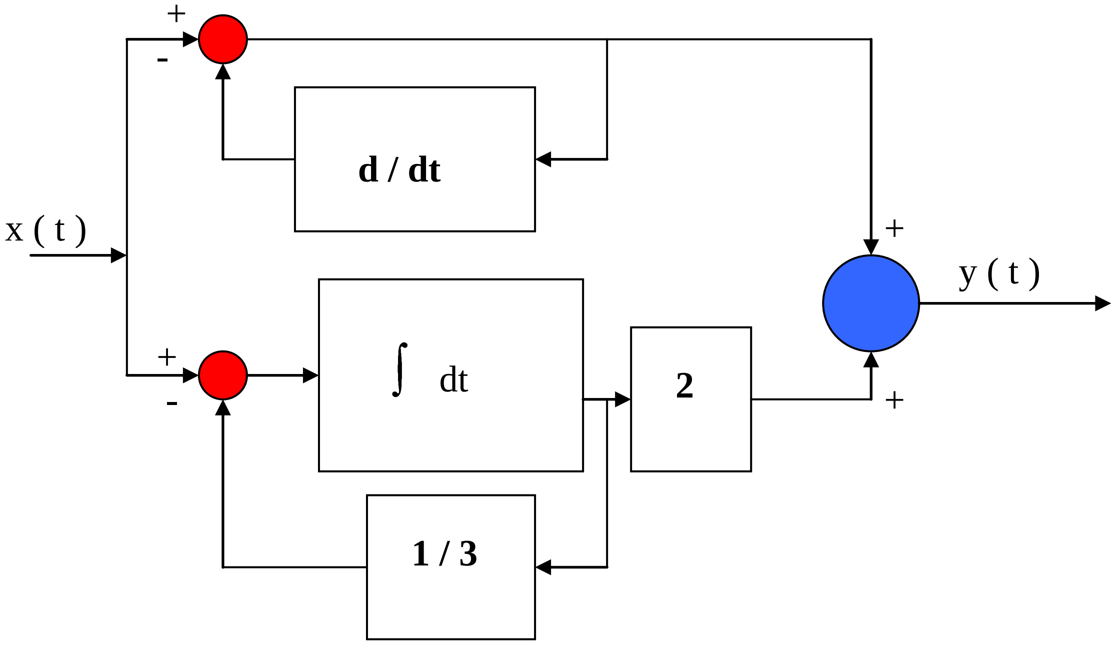
$$\mathbf{M = 10^2 = 100}.$$

Ricordando che **M** =**1000 β = 100**, è possibile ricavare il valore di **β** con questa semplice operazione di divisione: **β = 100 / 1000 = 1 / 10 = 0,1.**

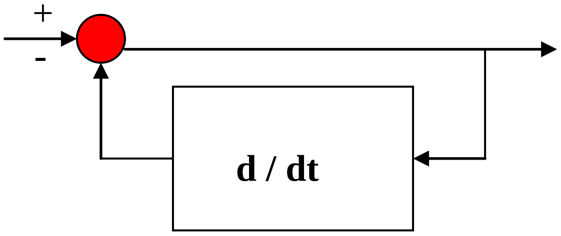
In definitiva, l'amplificatore dato, con retroazione resistiva, risulta stabile se la rete resistiva stessa risulta avere un valore pari a **0,1**.

Esercizio 3

L'esercizio, richiede di determinare la **funzione di trasferimento G (S)** di un sistema particolare, come quello di figura:



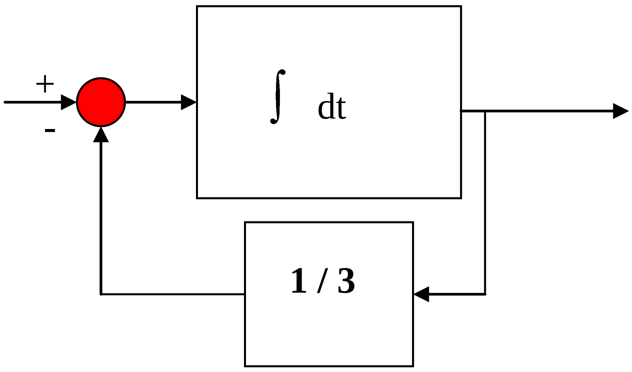
Consideriamo la prima retroazione negativa:



da cui si ottiene che la sua funzione di trasferimento è del tipo,
G / 1 + GH, con G (S) = 1 ed H (S) = d / dt, perciò si desume che,

f.d.T 1 = 1 / 1 + d / dt

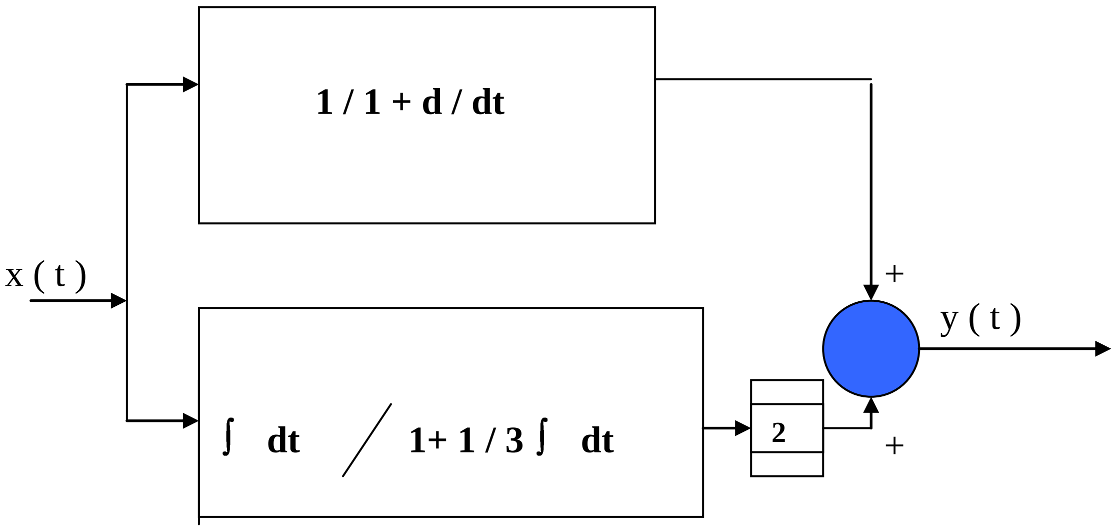
Consideriamo la seconda retroazione negativa, (vedi FIGURA sotto riportata):



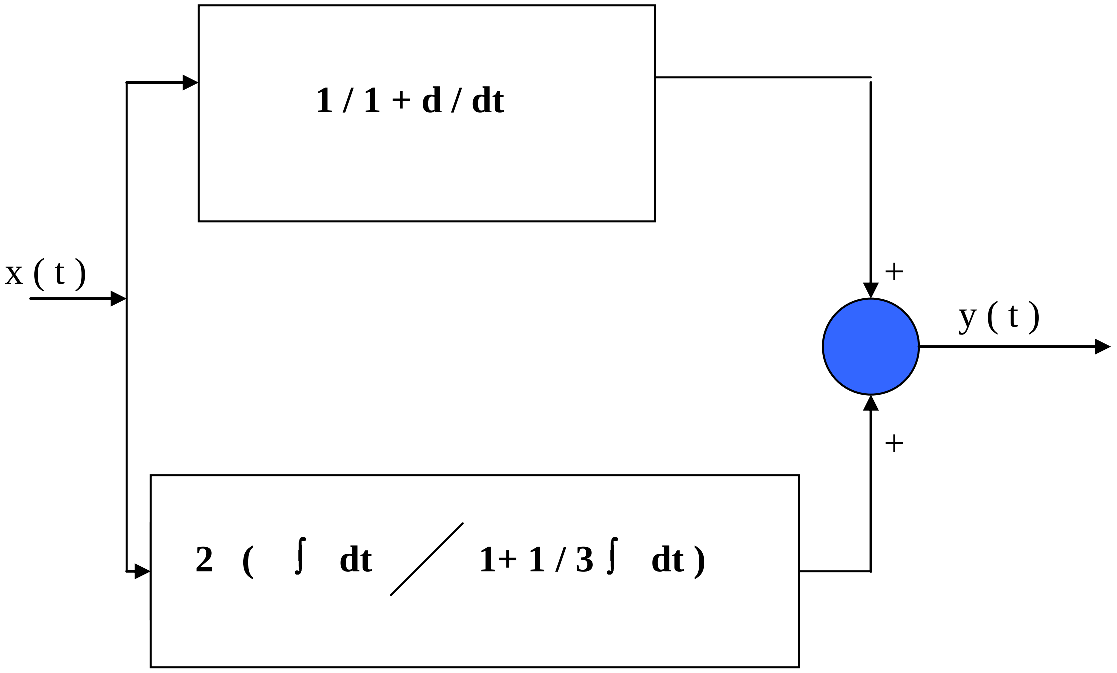
In questo caso la funzione di trasferimento, è della stessa tipologia, ma
G (S) = $\int$ dt ed H (S) = 1 / 3, pertanto si deduce che:

$$\textbf{f. d. T 2} = \frac{\int dt}{1 + 1/3 \int dt}.$$

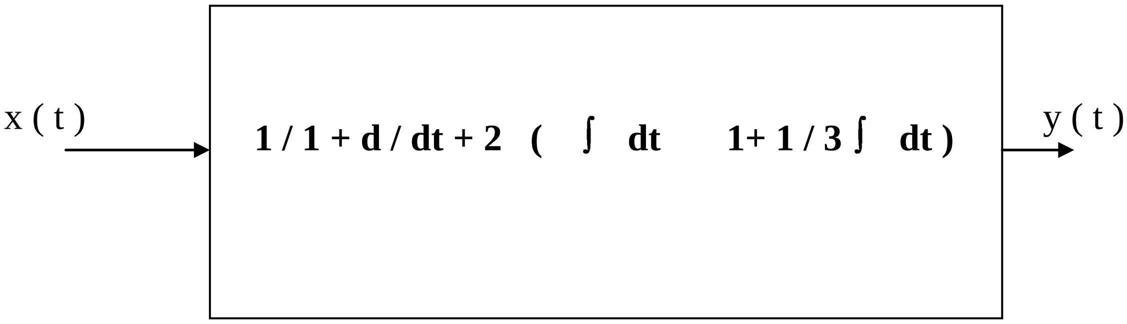
Il sistema dato quindi viene trasformato nel sistema seguente:



A questo punto si tratta del parallelo di due sottosistemi, dove il ramo inferiore è caratterizzato dalla serie di due blocchi, perciò ottengo che: (vedi pagina successiva)



A questo punto la funzione di trasferimento complessiva del sistema dato è :
(f. d. T) totale = y (t) / x (t) = 1 / 1 + d / dt + 2 (∫ dt/ 1+ 1 / 3 ∫ dt).
Posso allora ritenere che il sistema complesso dato, sia esprimibile in una forma equivalente, in modo più semplice, dalla forma seguente:



Trasformando secondo Laplace, tenendo presente che :
L x (t) = X (S); L y (t) = Y (S); L (d x / dt) = S X (S) ;

L (∫ x (t) dt) = X (S) / S e quindi nel dominio trasformato si ha che:

$G(S) = Y(S) / X(S) = 1/1 + S + (2/S)/1 + (1/3S) =$
$= 1/S+1 + 2/(S+ 1/3)$.

Se consideriamo il massimo comune divisore la funzione di trasferimento nel dominio di Laplace prende la seguente forma:

$G(S) =(3S + 7/3) / (S+1)(S+1/3)$.

La funzione di trasferimento del sistema dato presenta quindi, uno zero, di valore – 7 / 9, e due poli di valore rispettivamente, $p1 = -1$ e $p2 = -1/3$.
Visto che i due poli hanno valore negativo, sicuramente, il sistema dato risulta stabile.
Il problema richiede di esaminare,anche, la **risposta del sistema ad un gradino di valore E**.
La risposta del sistema si ottiene nel modo seguente:
$Y(S) / X(S) = G(S)$, ma ciò implica che: $Y(S) = G(S)\,X(S)$ essendo $X(S) = E/S$. Essendo $L(E\,u(t)) = E/S$.
Nel nostro esempio se ne ricava che:

$$Y(S) = E/S\,(1/S+1 + 2/(S+ 1/3)) =$$
$$= E/S\,(S+1) + 2E/S\,(S+ 1/3).$$

Dato che il sistema è LINEARE posso trattare separatamente I due termini precedenti: il primo termine è legato a **$E/S(S+1)$**, da cui deduco,
$E/S(S+1) = A/S + B/S+1.$
Risolvendo il sistema si desume che: $A = E$ e $B = -A = -E$.
In definitiva ottengo che: **$E/S(S+1) = E/S - E/S+1 =$**
$=E(1/S - 1/S+1).$

Il secondo termine $2E/S(S+1/3)$, come nel caso del primo termine, lo si pone uguale a: **$2E/S(S+1/3) = C/S + D/S+1/3$**, e risolvendo il sistema, matematico, si ottiene che: $C = 6E$ e $D = -C = -6E$ e da ciò si ricava **$2E/S(S+1/3) = 6E/S - 6E/S+1/3 =$**
$= 6E(1/S - 1/S+1/3).$

Concludendo la risposta del sistema dato al gradino di valore E, nel dominio delle frequenze, è del tipo:
$Y(S) = E(1/S - 1/S+1) + 6E(1/S - 1/S+1/3)$.

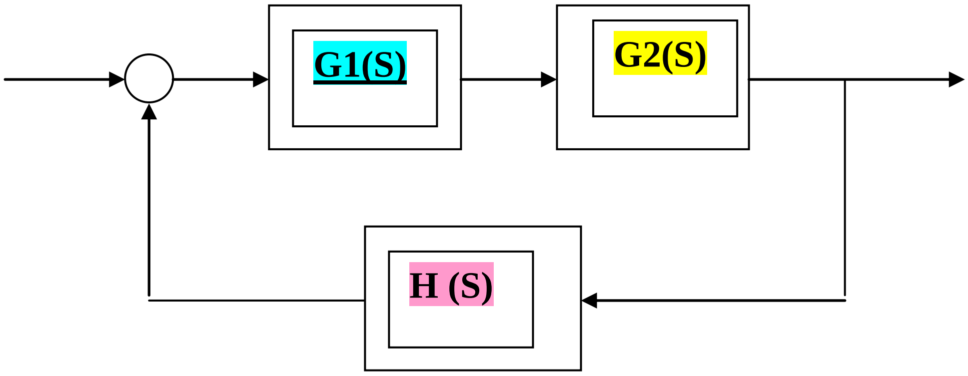
La sua antitrasformata $L^{-1}\,Y(S)$ produce la risposta nel dominio del tempo $y(t)$, eguale a:

$y(t) = E(u(t) - e^{-t}u(t)) + 6E(u(t) - e^{-1/3t}) =$
$= E\,u(t)(7 - e^{-t} - e^{-1/3t})$

Esercizio 4

L'esercizio si propone di proseguire l'esame della stabilità dei sistemi in retroazione. In questo caso si applica, però, il **criterio generale della stabilità**, secondo BODE.
L'esercizio è uno fra i tanti proposti per detto studio, comunque qualsiasi sistema sia dato, i passi risolutivi necessari a stabilire la stabilità o meno, sono sempre i medesimi.

Si studi la stabilità del seguente sistema in retroazione:



dove $G1(S) = 10^6 / S + 10^3$, con $G2(S) = 10^4 \ (S + 10^2 \ ) / S + 10^4$ e con $H(S) = 10^2 \ / S + 10^5$.

Per risolvere il quesito è necessario partire dal calcolo della **G0L**.

In questo caso, la parte superiore del sistema è rappresentata da due blocchi con funzioni di trasferimento distinte, ma collegate in serie fra loro, perciò la f. d. T complessiva è data come:
$$G(S) = G1(S) \,.\, G2(S) = 10^6 \,.\, 10^4 \,.\, (S + 10^2 \ ) / (S + 10^3) (S + 10^4) =$$
$$G(S) = 10^6 \,.\, 10^4 \,.\, 10^2 \,.\, (1 + S / 10^2) / 10^3 \,.\, 10^4 \,.\, (1 + S / 10^3) (1 + S / 10^4)$$

$$= G(S) = G1(S) \,.\, G2(S) = 10^5 \,.\, (1 + S / 10^2) / (1 + S / 10^3) (1 + S / 10^4) \,.$$

In base a quanto ricavato, tenendo conto che la parte di reazione negativa è
$$H(S) = 10^2 \ / S + 10^5 = 10^2 \ / 10^5 \,.\, (1 + S / 10^5) = 1 / 10^3 \,.\, (1 + S / 10^5) \,.$$
si determina la funzione di trasferimento **G0L** ad anello aperto, di un sistema in retroazione.
Pertanto nella ricerca della stabilità di un sistema, la prima fase, corrisponde a quella di determinare la **G0L.** La seconda fase corrisponde nella determinazione dei diagrammi di BODE del Modulo. Se nel punto in cui tale diagramma, taglia l'asse delle ω con una pendenza di **20 dB / decade**, il

sistema è certamente **stabile**, nel caso in cui è tagliato con una pendenza di **60 dB / decade** il sistema è sicuramente **instabile**. Nel caso, infine in cui detto taglio avviene con una pendenza di **40 dB / decade**, allora è necessario passare alla terza fase, ossia costruire anche il diagramma delle Fasi e valutare che il taglio avvenga per una fase maggiore di meno 180°. **Se ciò avviene il sistema è stabile, in caso contrario è instabile**.

La **G0L** si ottiene, dunque, come prodotto di **G(S) per H(S)**, da cui si ottiene:

G0L =

$$= (10^{\cancel{5}} . (1 + S / 10^2) / (1 + S / 10^3) (1 + S / 10^4)) . (1 / \cancel{10^3} . (1 + S / 10^5)$$

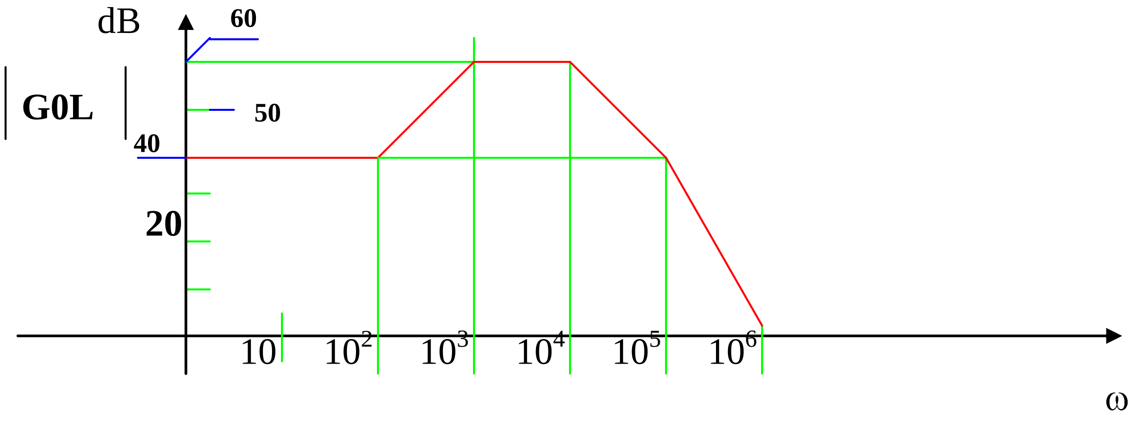
da cui si ottiene **:**

$$G0L = 10^2 . (1 + S / 10^2) / (1 + S / 10^3) (1 + S / 10^4) (1 + S / 10^5)$$

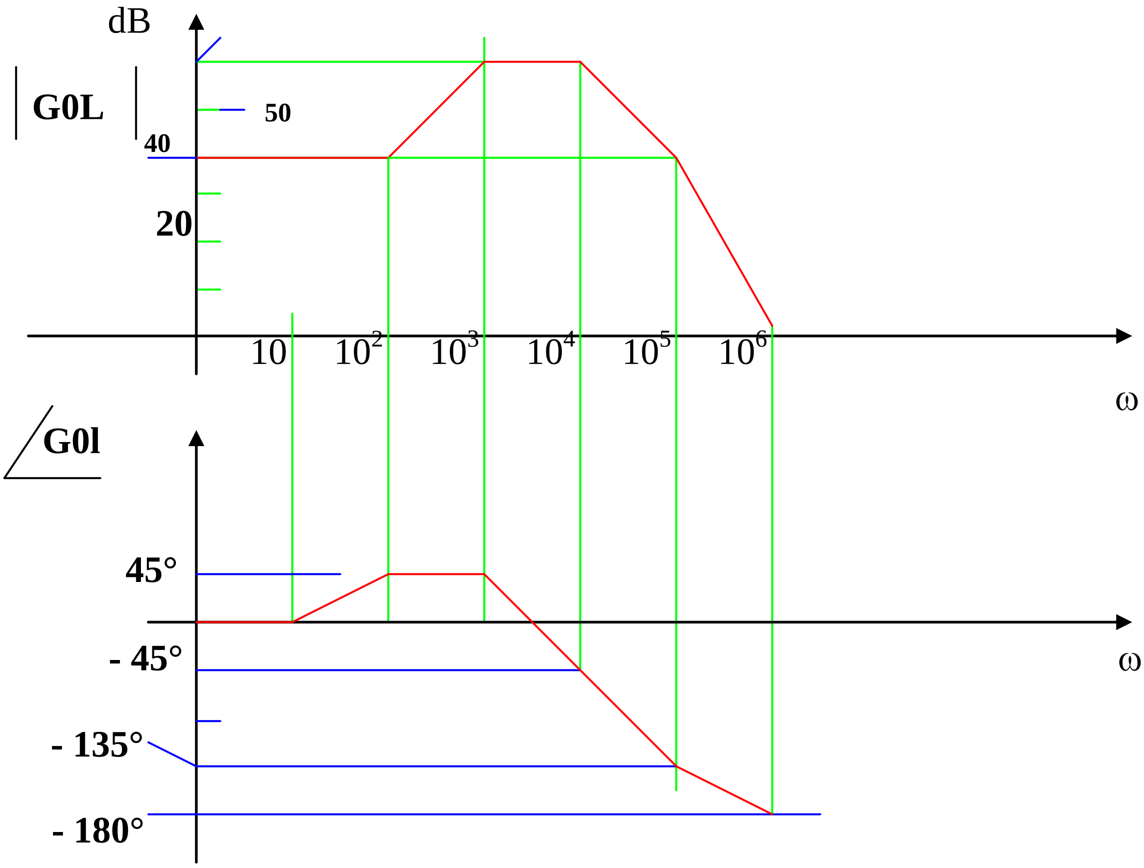
Costruiamo ora il diagramma del Modulo, | G0L| :

per costruire il diagramma è necessario tenere presente che la funzione di trasferimento Open Loop, ossia la **G0L**, è caratterizzata da un termine costante **10** , da uno **zero** alla frequenza **10** rad / s, da tre **poli** rispettivamente alle frequenze **10** , **10** e **10** rad / s.

Si ricorda, inoltre, che il termine costante **10** per essere convertito in decibel, deve essere applicata la relazione: **20 Log 10 = 40 dB**. Perciò il grafico del modulo della nostra **G0L** parte da **40 dB**, dopo di che esso risulta influenzato dallo **zero** e dai **poli**. Per comodità rappresento il diagramma complessivo del modulo, mentre per gli studenti sollecito di effettuare i diagrammi parziali ed eseguire la somma e verificare quindi il loro diagramma complessivo con quello qui indicato.



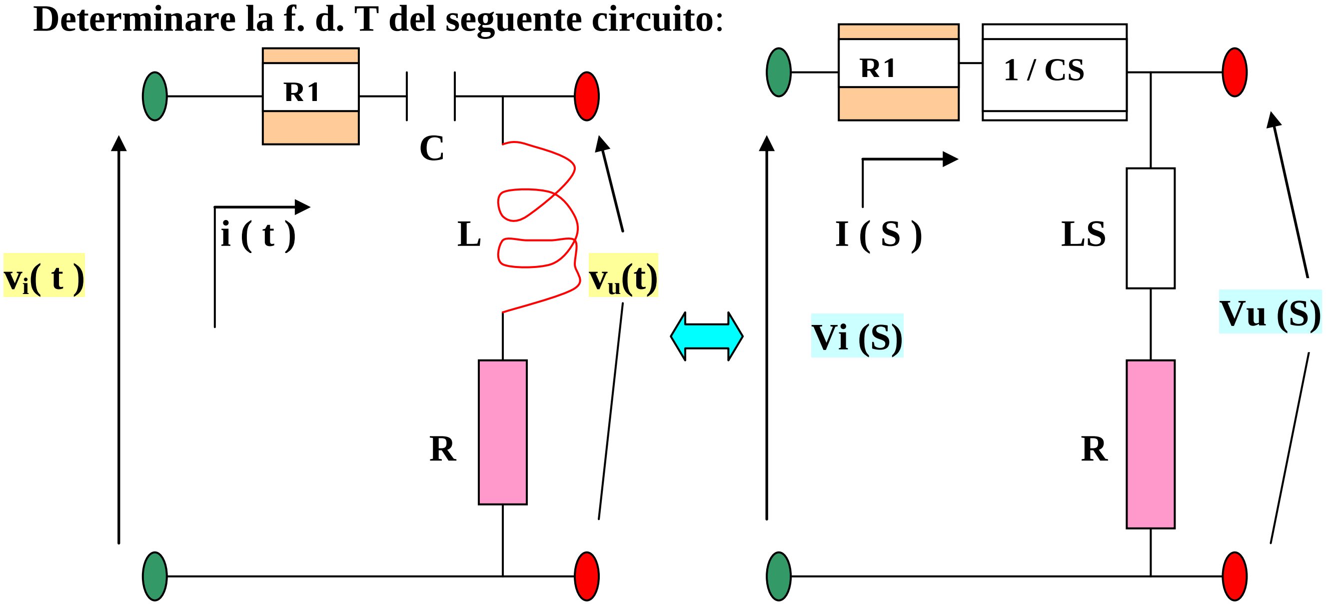
Devo **costruire il diagramma delle Fasi**. Ho scelto anche qui di indicare il diagramma complessivo delle Fasi, (per lo studente vale lo stesso discorso fatto poco sopra). Riporto anche il diagramma del modulo:



Il sistema risulta instabile, perché siamo al limite della stabilità; infatti quando il diagramma del modulo taglia l'asse delle ω, il diagramma della fase assume una fase di – 180°.

Esercizio 5

Determinare la f. d. T del seguente circuito:



In questo caso risulta che:
Vi (S) = V_{R1}(S) + V_C (S) + V_L (S) + V_R (S) =
Vi (S) = R1 I (S) + I (S) / CS + I (S) LS + R I (S) =
Vi (S) = I (S) . (R1 + 1 / CS + LS + R).
In base a quanto ricavato in precedenza si ottiene immediatamente che:
I (S) = Vi (S) / (R1 + 1 / CS + LS + R), da cui risalgo all'espressione,

I (S) = Vi (S) CS / LCS² + (R1 + R) CS + 1.

Sapendo che, **Vu (S) = I (S) . (R + LS)**, si desume che:

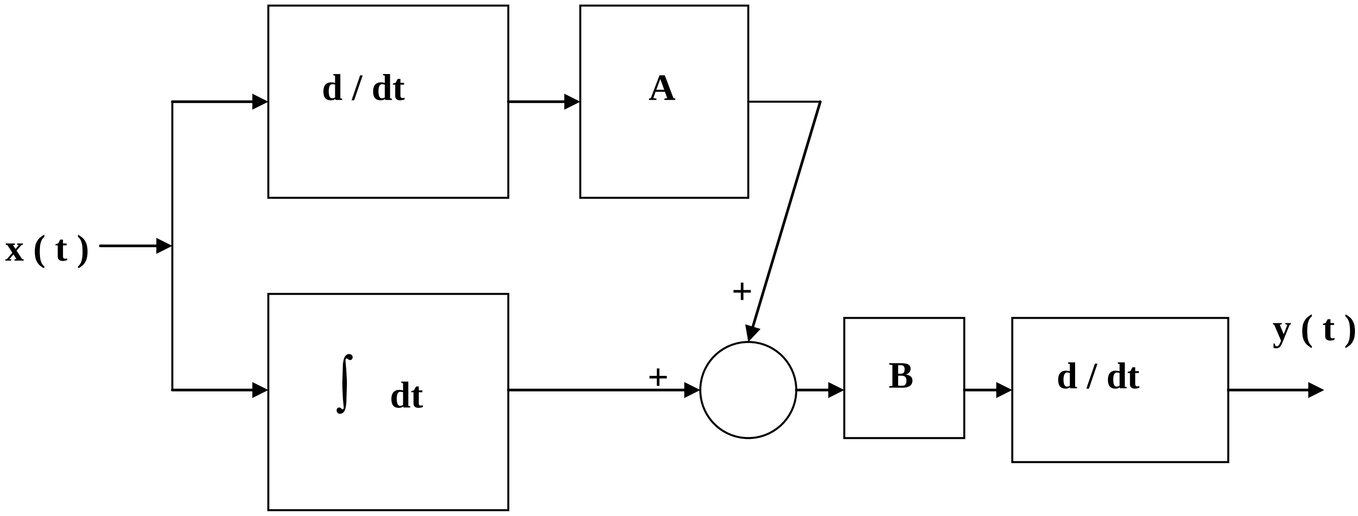
Vu (S) = Vi (S) . (R + LS) . CS / LCS² + (R1 + R) CS + 1.
In definitiva la funzione di trasferimento del sistema dato, assume la seguente forma:

H (S) = f. d. T = Vu (S) / Vi (S) =
= (R + LS) . CS / LCS² + (R1 + R) CS + 1, da cui sviluppando il prodotto a numeratore ne risulta,
H (S) = LCS² + R CS / LCS² + (R1 + R) CS + 1.

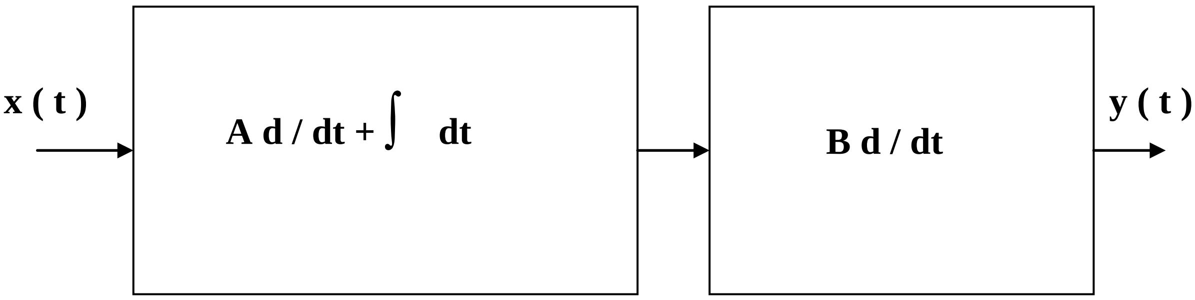
Quest'ultima relazione risponde a quanto richiesto nel testo dell'esercizio.

Esercizio 6

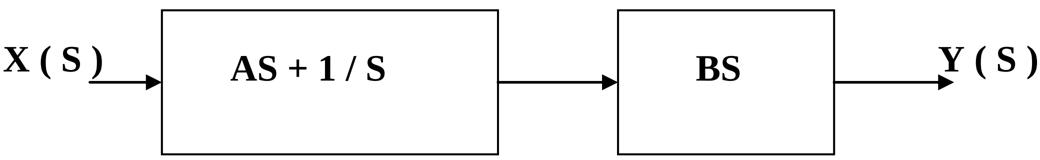
Determinare la funzione di trasferimento del seguente sistema :



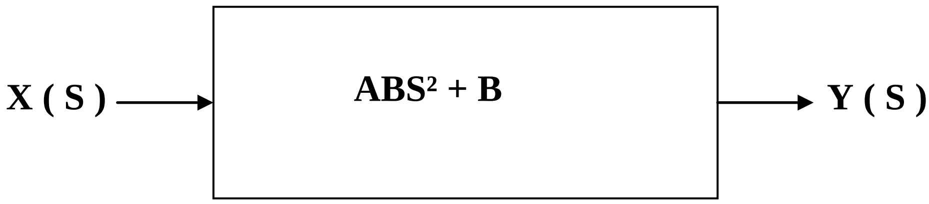
Si può procedere semplificando il sistema dato, essendo costituito dal parallelo di due blocchi potremo scrivere: (Si tenga conto che il ramo superiore prevede la serie di due blocchi, come anche la parte destra del nodo sommatore)



Passiamo, ora, per comodità al modello Trasformato:



Ne segue allora che, visto che i blocchi sono in serie:



In conclusione la funzione di trasferimento del sistema dato è:

$$\mathbf{Y(S) / X(S) = H(S) = ABS^2 + B.}$$

<u>Esercizio 7</u>

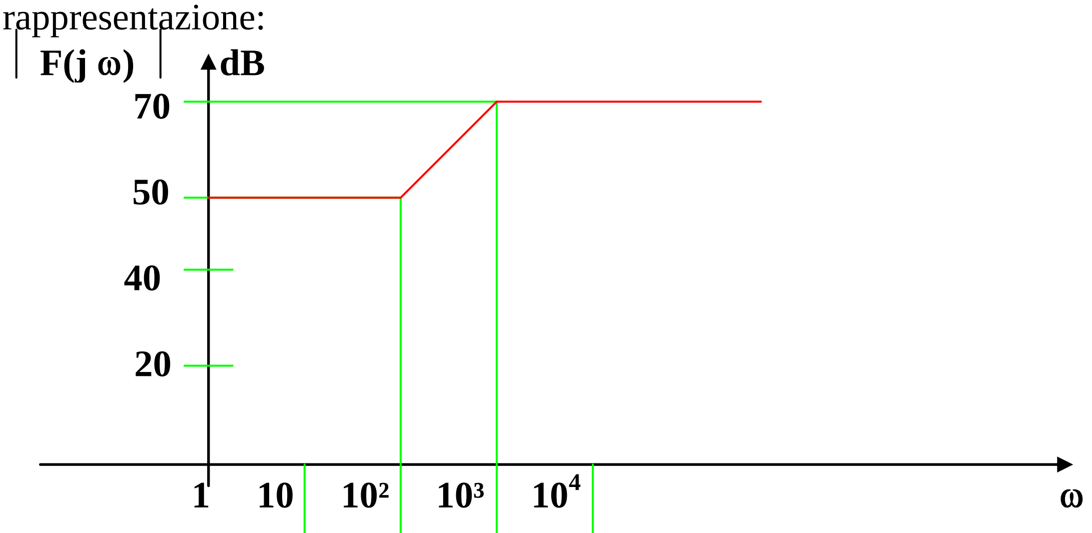
Tracciare il diagramma di Bode dell'ampiezza e della fase della seguente f. d. T: $F(j\omega) = 31{,}6\,(1 + j\,0{,}01\,\omega) / (1 + j\,0{,}001\,\omega)$.

Calcoliamo inizialmente il guadagno statico: esso si calcola ammettendo che ω sia nullo. In questo caso si desume, ammettendo ω = 0, che:
$F(0) = F_0 = 31{,}6$. Il suo valore i decibel si ottiene come:

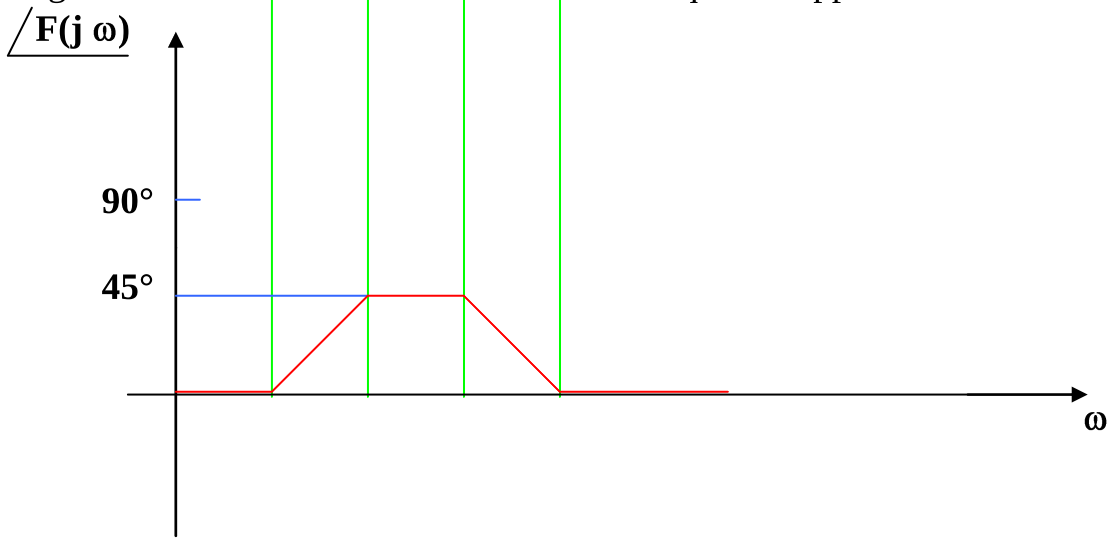
$$(31{,}6)\,dB = 20 \log 31{,}6 = 50\ dB.$$

Si aggiunge che la funzione di trasferimento data, presenta uno zero z = 100 rad / s ed un polo p = 1.000 rad / s.

Il diagramma di Bode del Modulo o delle Ampiezze risulta avere la seguente rappresentazione:



Il diagramma delle Fasi ha invece questa rappresentazione:

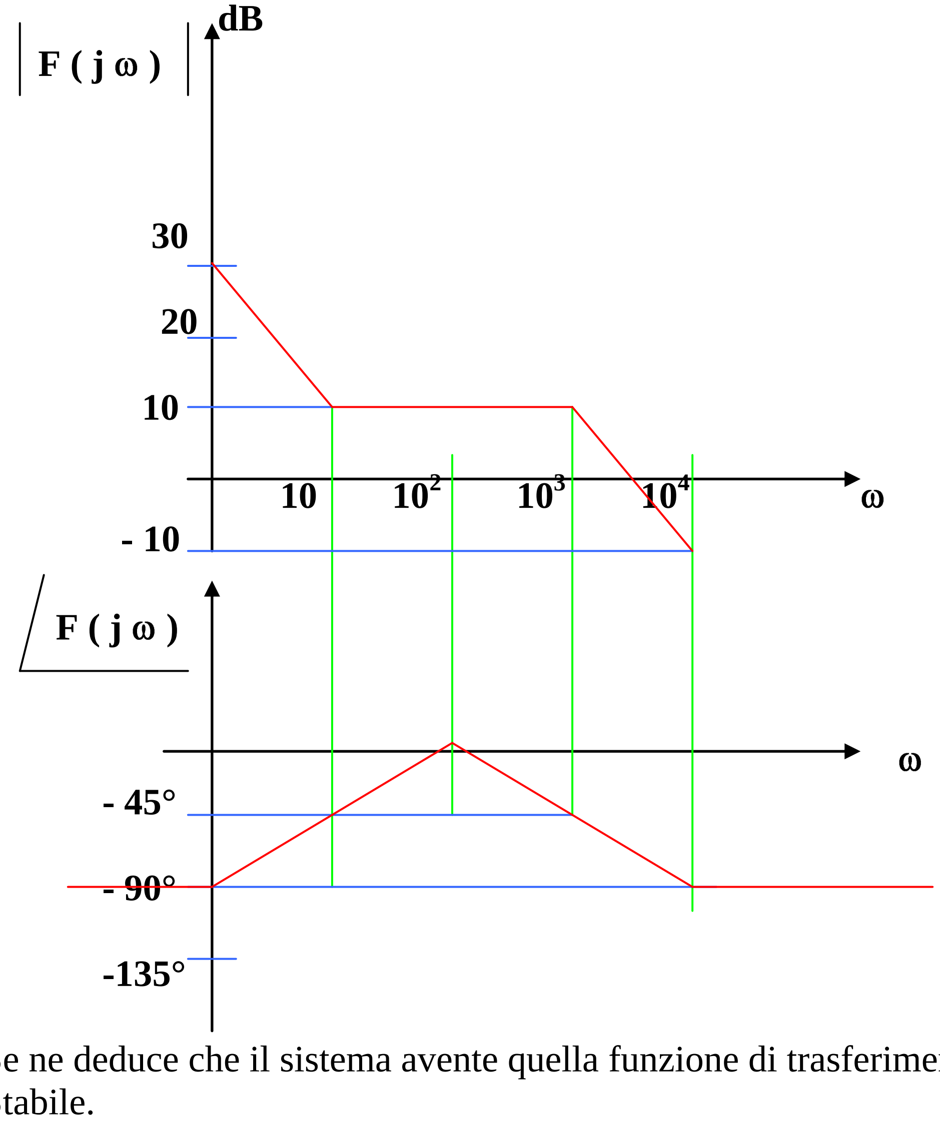


Si possono considerare ulteriori esercizi sulla stabilità. Il procedimento è lo stesso di quello introdotto precedentemente, ossia si applica il criterio semplificato della stabilità, se questo non è sufficiente si può impiegare il criterio generale della stabilità di Bode. Alcuni esempi si possono prendere in considerazione da questi esercizi:

F (j ω) = 31,6 (1 + j 0,1 ω) / (j ω) (1 + j 0,001 ω).

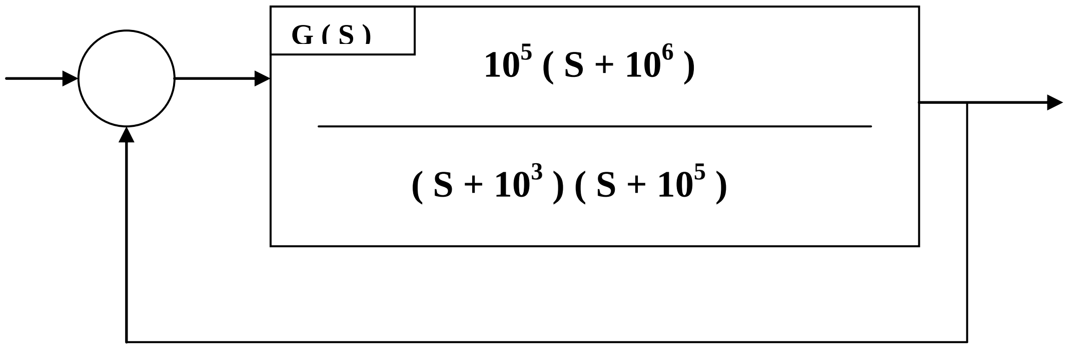
In questo esempio il sistema possiede uno zero in **z = 10** rad / s e due poli, rispettivamente **p1 = 0** e **p2 = 1.000** rad / s.

Si tenga presente che: (31,6) dB = 20 log 31,6 = 30 dB. Costruiamone direttamente i due grafici del modulo e della fase:



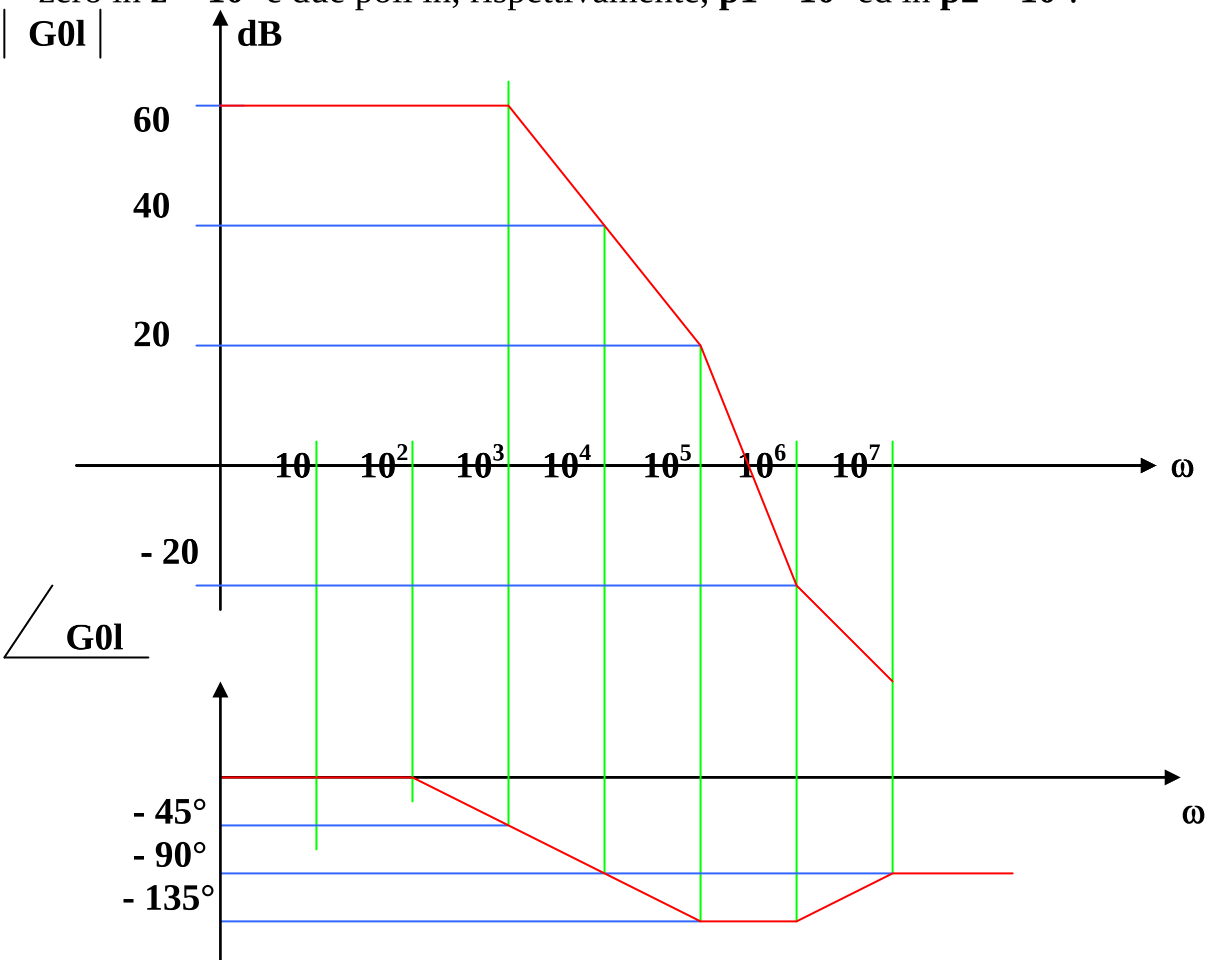
Se ne deduce che il sistema avente quella funzione di trasferimento è Stabile.

Un altro esempio potrebbe essere il seguente:



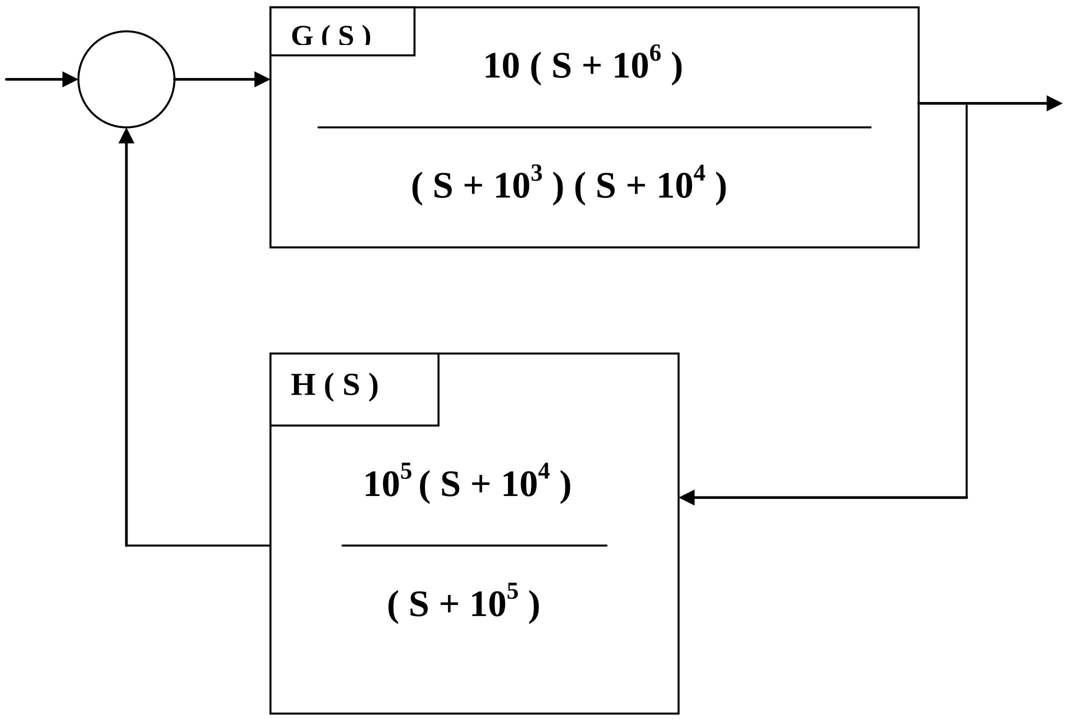
In questo caso essendo **H (S) = 1**, la G0l è data dalla sola **G (S):**

$\mathbf{G0l\ (S) = 10^5 \cdot 10^6\,(1 + 10^{-6}\,S) / 10^3 \cdot 10^5 \cdot (1 + 10^{-3}\,S)\,(1 + 10^{-5}\,S)} =$
$= \mathbf{10^3 \cdot (1 + 10^{-6}\,S) / (1 + 10^{-3}\,S)\,(1 + 10^{-5}\,S).}$
Costruiamone i diagrammi di Bode sia delle Ampiezze che delle Fasi.
Si tenga presente che: $\mathbf{20 \log 10^3} = \mathbf{60}$ dB ed inoltre il sistema possiede uno zero in $\mathbf{z = 10^6}$ e due poli in, rispettivamente, $\mathbf{p1 = 10^3}$ ed in $\mathbf{p2 = 10^5}$.



Il sistema per il criterio generale di **Bode** è **<u>STABILE</u>.**

Un altro **esercizio** potrebbe essere il seguente**:**



In questo caso la funzione di trasferimento ad anello aperto, la **G0l**, con cui studiamo la stabilità del sistema, è costituita dal prodotto fra la **G (S)** e la **H (S)**, ossia **G0l (S) =**

$$\boxed{(\cancel{10^7} (1 + 10^{-6} S) / \cancel{10^7} (1 + 10^{-3} S) \cancel{(1 + 10^{-4} S)}) \,.\, (10^9 \cancel{(1 + 10^{-4} S)} / 10^5 (1 + 10^{-5} S))}$$

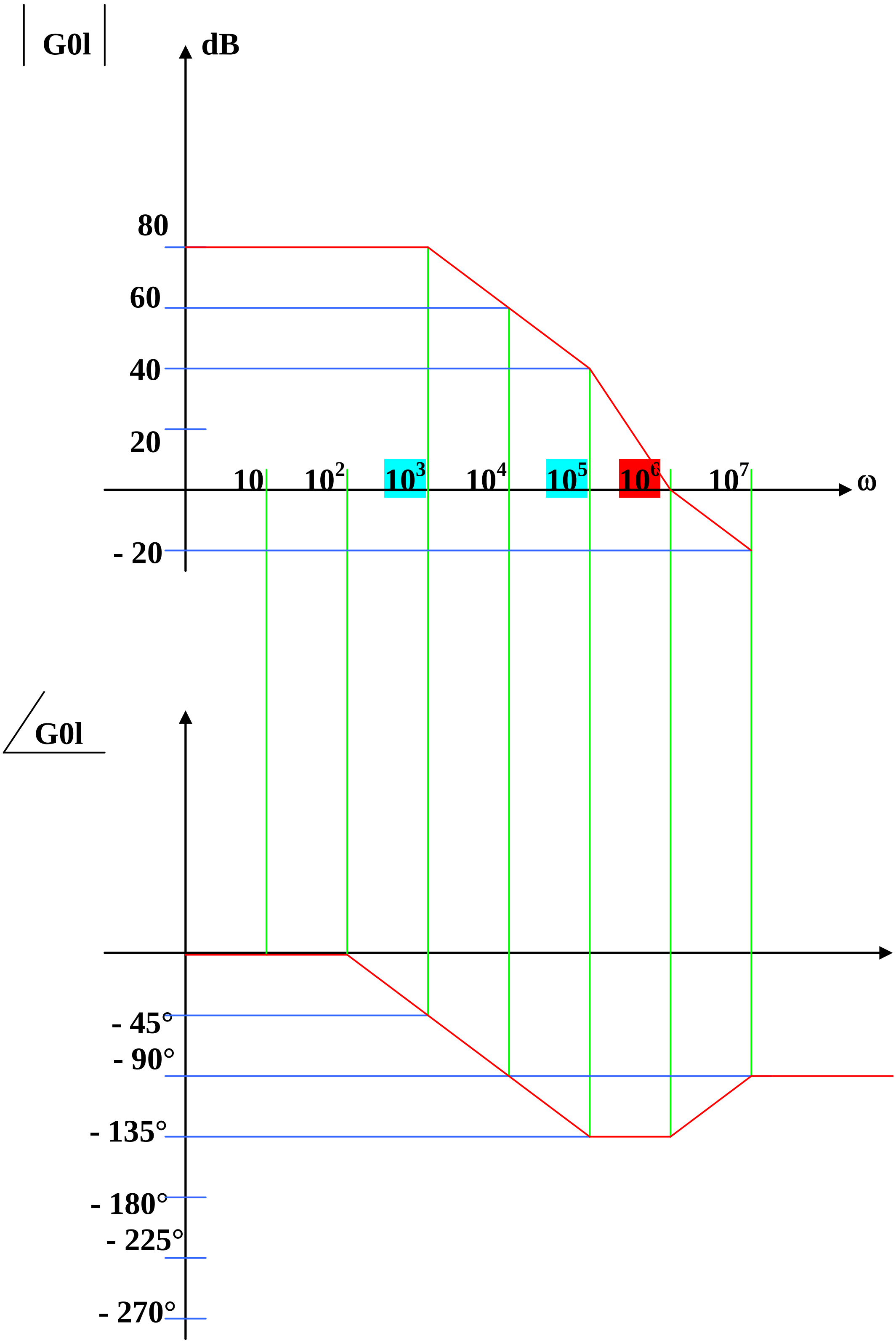
Semplificando ed ordinando si ottiene che:

$$G0l = 10^4 (1 + 10^{-6} S) / (1 + 10^{-3} S) (1 + 10^{-5} S).$$

In questo esercizio la funzione di trasferimento ad anello aperto risulta caratterizzata da uno zero nel punto $\mathbf{z = 10^6}$ rad / s e da due poli nei punti, rispettivamente, **p1 = 1.000** rad / s e **p2 = 100.000** rad / s.

Vedremo i diagrammi di Bode nella pagina successiva.

Si tenga presente che**:** $\mathbf{20 \log 10^4 = 80}$ dB.

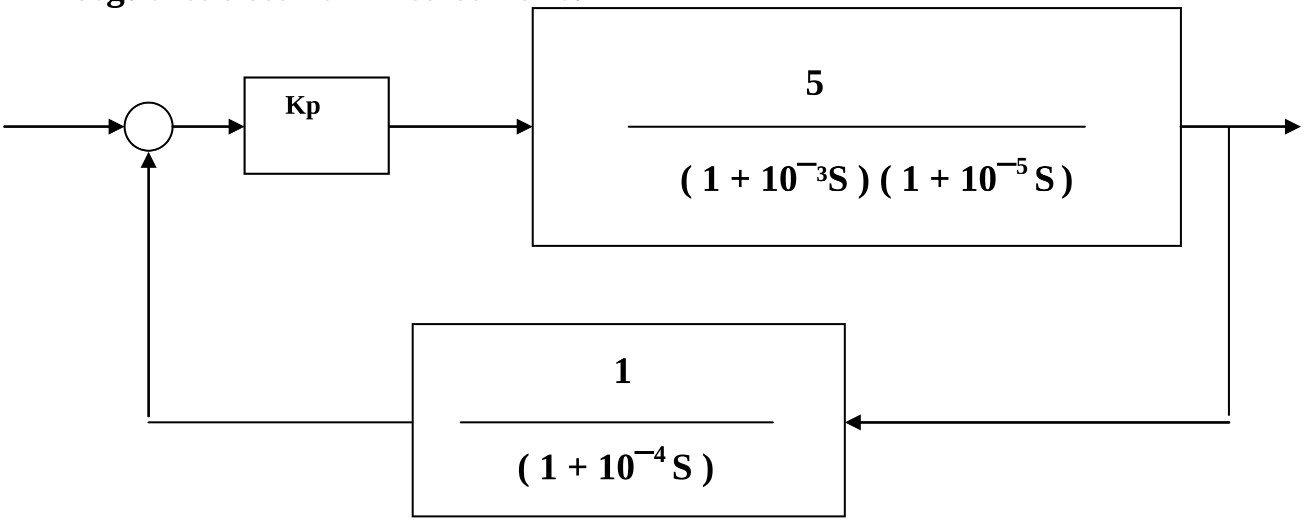


Il sistema per il criterio generale di **Bode** è **STABILE.**

Esercizio 8

Questo esercizio inizia una serie tutta dedicata al progetto dei REGOLATORI.
Il progetto si fonda su alcuni criteri del tutto ripetitivi, ma in questi esercizi svolti sono sempre introdotti, in modo tale che l'allievo sia sempre in grado di orientarsi a seconda della tipologia di regolatore da progettare.

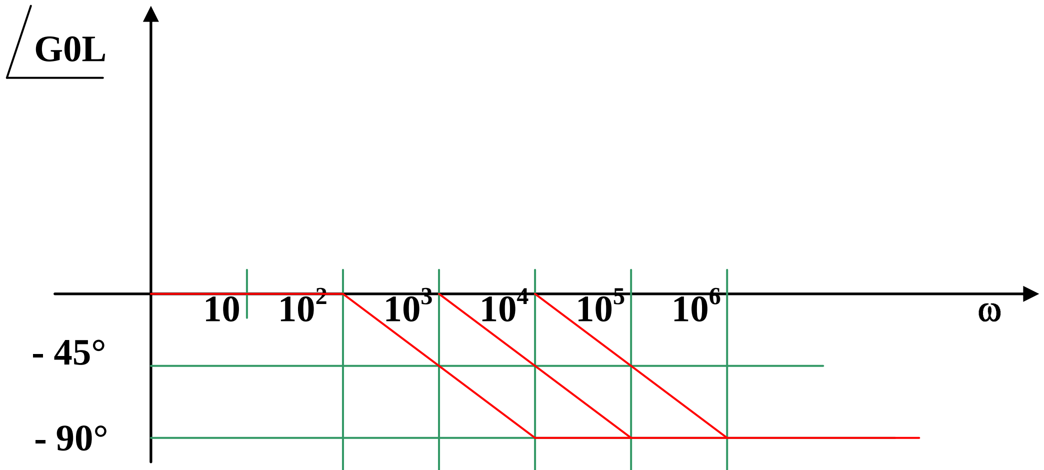
Si progetti un regolatore proporzionale P in grado di stabilizzare il seguente sistema in retroazione:



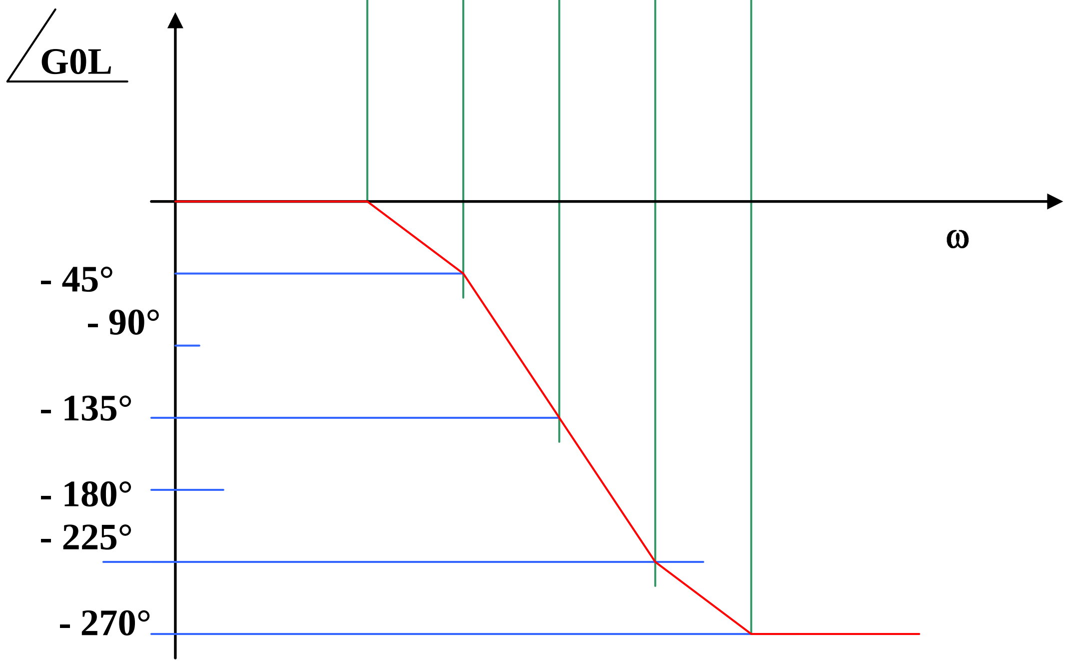
Per progettare un regolatore PROPORZIONALE bisogna ricordare che la sua funzione di trasferimento è un valore costante, che per comodità è indicato con **Kp**.
Inoltre, esso deve essere progettato considerando un **margine di fase di 45°**.

Il progetto parte nel considerare la **G0L** e poi ne tracciamo il **diagramma delle Fasi**.
Come si osserva la **G0L** è costituita da 3 poli nei punti di frequenza 1000, 10.000 e 100.000 rad / s.
Tracciamo i tre grafici delle fasi legati alla presenza dei tre poli e costruiamo successivamente il diagramma complessivo. In questo caso la **G0l** vale:

$$G0l = 5\,Kp / (1 + 10^{-3} S)(1 + 10^{-5} S)(1 + 10^{-4} S).$$



Il diagramma complessivo risulta quindi eguale a:



Se si considera un margine di fase di 45°, ciò ci permette di ammettere che:

-180 ° + 45° = - 135°.

Tutto questo per essere certi che il sistema dato sia stabile, come indicato da BODE.

Infatti, nel punto in cui il diagramma del Modulo taglia l'asse delle ω, il diagramma delle Fasi deve avere una fase maggiore di – 180°.

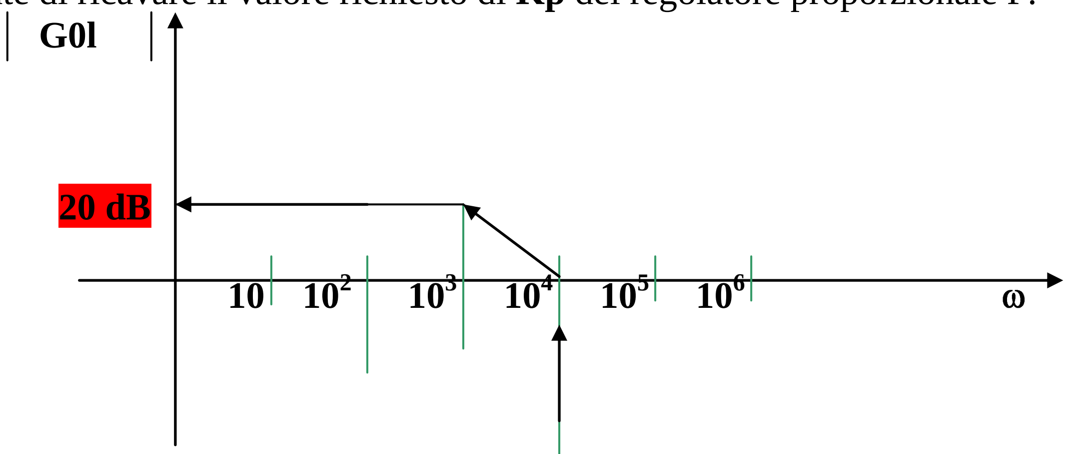
<u>Consiglio agli allievi di procedere nel modo seguente:</u>

- ✓ di allineare il diagramma del Modulo con il diagramma delle Fasi, già ricavato;
- ✓ di tracciare a partire dalla fase di – 135°, (ottenuta considerando il margine di fase indicato), la retta parallela all'asse delle ordinate;

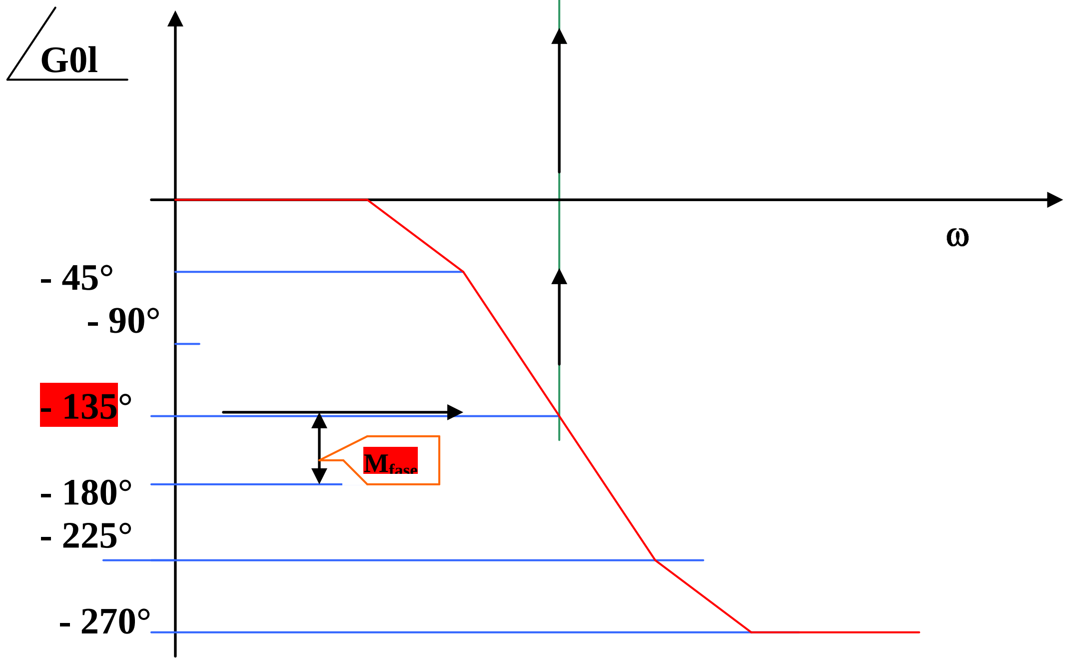
- ✓ di individuare il punto di incontro di tale retta con l'asse delle ω, (del diagramma del modulo). Il punto di incontro trovato rappresenta il punto in cui il diagramma del Modulo deve tagliare l'asse per avere certezza della stabilità del sistema dato e tra l'altro, tale taglio, deve avvenire alla pendenza di **20 dB / decade**, (come noi sappiamo).

Nel nostro caso si osserva che il punto di incontro si definisce proprio nel punto di frequenza pari a 10.000 rad / s, cioè in corrispondenza del secondo polo.
Pertanto, il diagramma del modulo deve tagliare in corrispondenza del secondo polo l'asse delle ω con una pendenza di 20 dB / decade. A partire da esso innalzo una retta con tale pendenza in modo tale che nella decade precedente, cioè in corrispondenza della frequenza di 1000 rad / s, quindi del primo polo, il modulo assuma il valore di 20 dB. Tale valore risulta mantenuto costante per tutte le altre decadi precedenti al primo polo, poiché il sistema non presenta né poli e né zeri.

In conclusione, per avere stabilità il sistema deve partire da 20 dB e ciò ci consente di ricavare il valore richiesto di **Kp** del regolatore proporzionale P.



Il diagramma complessivo risulta quindi eguale a:



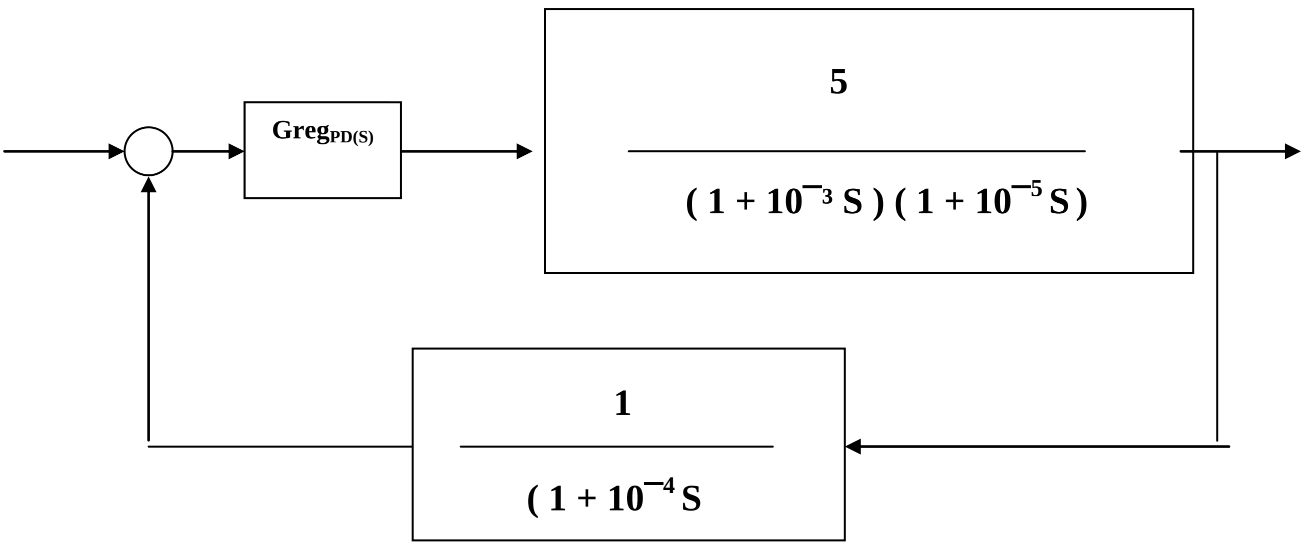
A questo punto calcoliamo il valore di **Kp**. Noi sappiamo che:

20 Log 5 Kp = 20 dB $\Rightarrow$ **Log 5 Kp = 1**, ricordando che l'operazione inversa del logaritmo decimale è l'elevazione alla potenza di base 10 si ottiene che, **5 Kp = 10^1 = 10** $\Rightarrow$ **Kp = 10 / 5 = 2.**

In definitiva la funzione di trasferimento del regolatore proporzionale deve avere valore **Kp = 2**, per avere la certezza che il sistema in retroazione dato sia **STABILE**.

Esercizio 9

Si progetti un regolatore proporzionale - derivativo PD in grado di stabilizzare il seguente sistema in retroazione:



Relativamente a questo esercizio è necessario ricordare che la funzione di trasferimento è della tipologia seguente:

Greg = Greg (S) = Kp + Kd S = Kp (1 + Kd S / Kp).

In questo progetto i parametri da determinare sono **Kp** e **Kd**, in quanto il regolatore stesso ha due componenti, una proporzionale al segnale errore e l'altra è legata alla rapidità di variazione del segnale errore stesso. La sua regolazione risulta dunque più efficace di quella esercitata dal solo regolatore proporzionale.
Inoltre dalla sua funzione di trasferimento si osserva che presenta uno zero, dato da:

$$\mathbf{z = -1 / \tau = -(-1 / Kd / Kp) = Kp / Kd}.$$

I criteri di progetto sono i seguenti:

- lo zero **Kp / Kd** lo facciamo corrispondere al secondo polo della **G0L**;
- si deve ammettere un **margine di fase di 45°**.

<u>Calcoliamo la **G0L(S)** come prodotto</u>: **$Greg_{PD}$ (S) . G (S) . H (S)**
Nel nostro caso risulterà:

$$\mathbf{G0l = 5\,Kp\,(1 + K_D / Kp) / (1 + 10^{-3}\,S) (1 + 10^{-5}\,S) (1 + 10^{-4}\,S)}$$

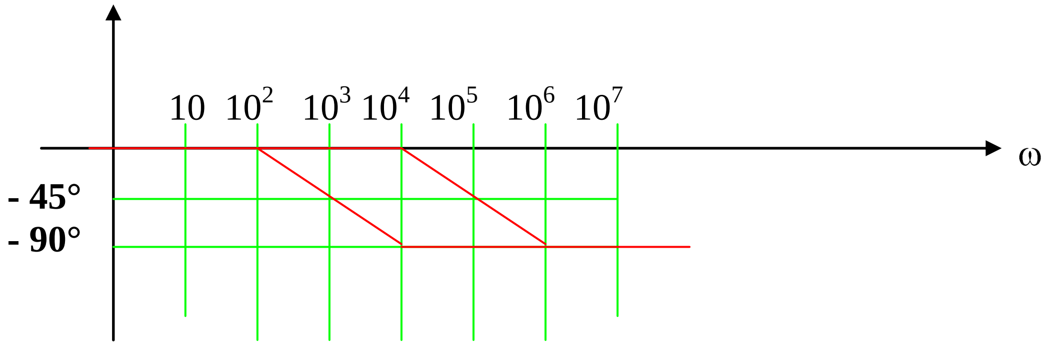
dove si pone $\mathbf{1 + (Kd / Kp)\,S = 1 + 10^{-4}\,S}$, in poche parole deve risultare
$\mathbf{Kd / Kp = 10^{-4}}$ ossia <u>**Kd = Kp / 10.000**</u>.

Pertanto in base ai criteri di progetto posso scrivere la **G0L**, nel modo seguente:

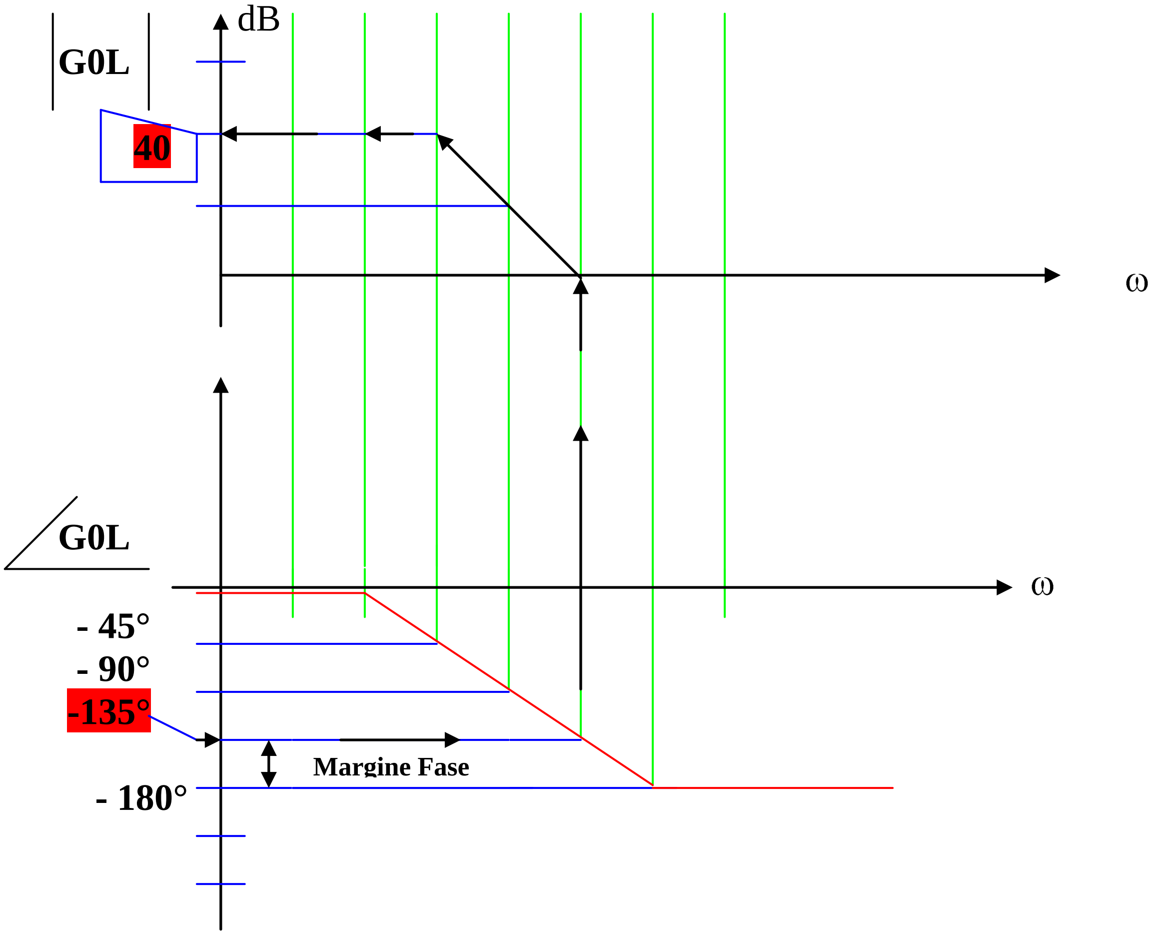
$$\mathbf{G0L = 5\,Kp\,\cancel{(1 + 10^{-4}\,S)} / (1 + 10^{-3}\,S) (1 + 10^{-5}\,S) \cancel{(1 + 10^{-4}\,S)}}$$

$$\mathbf{G0L = 5\,Kp / (1 + 10^{-3}\,S) (1 + 10^{-5}\,S)}$$

Costruiamo ora il diagramma delle Fasi della **G0L**. Inizio dal diagramma parziale ai due poli



Per comodità inserisco il diagramma del Modulo in questa posizione, tra il diagramma parziale delle fasi e il diagramma risultante o totale. Ciò per permettere una costruzione analoga all'esercizio precedente:



Come si capisce, il sistema è stabile se il diagramma di BODE del Modulo, taglia l'asse delle ω nel punto corrispondente al secondo polo della **G0L**,

tenendo conto del margine di fase richiesto per il progetto del regolatore PD.
Proprio per questa ragione il MODULO della **G0L** deve partire da 40 dB,
(come risulta mostrato dal diagramma da noi ricavato).

Tutto ciò consente di scrivere che:

20 Log 5 Kp = 40 dB $\longrightarrow$ **Log 5 Kp = 40 / 20 = 2**

5 Kp = 10^2 = 100, da cui

Kp = 100 / 5 = 20, ossia **Kp = 20**.

Dalle relazioni iniziali noi sappiamo, anche, che:

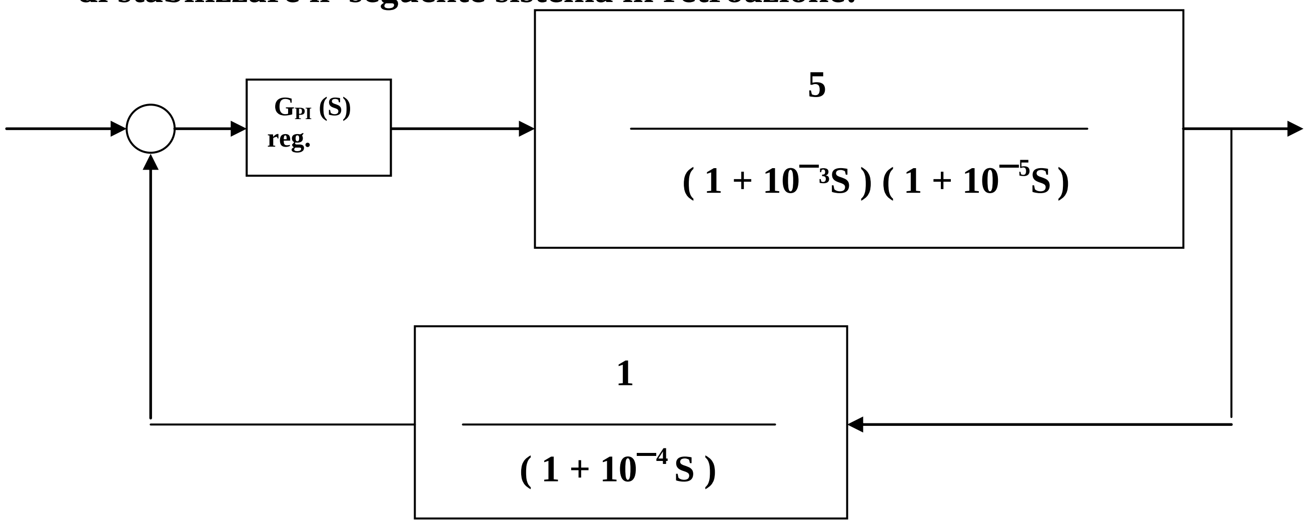
Kd = Kp / 10.000 = 20 / 10.000 = 2 / 1000 = 0,002.

Con questo il progetto del regolatore PD o proporzionale – derivativo è effettuato, tenendo conto dei criteri di progetto indicati.

<u>Esercizio 10</u>

Si progetti un regolatore proporzionale integrativo o di tipo PI per il seguente sistema di controllo:

Si progetti un regolatore proporzionale – integrativo o di tipo PI in grado di stabilizzare il seguente sistema in retroazione:



Il regolatore in questione risulta avere una funzione di trasferimento del tipo seguente:

$Greg_{PI}$ (S) = Kp + Ki / S = (Kp S + Ki) / S = (raccogliendo Ki) =

$Greg_{PI}$ (S) = Ki (1 + (Kp / Ki) S) / S.

<u>In definitiva il regolatore PI presenta uno zero z, nel punto z = - (- Ki / Kp) = Ki / Kp ed un polo nell'origine</u>.

La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema dato risulta espressa dalla seguente relazione:

$$G0l = 5\,Ki\,(1 + (Kp / Ki)\,S) \;/\; S\,(1 + 10^{-3}S)\,(1 + 10^{-5}S)\,(1 + 10^{-4}S).$$

Il regolatore sarà completamente progettato se si riescono a determinare i valori di Ki e di Kp. Si tenga presente che i criteri di progetto di questi regolatore prevedono di ammettere che:

- **lo zero del regolatore deve coincidere con il primo polo della G0l(S);**
- **il margine di fase deve essere pari a 45°**.

Per la prima condizione deve risultare che:
$1 + (Kp / Ki)\,S = 1 + 10^{-3}\,S$, che come è indicato nei criteri di progetto corrisponde al primo polo della G0l. Inoltre per quanto scritto poco sopra si deduce che, $Kp / Ki = 10^{-3}$ da cu ne segue, **$Kp = Ki / 1.000$**.
In base ai criteri di progetto la funzione di trasferimento ad anello aperto, tenendo conto della forma della $Greg_{PI}(S)$,

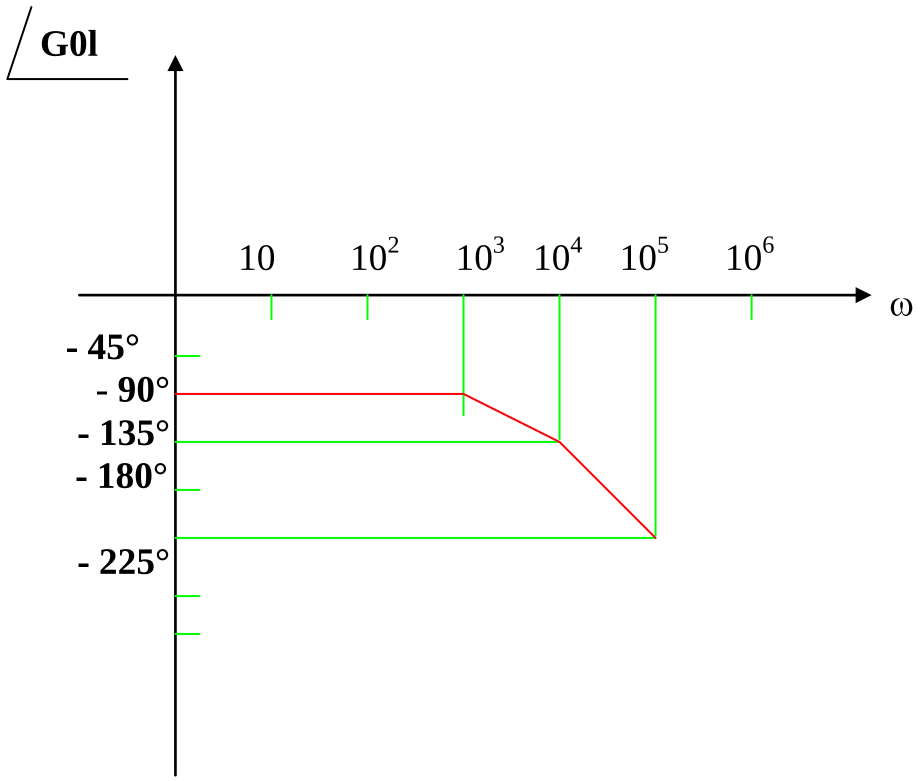
$$G0l(S) = 5\,Ki\,\cancel{(1 + 10^{-3}\,S)} \;/\; S\,\cancel{(1 + 10^{-3}S)}\,(1 + 10^{-5}S)\,(1 + 10^{-4}S),$$

ossia, $$G0l(S) = 5\,Ki \;/\; S\,(1 + 10^{-5}S)\,(1 + 10^{-4}S).$$

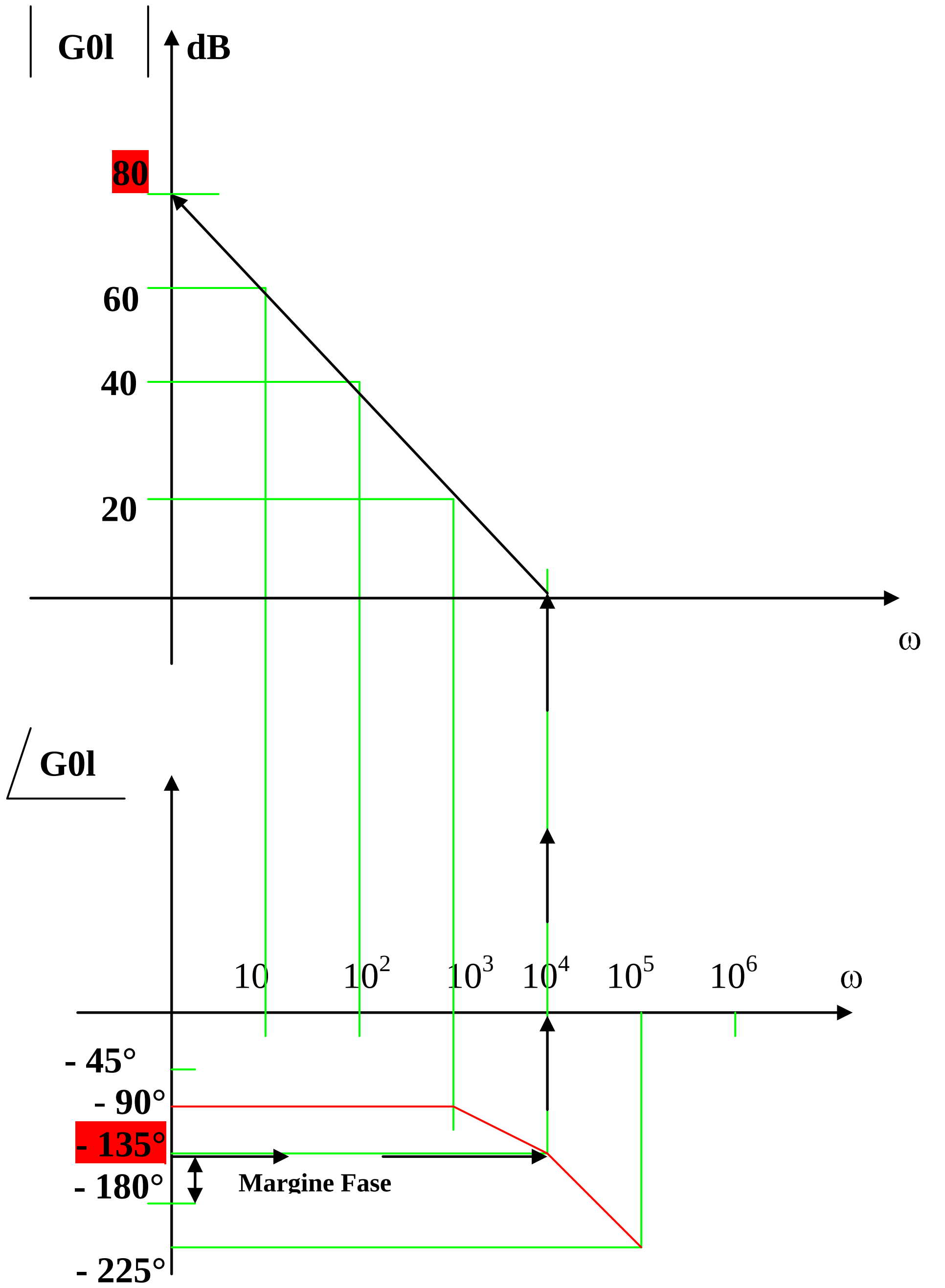
Come si osserva la funzione di trasferimento ad anello aperto, tenendo conto della presenza del regolatore, presenta tre POLI :

- **uno nell'origine**, **p = 0**;
- **il secondo nel punto p = 10.000** rad / s;
- **il terzo nel punto p = 100.000** rad / s.

Tracciamo il grafico delle fasi della G0l:



Per proseguire nella stessa linea adottata negli esercizi precedenti, riportiamo prima il diagramma del modulo della G0l e poi tracciamo, sotto di esso, il diagramma delle fasi ricavato nella pagina precedente. Graficamente si ottiene il valore di modulo che il regolatore deve fornire:



Considerando il margine di fase di 45°, in corrispondenza della fase di – 135°, corrisponde una pulsazione di 10.000 rad /s, corrispondente alla pulsazione del secondo polo della G0l. Proprio in corrispondenza di detta pulsazione si vuole che il diagramma del modulo tagli l'asse delle pulsazioni. Partendo dal grafico del modulo dalla pulsazione di 10.000 rad / s, proseguendo a ritroso con una pendenza di 20 dB / decade, si giunge al primo polo, (polo

nell'origine), quando il modulo deve assumere il valore di 80 dB. In altri termini il diagramma del modulo deve partire da 80 dB per avere la certezza che il sistema dato, sia stabilizzato dall'introduzione del regolatore PI.
A questo punto siamo in grado di calcolare i parametri che caratterizzano il regolatore PI stesso, ossia determinare i valori di Kp e di Ki.
In questo caso deve risultare che: **$20 \log 5\,Ki = 80$ dB,**

$\log 5\,Ki = 80 / 20 = 4$,

$5\,Ki = 10^4 = 10.000$,

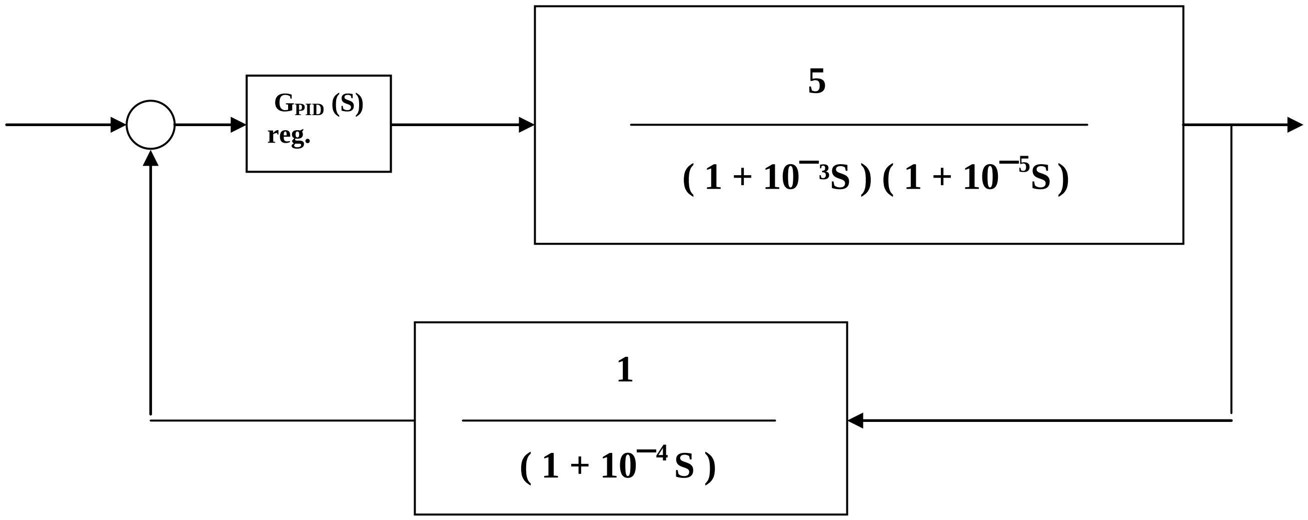
$Ki = 10.000 / 5 = 2.000$.

Infine sapendo che, $Kp = Ki / 1.000$ si desume che:
$Kp = 2.000 / 1.000 = 2$.

Il progetto risulta così completato.

<u>Esercizio 11</u>

Si progetti per lo stesso sistema dell'esercizio precedente un regolatore di tipo PID:



Questo tipo di regolatore, o il regolatore PID, presenta una funzione di trasferimento del tipo seguente:

$$Greg_{PID}(S) = (Kd\,S^2 + Kp\,S + Ki) / S.$$

Essa risulta costituita da un'equazione di secondo grado, pertanto nel suo complesso la funzione di trasferimento del regolatore PID, è caratterizzata da **<u>un polo nell'origine</u> e <u>da due zeri</u>**.
Nel progetto di questo regolatore è necessario calcolare, dunque, i parametri **Kd, Ki** e **Kp.**

Quali sono i criteri di progetto di questo regolatore?

I criteri di progetto di questo regolatore sono: (vedasi la pagina successiva)

- **gli zeri z1 e z2 della funzione di trasferimento del regolatore devono coincidere con il PRIMO ed il SECONDO POLO della G0l;**
- **il margine di fase deve risultare pari a 45°.**

Da quanto indicato dai criteri di progetto, in questo caso deve risultare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z1 = p1 = 1.000\ rad / s}\ ; \\ \mathbf{z2 = p2 = 10.000\ rad / s}. \end{array} \right\}$$

A questo punto possiamo calcolare la **G0l (S)** mediante il seguente prodotto:

$$\mathbf{G0l\,(S) = Greg_{PID}\,(S) \cdot G\,(S) \cdot H\,(S)}.$$

Ricaveremo allora:

G0l (S) = 5 (Kd S² + Kp S + Ki) / = (se dall'equazione di secondo grado superiore ricavo Ki, la relazione si trasforma in) =

$$= \frac{\mathbf{((Kd / Ki)\, S^2 + (Kp / Ki)\, S + 1)}}{\mathbf{S\,(1 + 10^{-3} S)\,(1 + 10^{-5} S)\,(1 + 10^{-4} S)}} =$$

Ma i criteri di progetto ci consentono di scrivere:

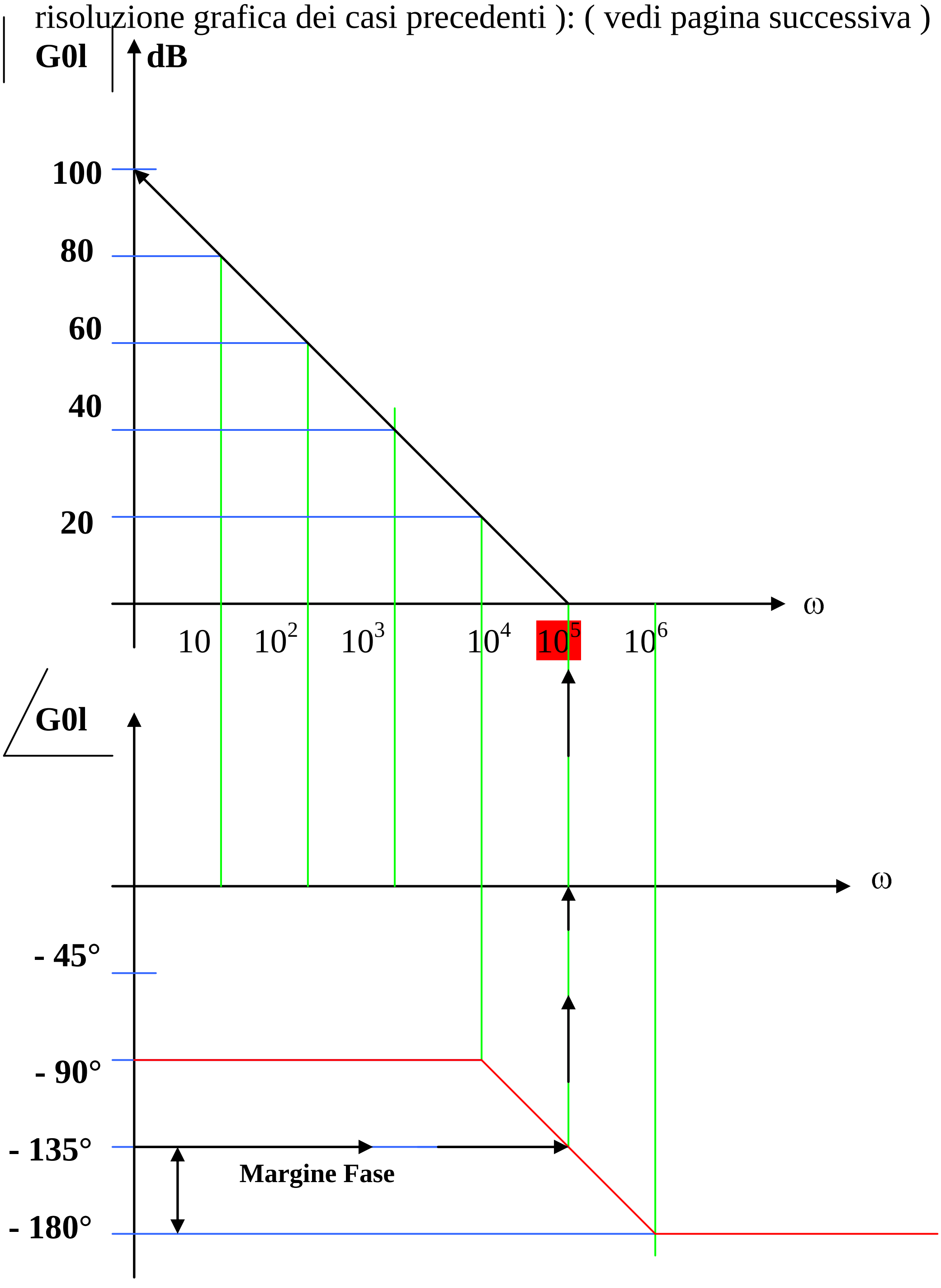
$$\frac{\mathbf{5\,Ki\,\cancel{(1 + 10^{-3} S)}\,\cancel{(1 + 10^{-4} S)}}}{\mathbf{S\,\cancel{(1 + 10^{-3} S)}\,(1 + 10^{-5} S)\,\cancel{(1 + 10^{-4} S)}}}$$

In definitiva la **G0l** vale:

$$\mathbf{G0l\,(S) = 5\,Ki / S\,(1 + 10^{-5} S)}.$$

Per la condizione in cui risulta, **z1 = p1 = 1.000** rad / s **;** **z2 = p2 = 10.000** rad / s, si deve tenere presente, (e ciò è anche possibile dimostrarlo), che: $\mathbf{Kd / Ki = 1 / (p1 \cdot p2) = 1 / (10^3 \cdot 10^4) = 1 / 10^7 = 10^{-7}}$; $\mathbf{Kp / Ki = 1 / p1 + 1 / p2 = 1 / 10^3 + 1 / 10^4 = 10^{-3} + 10^{-4}}$.

Passiamo così alla determinazione del diagramma della fasi complessiva, ma prima inserisco il diagramma del modulo, per applicare la stessa metodologia vista negli esercizi precedenti, (attuare la stessa tecnica di risoluzione grafica dei casi precedenti): (vedi pagina successiva)



Nel caso in esame deve allora risultare che: **20 log 5 Ki = 100 dB**; ciò implica che **log 5 Ki = 100 / 20 = 5**, da cui **5 Ki = 10^5 = 100.000** e perciò **Ki = 100.000 / 5 = 20.000**. Dalle relazioni introdotte precedentemente, ossia, tenendo conto che: **Kd / Ki = 1 / (p1 . p2) = 1 / (10^3. 10^4) = 1 / 10^7 = 10^{-7}** $\Rightarrow$
Kd = 10^{-7} . Ki = 10^{-7} . 2 . 10^4 = 2 . 10^{-3} = 0,002.

Infine, ricordando che:

Kp / Ki = 1 / p1 + 1 / p2 = 1 / 10^3 + 1 / 10^4 = 10^{-3} + 10^{-4} = 0,001 + 0,0001 =
= 0,0011, e ciò implica che, **Kp = (0,0011) . Ki = 11 . $\cancel{10^{-4}}$. 2 . $\cancel{10^{4}}$ = 22**.

In conclusione i parametri **Ki, Kd** e **Kp** che caratterizzano il regolatore PID sono :

Ki = 20.000 **Kd = 0,002** **Kp = 22**

Iniziamo qui alcuni esercizi di riepilogo:

Esercizio 12

Sia data la risposta U (S) = 2 S + 3 / S^2 + 2S + 5, si determini la sua risposta nel dominio del tempo.

In questo caso si può applicare la decomposizione in fratte semplici.
Inoltre è necessario osservare che l'equazione **S^2 + 2S + 5** ha discriminante Δ minore dello zero. Risulterà allora:
S^2 + 2S + 5 = (S – S1)(S – S2), essendo S1 ed S2 numeri complessi.
Poniamo allora: **S^2 + 2S + 5 = 0** e calcoliamone le radici:
Δ = 4 – 20 = - 16 = j^2 16, da ciò ne segue che,

$S_{1,2}$ = (-2 ± j 4) / 2 $\Rightarrow$ **S1 = - 1 – j 2; S2 = - 1 + j 2**. Tutto questo ci consente di scrivere:
S^2 + 2S + 5 = (S – S1)(S – S2) = (S + 1 + j 2) (S + 1 – j 2).

In base a quanto ricavato in precedenza si desume che:
U (S) = 2 S + 3 / S^2 + 2S + 5 = 2 S + 3 / (S + 1 + j 2) (S + 1 – j 2) =
= A / (S + 1 + j 2) + B / (S + 1 – j 2), dove le costanti A e B si ottengono risolvendo le seguenti relazioni:

A = 2 S + 3 / S + 1 – j 2 ed essa deve essere calcolata per **S = -1 – j 2,** e da ciò ottengo che,
A = - 2 – j 4 + 3 / $\cancel{-1}$ – j 2 $\cancel{+ 1}$ – j 2 = 1 – j 4 / - j 4 = 1 + j 0,25.

Con un procedimento analogo si calcola **B**:
B = 2 S + 3 / S + 1 +j 2 ed essa deve essere calcolata per **S = -1 + j 2,** e da ciò ottengo che,
B = -2 + j 4 + 3 = -1 + j 2 + 1 + j 2 = 1 + j 4 / j 4 = 1 – j 0,25.

In conclusione la risposta U (S) può essere vista come:
U (S) = 1 + j 0,25 / (S + 1 + j 2) + 1 – j 0,25 / (S + 1 – j 2).

Tale espressione è più facilmente antitrasformabile.

<u>Esercizio 13</u>

Si risolvi la seguente equazione differenziale:

$d^2 x / dt^2 + 3\, dx / dt + 2x = K$, dove K è una costante qualsiasi.

Tale equazioni goda delle seguenti condizioni iniziali:

$x(t = 0) = -1$; (dx / dt) per $t = 0 = 2$.

L'esercizio risulta essere molto particolare, viene introdotto per non avere scrupolo alcuno sulla preparazione all'esame. L'esercizio si propone di risolvere l'equazione differenziale introdotta, con l'impiego delle nostre conoscenze sulle trasformate di Laplace. L'aspetto significativo è legato al fatto che il principio risolutivo si mantiene per qualsiasi altra equazione di questo tipo.
Per risolvere la nostra equazione differenziale, bisogna ammettere che:

$L(K) = K / S$; $2L(x(t)) = 2X(S)$;

$3L(dx / dt) = 3(SX(S) - x(t = 0)) = 3(SX(S) + 1) = 3SX(S) + 3$.

$L(d^2 x / dt^2) = S^2 X(S) - S\,x(t = 0) - (dx / dt)_{\text{per } t = 0} = S^2 X(S) + S - 2$.

<u>Si è indicato con **L** l'operatore trasformata di Laplace</u>.

In definitiva la nostra equazione differenziale può essere scritta nella forma seguente: $S^2 X(S) + S - 2 + 3SX(S) + 3 + 2X(S) = K / S$.

Raccogliendo i termini legati alla X (S) e trasportando tutti gli altri a secondo membro si desume che:
$(S^2 + 3S + 2) X(S) = (K / S) - S - 1 = (-S^2 - S + K) / S$, da ciò ricavo che:

$$X(S) = (-S^2 - S + K) / S(S^2 + 3S + 2) = (-S^2 - S + K) / S(S + 1)(S + 2).$$

Applicando al decomposizione in fratte semplici si desume che:
$X(S) = A / S + B / S + 1 + C / S + 2$.

Da quest'ultima relazione si ricava il seguente sistema:

$$A(S + 1)(S + 2) + BS(S + 2) + CS(S + 1) = -S^2 - S + K,$$

$$A(S^2 + 3S + 2) + BS^2 + 2BS + CS^2 + CS = -S^2 - S + K,$$

$AS^2 + 3AS + 2A + BS^2 + 2BS + CS^2 + CS = -S^2 - S + K$, a questo punto sistemando i termini si giunge alla relazione fondamentale,

$$(A + B + C)S^2 + (3A + 2B + C)S + 2A = -S^2 - S + K.$$

Da ciò si ottiene il sistema seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{A + B + C = -1} \\ \mathbf{3A + 2B + C = -1} \\ \mathbf{2A = K} \end{cases}$$

Risolvendolo si ottengono i seguenti risultati:

A = K / 2
B = - K
C = (K / 2) - 1

Da ciò ne segue che la nostra equazione differenziale nella forma trasformata assume il seguente aspetto:

X (S) = (K / 2) / S – K / S + 1 + (K / 2 – 1) / S + 2, e antitrasformandola si ottiene la soluzione desiderata dell'equazione differenziale iniziale:

$\mathbf{L^{-1}(X (S)) = x (t) = K / 2 - K\, e^{-t} + (K / 2 - 1)\, e^{-2t}}$.

SESSIONE ORDINARIA DELL'ESAME DI STATO 2001 / 2002

Indirizzo TECNICO DELLE INDUSTRIE ELETTRICHE

Tema di: Sistemi automazione ed organizzazione della produzione

Un sistema a nastro trasportatore azionato da un motore elettrico con funzione di trasferimento:

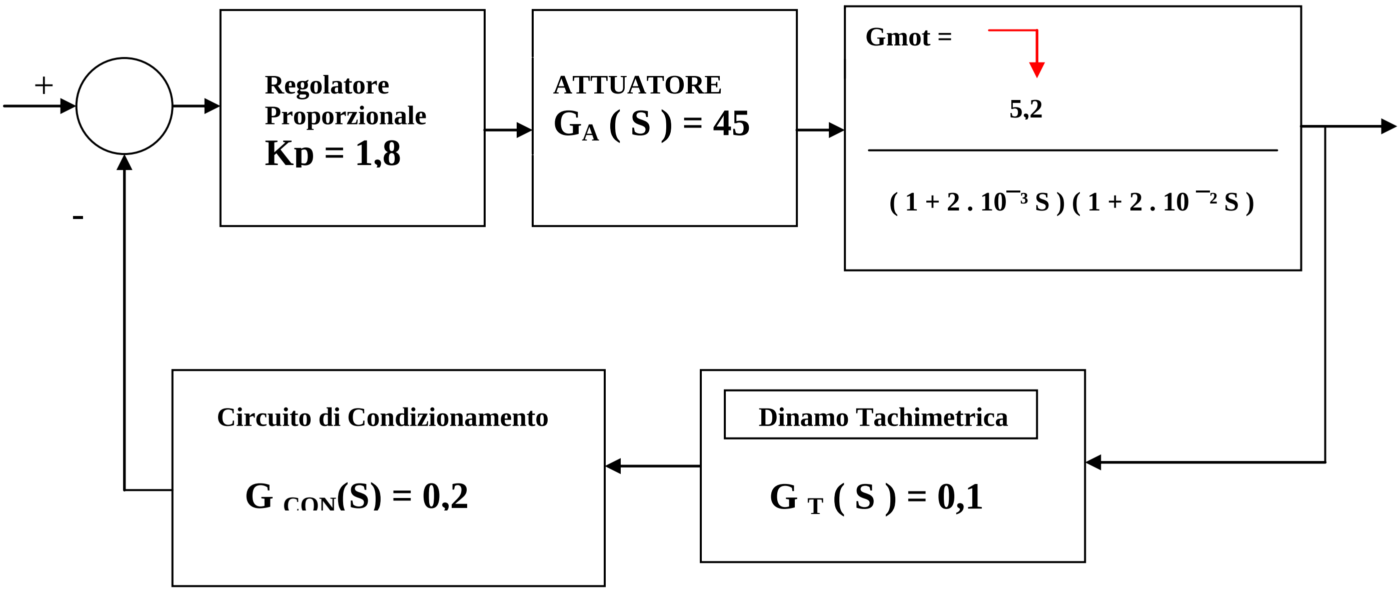
$$\mathbf{Gmot = 5{,}2 / (1 + 2 \cdot 10^{-3} S)(1 + 2 \cdot 10^{-2} S)}$$

serve a riempire delle scatole di confezioni di medicine. Quando sono state contate 24 confezioni il nastro si deve fermare per consentire la sostituzione delle scatole e ripartire automaticamente dopo un tempo t = 20 s. Il candidato indichi i necessari dispositivi e illustri una possibile configurazione del sistema ed il conseguente funzionamento. Descriva quindi, utilizzando un metodo a sua scelta, una possibile soluzione dell'automatismo. Sapendo inoltre che la velocità del motore viene controllata da un sistema ad anello chiuso che comprende:

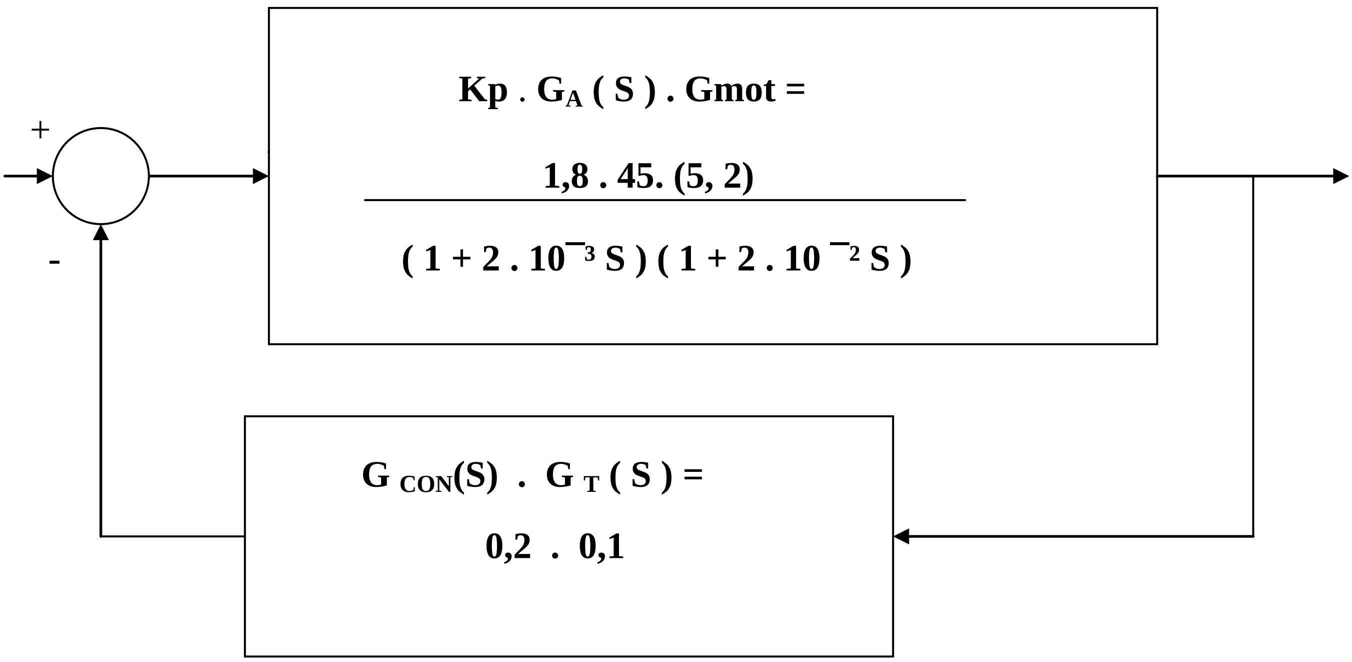
- un sistema di controllo con funzione di trasferimento, $\mathbf{G_A(S) = 45}$;
- una dinamo tachimetrica con guadagno $\mathbf{G_T(S) = 0{,}1}$;
- un circuito condizionatore con funzione di T, $\mathbf{G_{CON}(S) = 0{,}2}$;
- un regolatore proporzionale con f. d. T, $\mathbf{Kp = 1{,}8}$.

Il candidato determini la funzione di trasferimento complessiva del sistema e analizzi la **stabilità** del sistema utilizzando un criterio di sua scelta.

Il sistema dato si può vedere nel modo seguente:



In una prima semplificazione il sistema ad anello chiuso si può vedere nel modo seguente:



La funzione di trasferimento ad anello aperto, ossia la **G0l** è data come:

G (S) . H (S), dove

G (S) = 1,8 . 45. (5, 2) / (1 + 2 . 10^{-3} S) (1 + 2 . 10^{-2} S) e

dove **H (S)** = **(0, 1) . (0, 2) = 0,02**.

Da ciò ricavo che :

G0l =

G (S) . H (S) = 1,8 . 45 . (5, 2) . 0,02 /(1 + 2 . 10^{-3} S) (1 + 2 . 10^{-2} S).

La funzione di trasferimento del sistema in retroazione negativa, nel suo complesso è definita come:

F . d. T = G (S) / 1 + G (S) H (S) =

$$\frac{421{,}2 \,/\, (1 + 2 \cdot 10^{-3} S)(1 + 2 \cdot 10^{-2} S)}{1 + (421{,}2 \cdot (0{,}02) \,/\, (1 + 2 \cdot 10^{-3} S)(1 + 2 \cdot 10^{-2} S))}$$

Sistemando si ottiene che la funzione di trasferimento del sistema in retroazione dato, vale:

F. d. T = 421,2 / ((1 + 2 . 10^{-3} S) (1 + 2 . 10^{-2} S) + 8,424).

Per studiare la stabilità del sistema di controllo dato, occorre considerare la funzione di trasferimento ad anello aperto **G0l**. Inizialmente proviamo ad applicare il criterio semplificato di Bode, costruendo il solo diagramma del modulo della **G0l**.

In questo caso la G0l è data da:

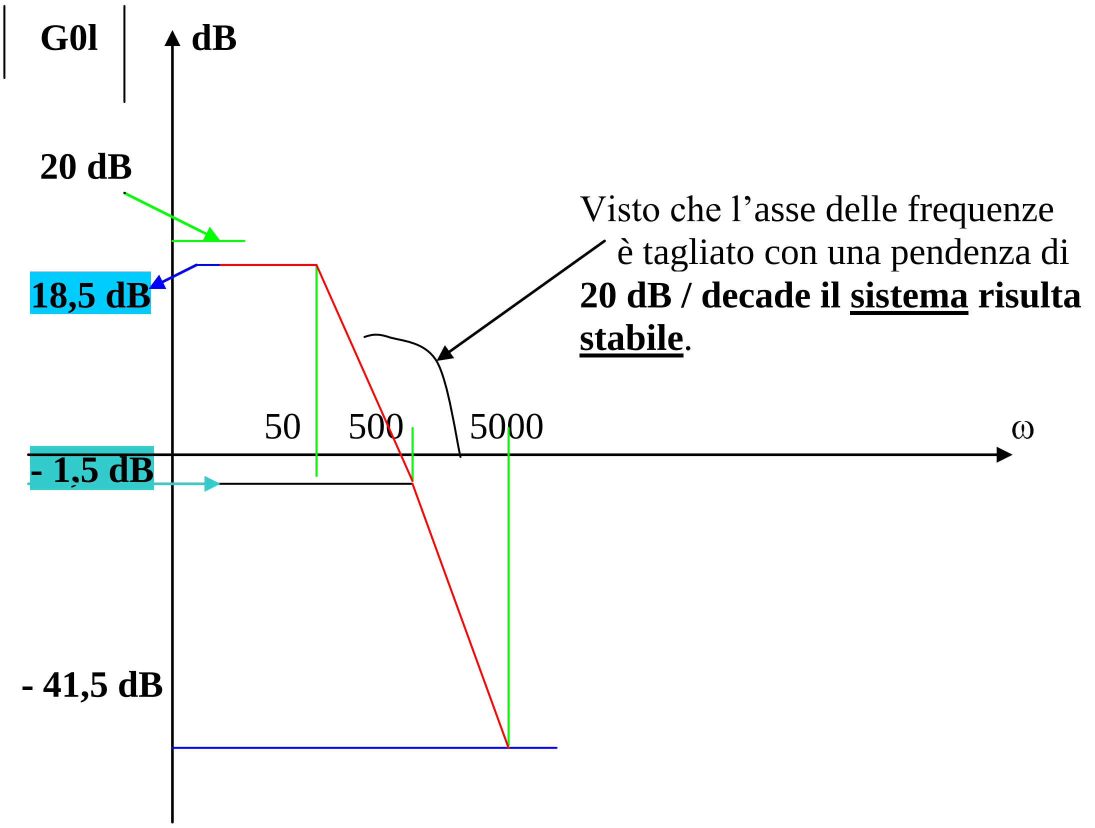
G0l = 1,8 . 45 . (5, 2) . 0,02 /(1 + 2 . 10^{-3} S) (1 + 2 . 10^{-2} S) =

= 8,424 / /(1 + 2 . 10^{-3} S) (1 + 2 . 10^{-2} S).

In relazione al risultato ottenuto nella pagina precedente, per la costruzione del diagramma di Bode delle ampiezze o del Modulo, si può osservare che: la G0l è caratterizzata da due poli nei punti di frequenza:

p1 = 0,5 . 100 = 50 rad / s e nel punto **p2 = 0,5 . 1.000 = 500** rad / s.

Inoltre è: **20 log 8,424 = 18,5 dB**



Si può procedere, anche, in modo diverso, ossia imporre che:
$(1 + 2 \cdot 10^{-3} S)(1 + 2 \cdot 10^{-2} S) + 8{,}424 = 0$, e da ciò ne segue

$1 + 2 \cdot 10^{-3} S + 2 \cdot 10^{-2} S + 4 \cdot 10^{-5} S^2 + 8{,}424 = 0$ e ordinando si giunge alla relazione,
$4 \cdot 10^{-5} S^2 + 2 \cdot (10^{-3} + 10^{-2}) S + 9{,}424 = 0$
$4 \cdot 10^{-5} S^2 + 2200 \cdot 10^{-5} S + 9{,}424 = 0,$
ora divido ambo i membri per **$4 \cdot 10^{-5}$** ottenendo così:
$S^2 + 550 S + 235.600 = 0.$
Risolvendo questa equazione di secondo grado, ci si accorge che le radici sono complesse coniugate; infatti risulterà:
$S1 = -274 - j\,400$ e **$S2 = -274 + j\,400$**. La parte reale dei due numeri complessi coniugati è negativa, pertanto il SISTEMA è STABILE, (come già ricavato per via grafica).

La prova prosegue nella determinazione di un'opportuna soluzione dell'automatismo, grazie, ad esempio, all'impiego del PLC.

SESSIONE ORDINARIA DELL'ESAME DI STATO 2004 / 2005

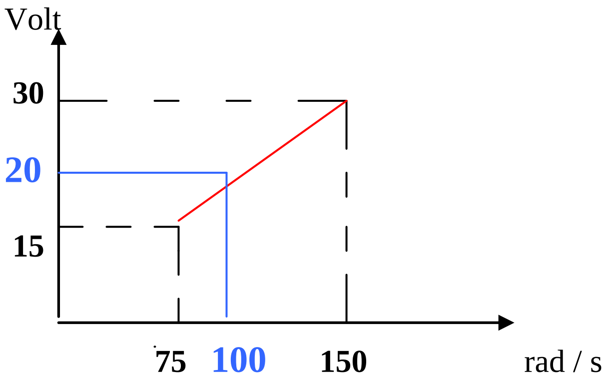
Indirizzo: TECNICO DELLE INDUSTRIE ELETTRICHE

Tema di: SISTEMI, AUTOMAZIONE E ORGANIZZAZIONE DELLA PRODUZIONE

L'impianto di automatizzazione di un'azienda vinicola per il riempimento e la chiusura delle bottiglie prevede l'impiego di un nastro trasportatore per convogliare le bottiglie verso le stazioni dove vengono svolte le su indicate operazioni. Sapendo che la durata del riempimento è in funzione della capacità dei contenitori e che il sistema deve provvedere al controllo, espellendo le bottiglie non correttamente riempite, il candidato, fatte le eventuali ipotesi aggiuntive, scelti di conseguenza i dispositivi necessari , descriva una possibile configurazione del sistema e illustri la soluzione dell'automatismo, usando un metodo di sua conoscenza.

Sapendo inoltre che:

- il motore in corrente continua, preposto al movimento del nastro trasportatore, è inserito in un sistema di controllo ad anello chiuso, con le seguenti caratteristiche:
  costante di tempo elettrica = 0,125 ms,
  costante meccanica = 1,25 ms,
  costante di macchina = 0,04 V s / rad;
- la dinamo tachimetrica presenta la seguente caratteristica:

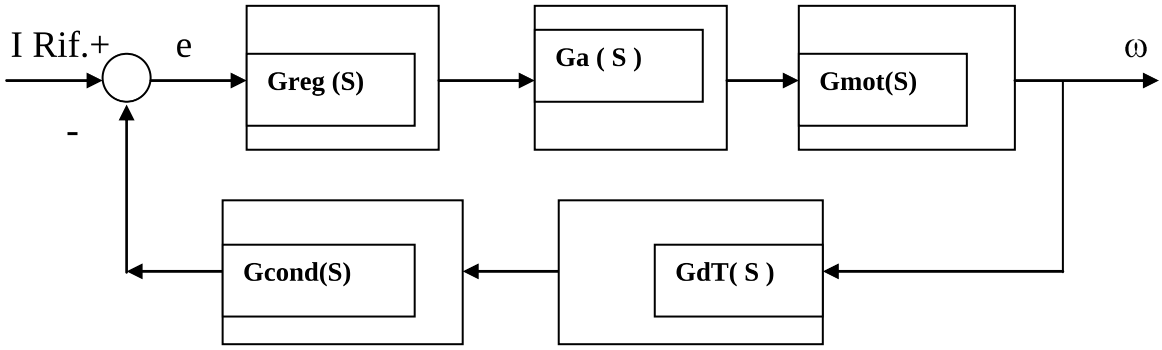


- quando il motore gira ad una velocità di 100 rad / s la tensione rilevata deve valer 5 V e il sistema di comando ha un guadagno statico pari a 1,6 e una costante di tempo di 12,5 ms,

il candidato, fatte le eventuali ipotesi aggiuntive:

- descriva il sistema con uno schema a blocchi, calcolandone la funzione di trasferimento totale;
- illustri l'utilità dell'introduzione di un regolatore proporzionale e lo dimensioni ipotizzando un opportuno margine di fase.

Il circuito in retroazione si può così vedere:



Dove **Greg (S)** rappresenta la funzione di trasferimento del regolatore proporzionale o regolatore P, con **Ga (S)** funzione di trasferimento dell'attuatore, si intuisce la sua presenza dall'affermazione del testo: **… il sistema di comando ha guadagno statico pari a 1,6 e una costante di tempo di 12,5 ms.**

E' ovvio che **Gmot(S)** rappresenta la funzione di trasferimento del motore in corrente continua, la **GdT(S)** rappresenta invece, la funzione di trasferimento della dinamo tachimetrica ed infine, la **Gcond(S)** rappresenta la funzione di trasferimento del circuito di condizionamento. Si intuisce la presenza del circuito di condizionamento dalla presenza del grafico della dinamo tachimetrica, che per una ω di 100 rad / s presenta una tensione di 20 Volt, ma il testo afferma che: **….quando il motore gira ad una velocità di 100 rad / s <u>la tensione rilevata deve valere 5 Volt</u>.** Quindi risulta chiaro che deve essere presente un circuito che ripristini il valore della tensione da 20 Volt a 5 Volt, e questo, può essere solo dovuto ad un circuito di condizionamento, (avente un'opportuna funzione di trasferimento).

Determiniamo ora la funzione di trasferimento del motore elettrico, in corrente continua, sulla base dei dati forniti dal testo. Dal manuale risulta che la funzione di trasferimento di un motore in corrente continua è della seguente tipologia:

Gmot(S) = (τ_e / k_e) / (1 + τ_e S) (1 + τ_m S),

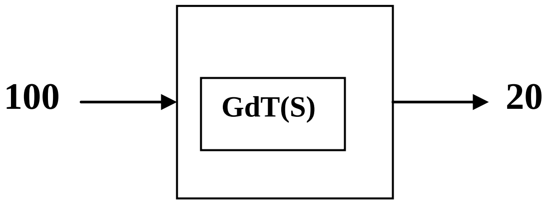
dove $\boldsymbol{\tau_e}$ rappresenta la costante di tempo elettrica, $\mathbf{k_e}$ la costante di macchina o del motore elettrico ed infine, $\boldsymbol{\tau_m}$ la costante di tempo meccanica. I valori rispettivamente sono: $\boldsymbol{\tau_e} = 0{,}125 \cdot 10^{-3}$ s; $\mathbf{k_e} = 0{,}04 = 4 \cdot 10^{-2}$ e $\boldsymbol{\tau_m} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} = = 0{,}125 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0{,}125 \cdot 10^{-2}$. In base ai valori dedotti calcoliamo il rapporto $\boldsymbol{\tau_e / k_e} = 0{,}125 \cdot 10^{-3} / 4 \cdot 10^{-2} = (0{,}125 / 4) \cdot 10^{-1} = 3{,}125 \cdot 10^{-3}$.
In definitiva la funzione di trasferimento della motore elettrico è:

$$\mathbf{Gmot(S) = 3{,}125 \cdot 10^{-3} \Big/ (1 + 0{,}125 \cdot 10^{-2} \cdot S)(1 + 0{,}125 \cdot 10^{-3} \cdot S)}.$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento dell'attuatore. Sulla base dell'affermazione del testo, già anticipata, ma che ricordo: … il SISTEMA di COMANDO ha un GUADAGNO STATICO di 1,6 e una COSTANTE di TEMPO, $\tau a = 12{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}125 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}125 \cdot 10^{-1}$, allora si desume che:
$\mathbf{Ga\,(S) = K_0 / 1 + \tau a\, S}$ e con $\mathbf{K_0 = 1{,}6}$ come indicato nel testo. In definitiva si ottiene che la funzione di trasferimento dell'attuatore è:

$$\mathbf{Ga\,(S) = K_0 / 1 + \tau a\, S = 1{,}6 \Big/ (1 + 0{,}125 \cdot 10^{-1}\, S)}.$$

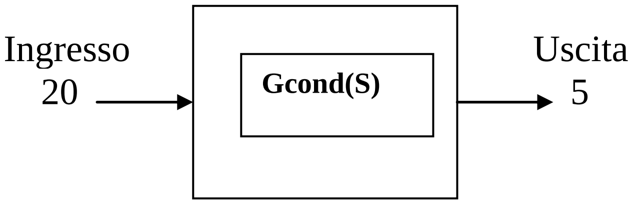
Passiamo, ora, alla determinazione della dinamo tachimetrica, ossia della **GdT(S)**. Il grafico fornito ci mostra che per una velocità ω di 100 rad / s, la tensione risulta di 20 Volt. La funzione di trasferimento la posso allora determinare seguendo questo ragionamento:



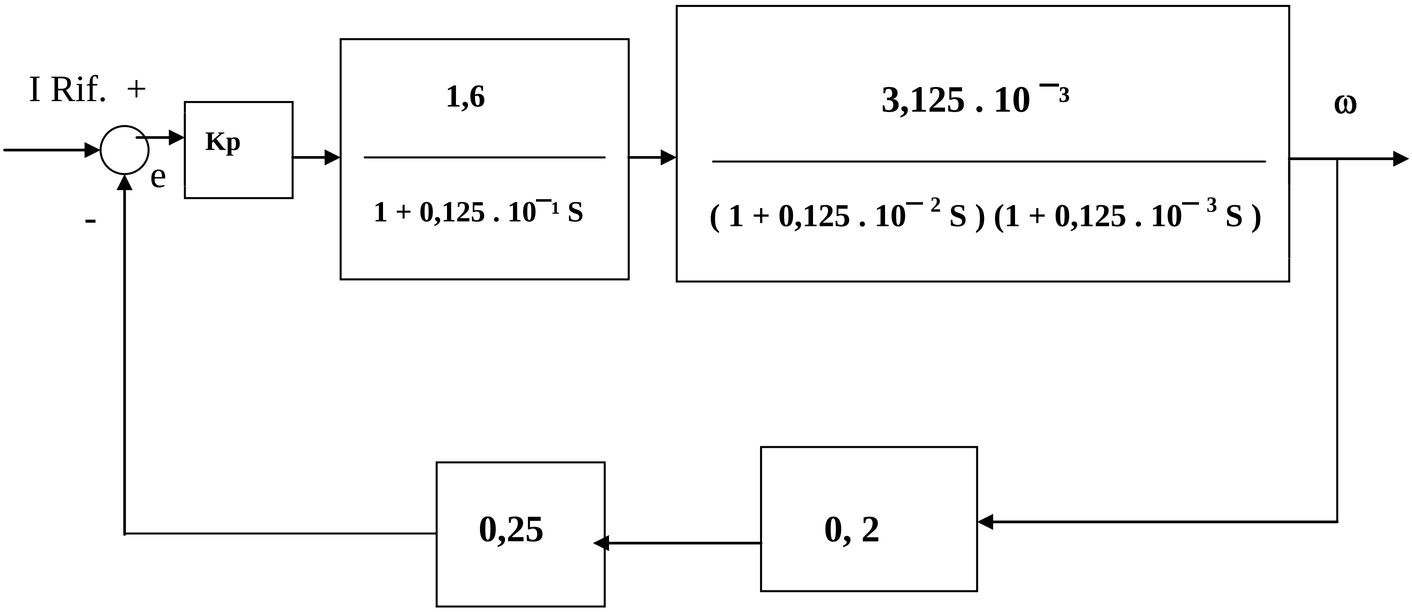
Ma, noi sappiamo che il segnale di uscita è uguale al prodotto fra il segnale di ingresso e la funzione di trasferimento. Perciò posso scrivere:

20 = GdT(S) . 100 $\Rightarrow$ **GdT(S) = 20 / 100 = 0, 2** V / rad .

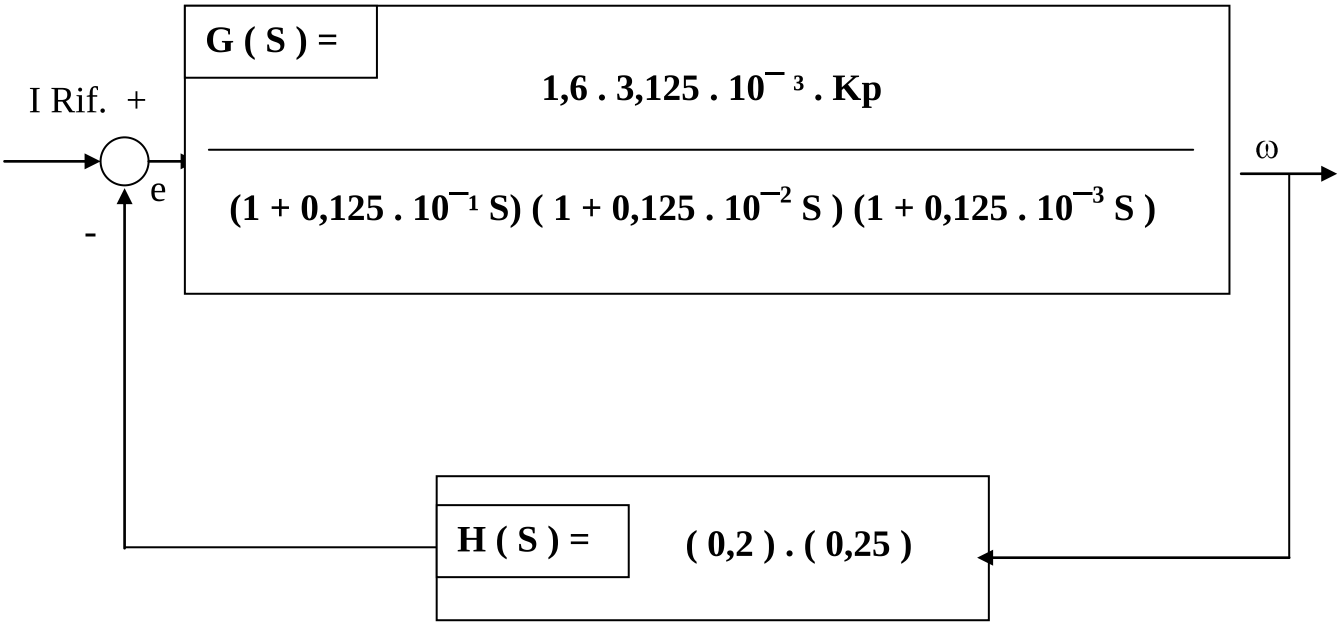
Il testo afferma, inoltre, che la TENSIONE RILEVATA , per effettuare il confronto nel nodo sommatore, deve valere 5 Volt. Quindi con un analogo ragionamento, a quello precedente, possiamo ricavare la funzione di trasferimento del circuito condizionatore o di condizionamento.



Da ciò risulta che, 20 . **Gcond(S)** = 5,
Gcond(S) = 5 / 20 = 0,25.
Il regolatore proporzionale o regolatore P, consente di stabilizzare o migliorare la stabilità di un sistema ad anello chiuso. Il vantaggio di questo regolatore è la sua funzione di trasferimento, poiché essa è rappresentata da una semplice costante. Per comodità chiamerò la funzione di trasferimento **Greg (S)** del regolatore con Kp, (ovviamente Kp deve essere scelto per migliorare, se non creare la stabilità del sistema).
In conclusione, l’anello in retroazione del sistema dato, è così caratterizzato:



<u>Da cui ne segue che</u>: (<u>vedi pagina successiva</u>)



Ricordando, infine che la funzione di trasferimento complessiva o totale di un sistema in retroazione, con reazione negativa, è :

F. d . T = G (S) / 1 + G (S). H (S) .

Nel nostro caso risulterà che:

F. d . T = G (S) / 1 + G (S). H (S) =

$$\frac{1{,}6 \cdot 3{,}125 \cdot 10^{-3} \cdot Kp \;/\; (1 + 0{,}125 \cdot 10^{-1} S)(1 + 0{,}125 \cdot 10^{-2} S)(1 + 0{,}125 \cdot 10^{-3} S)}{1 + (0{,}2)(0{,}25)(1{,}6 \cdot 3{,}125 \cdot 10^{-3} \cdot Kp) \;/\; (1 + 0{,}125 \cdot 10^{-1} S)(1 + 0{,}125 \cdot 10^{-2} S)(1 + 0{,}125 \cdot 10^{-3} S)}$$

Per studiare la stabilità del sistema è necessario considerare la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema in retroazione, ossia la **G0l** espressa come: **G0l = G (S). H (S)** .
Per avere certezza della stabilità del sistema dato progetto il regolatore proporzionale con un margine di fase di 45°.

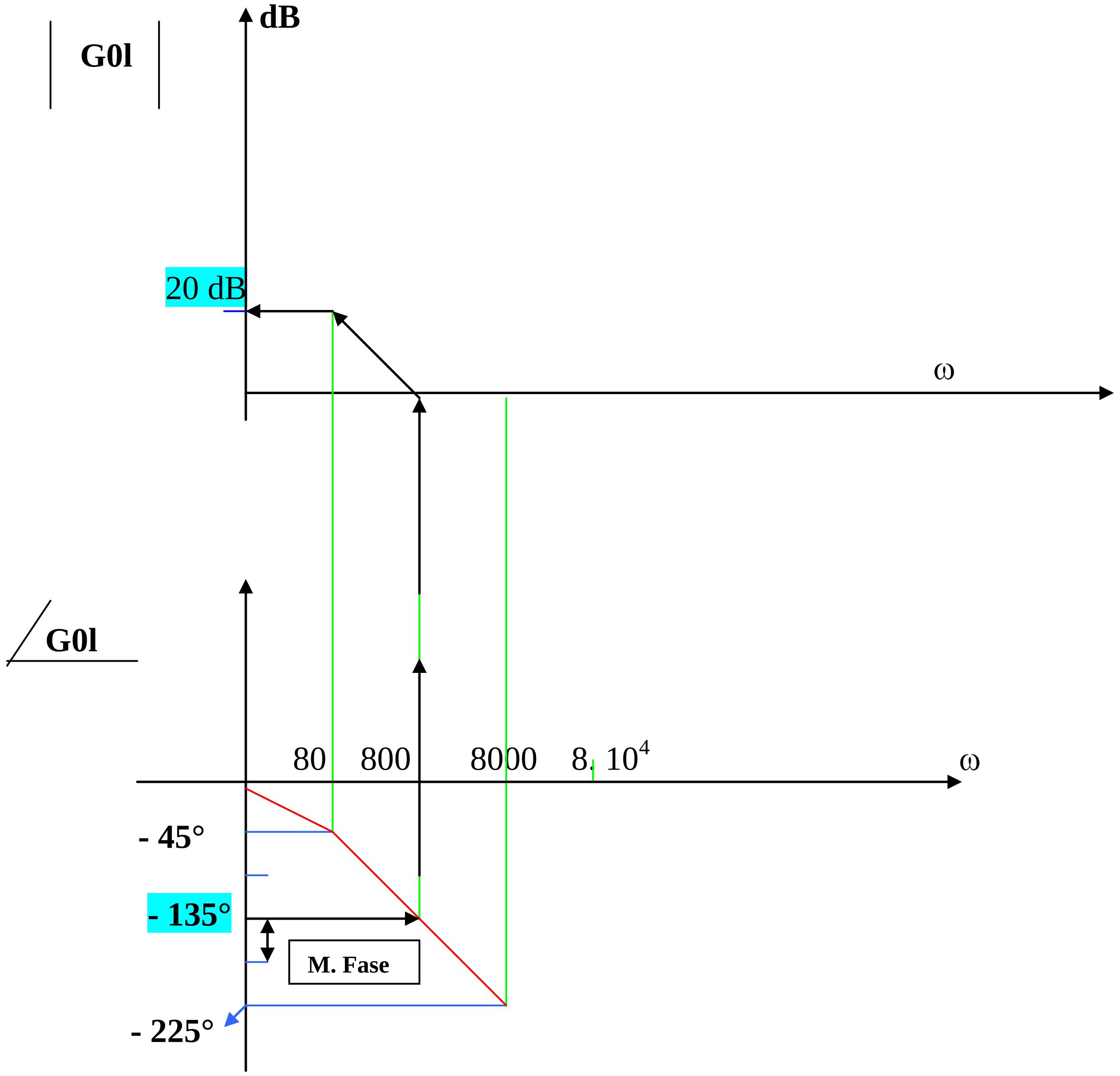
Nel nostro caso la **G0l** risulta uguale a:

G0l = G (S). H (S) =

$$(0,2)\,(0,25)\,(1,6 \cdot 3,125 \cdot 10^{-3} \cdot K_p) \,/\, (1 + 0,125 \cdot 10^{-1} S)\,(1 + 0,125 \cdot 10^{-2} S)\,(1 + 0,125 \cdot 10^{-3} S)$$

$$= 0,25\, K_p\, 10^{-3} \,/\, (1 + 0,125 \cdot 10^{-1} S)\,(1 + 0,125 \cdot 10^{-2} S)\,(1 + 0,125 \cdot 10^{-3} S).$$

Costruiamo i diagrammi di Bode con la modalità da noi sempre seguita:



Si fa notare che i poli si calcolano nel modo seguente: **$1 + \tau S = 0$**, da cui risulta **$S = - (1 / \tau)$**. Nel nostro caso sarà:

Polo 1 = $- (- 1 / 0{,}125 \cdot 10^{-1}) = 8 \cdot 10 = 80$;

Polo 2 = $- (- 1 / 0{,}125 \cdot 10^{-2}) = 8 \cdot 10^{2} = 800$;

Polo 3 = $- (- 1 / 0{,}125 \cdot 10^{-3}) = 8 \cdot 10^{3} = 8.000$.

Dal grafico della pagina precedente, si osserva che, per il criterio di Bode , la stabilità del sistema si verifica qualora il diagramma del modulo taglia con una pendenza di 20 dB / decade, l'asse delle ω. Per effetto della presenza del regolatore PROPORZIONALE il taglio deve avvenire nel secondo polo, con valore pari a 800 rad / s. In tale polo, se il taglio avviene con la pendenza indicata, anche la fase, per il margine scelto, nel progetto del medesimo regolatore, risulta pari a – 135°,che per il criterio generalizzato, risulta maggiore di – 180°, garantendo la stabilità del sistema dato. Inoltre si desume che Kp deve essere scelto in modo tale che:

$$\mathbf{20 \log (0{,}25) . Kp . 10^{-3} = 20\ dB}$$

$$\mathbf{\log (0{,}25) . Kp . 10^{-3} = 20 / 20 = 1}$$

$$\mathbf{10^{\log (0{,}25) . Kp . 10^{-3}} = 10^1 = 10},$$

$$\mathbf{(0{,}25) . Kp . 10^{-3} = 10}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Kp = 10 / (0{,}25) . 10^{-3} = 10^4 / 0{,}25 = 40.000 = 40 . 10^3}.$$

In **conclusione** la stabilità del sistema si realizza, se si progetta il regolatore proporzionale P, in modo tale che la sua funzione di trasferimento Kp sia uguale a 40.000, ossia **Kp = 40.000**.