Capitolo

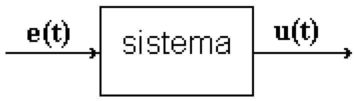
7

Stabilità dei sistemi di controllo

8.1 GENERALITÀ

La stabilità di un sistema non dipende dal segnale d'ingresso, ma dipende solo dalla f.d.t. del sistema

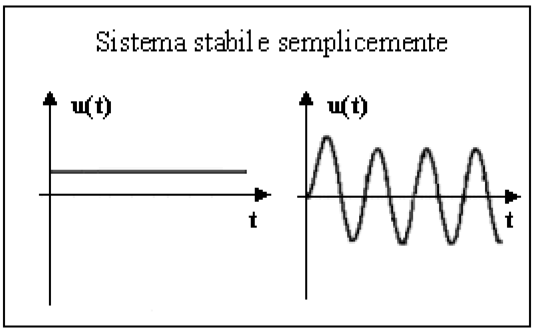
$$\text{f.d.t.} = \frac{U(s)}{E(s)}$$

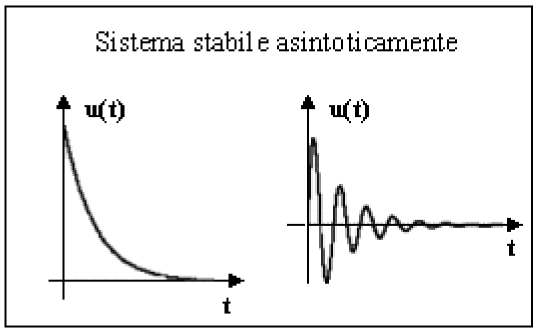


Stabilità BIBO
(Bound Input – Bounded Output)

- Un sistema lineare tempoinvariante si dice <u>stabile semplicemente</u> se risponde ad un ingresso limitato con una uscita limitata, invece se risponde con una uscita che tende a zero il sistema dicesi <u>stabile asintoticamente</u>.

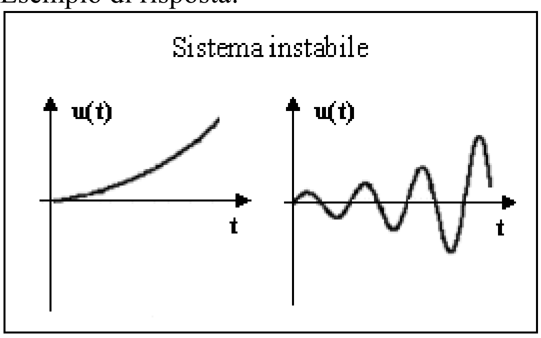
Esempio di risposta:





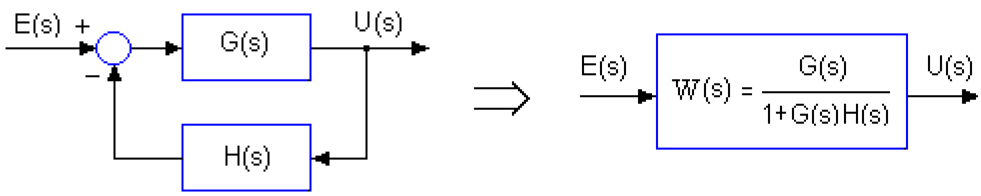
- Un sistema lineare tempoinvariante si dice <u>instabile</u> se risponde ad un ingresso limitato con una uscita non limitata (divergente)

Esempio di risposta:



8.2 CRITERIO GENERALE DI STABILITÀ

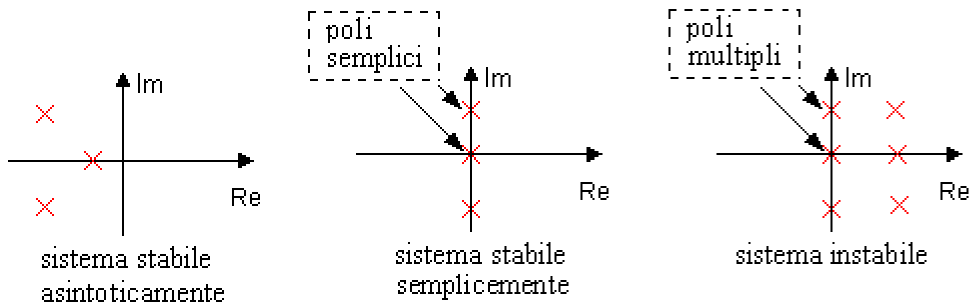
Il criterio generale di stabilità permette di determinare la stabilità di un sistema di controllo quando si conoscono i poli della f.d.t. ad anello chiuso.



W(s) = f.d.t. ad anello chiuso G(s) ·H(s) = f.d.t. ad anello aperto.

Un sistema lineare è stabile se e solo se la f.d.t. del sistema ha tutti i poli a parte reale non positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici.

Un sistema lineare è asintoticamente stabile se è solo se ha tutti i poli a parte reale negativa.



8.3 ESERCIZI - CRITERIO GENERALE DI STABILITÀ

Esercizio 1

Determinare la stabilità dei seguenti sistemi retroazionati, note le f.d.t. ad anello chiuso.

a) $W(s) = \dfrac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$ I poli sono $p_1 = -2$; $p_2 = -3$; $p_3 = -4$,

Essendo i poli tutti negativi, il sistema è stabile asintoticamente

b) $W(s) = \dfrac{10(s+1)}{(s+2)(s-3)(s+4)}$ I poli sono $p_1 = -2$; $p_2 = +3$; $p_3 = -4$.

Essendo presente un polo positivo, il sistema è instabile

c) $W(s) = \dfrac{10(s+1)}{s(s+3)(s+4)}$ I poli sono $p_1 = 0$; $p_2 = -3$; $p_3 = -4$

Essendo presente oltre ai poli negativi ; p_2 e p_3 anche il polo nullo p_1 il sistema è stabile

d) $W(s) = \dfrac{10s}{(s+3+2J)(s+3-2J)}$ I poli sono $p_1 = -3 - 2j$; $p_2 = -3 + 2j$

Essendo i poli complessi e coniugati con parte reale negativa il sistema è stabile asintoticamente

e) $W(s) = \dfrac{10+s}{(s+1)(s^2+9)}$ I poli sono $p_1 = -1 - 2j$; $p_2 = +3j$; $p_3 = -3j$

Essendo i poli p_1 reale negativo e p_2 e p_3 complessi e coniugati con parte reale nulla il sistema è stabile

f) $W(s) = \dfrac{s+2}{s^2(s+1)(s+3)}$ I poli sono $p_1 = p_2 = 0$; $p_3 = -1$; $p_4 = -3$

Avendo la W(s) un polo doppio nell'origine il sistema è instabile

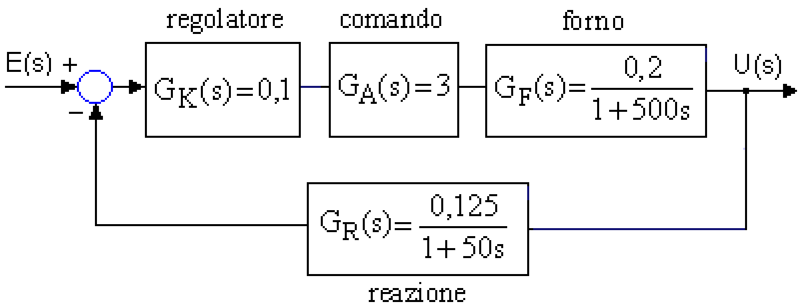
Esercizio 2

Uno stabilimento utilizza, per la cottura di merendine, un sistema di controllo di temperatura a catena chiusa. Sapendo che le funzioni di trasferimento del regolatore, del circuito di comando, del forno e del circuito di reazione(termocoppia e circuito di condizionamento) sono rispettivamente:

$$G_K(s) = 0{,}1 \qquad G_A(s) = 3 \qquad G_F(s) = \frac{0{,}2}{1+500s} \qquad G_R(s) = \frac{0{,}125}{1+50s}$$

Determinare la f.d.t. complessiva del sistema

Soluzione



$$W(s) = \frac{0{,}06 \cdot (1+50s)}{25000s^2 + 550s + 1} \quad \text{(Cap. IV pag.9)}$$

<u>Calcolo dei poli</u>

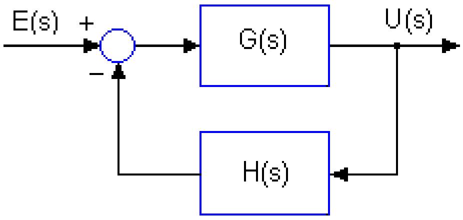
$2500s^2+550s+1 = 0$

$$p_{1/2} = \frac{-275 \pm \sqrt{225^2 - 2500}}{2500} = \frac{-275 \pm 219{,}3}{2500} \quad \Rightarrow \quad p_1 = -\,0{,}02 \ ; \ p_2 = -\,0{,}2$$

Il sistema avendo poli reali e negativi è asintoticamente stabile

8.4 CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST

Consideriamo il sistema in figura



Il criterio di stabilità di Nyquist permette di determinare la stabilità del sistema ad anello chiuso. Esso si basa sul tracciamento del diagramma di Nyquist della funzione f.d.t. ad anello aperto cioè $L(s) = G(s) \cdot H(s)$. per ω[1] variabile da $-\infty$ a $+\infty$

Enunciato del criterio di stabilità di Nyquist

Il criterio afferma che un sistema ad anello chiuso è stabile se e solo se il numero di giri (N) in senso antiorario compiuti dal diagramma di Nyquist della f.d.t. ad anello aperto intorno al punto –1 è uguale al numero dei poli (P) a parte reale positiva (cioè non presenta poli nel semipiano destro)

Riassumendo

$P = N \Rightarrow$ sistema stabile

$P \neq N \Rightarrow$ sistema instabile

Nota

Se P=0, cioè la f.d.t. ad anello aperto non presenta poli a parte reale positiva. Il sistema ad anello chiuso è stabile, se il diagramma di Nyquist non compie nessun giro intorno al punto –1 (N=0)

[1] I valori di $\omega < 0$ non hanno significato fisico, ma solo matematico. Il diagramma di Nyquist per ω da 0 a $-\infty$ è il simmetrico rispetto all'asse reale di quello relativo ad ω variabile da 0 ad $+\infty$

8.6 MARGINE DI FASE E MARGINE DI GUADAGNO

Il margine di fase e il margine di guadagno permettono di valutare il grado di stabilità di un sistema ad anello chiuso.

Margine di fase

$$m_f = 180° - |\Phi c|$$

dove:

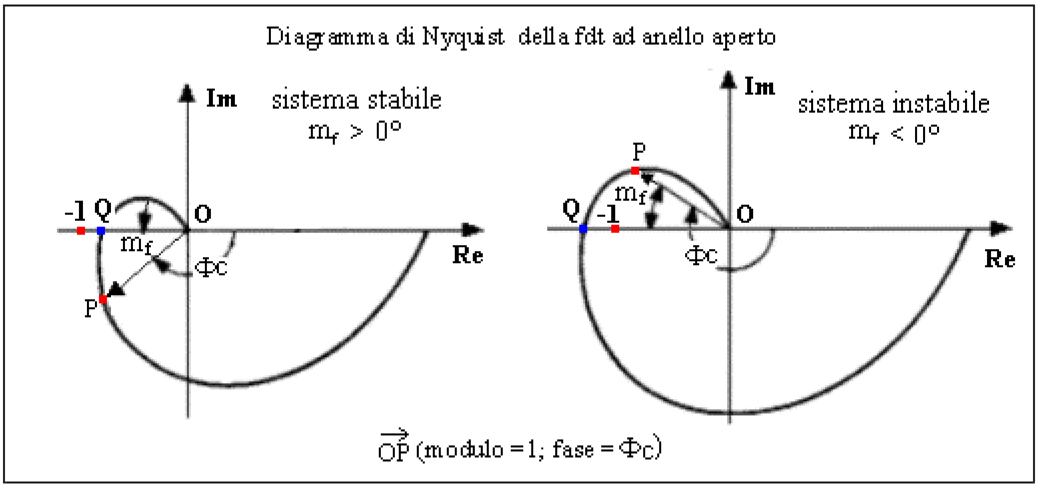
Φc (sfasamento critico) è lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto in corrispondenza della pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 1.

Margine di guadagno

$$m_g = \frac{1}{OQ} \quad ; \qquad |m_g|_{dB} = 20 \cdot \log m_g$$

dove:

OQ è il modulo della fdt ad anello aperto in corrispondenza di uno sfasamento della f.d.t. ad anello aperto di 180°



- Grado di stabilità in funzione del margine di guadagno
  $m_f > 30°$ ⇒ sistema sufficientemente stabile
  $m_f < 0°$ ⇒ sistema instabile
- Grado di stabilità in funzione del margine di guadagno
  $m_g > 10 \div 20$ dB ⇒ sistema sufficientemente stabile
  $m_g < 0$ dB ⇒ sistema instabile

8.5 ESERCIZI - CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST

Esercizio 1

Discutere la stabilità con il criterio di Nyquist

$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \qquad \text{(poli = -1)}$$

La f.d.t. ad anello aperto non presenta poli a parte reale positiva (P = 0), quindi per essere stabile il sistema ad anello chiuso, il diagramma di Nyquist non deve compiere nessun giro intorno al punto –1 (N = 0)

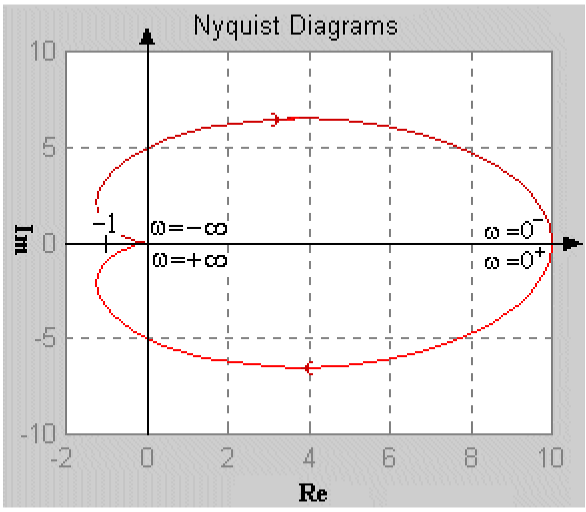
$$L(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+j\omega)}$$

$$L = |L(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot \sqrt{1+\omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{(1+\omega^2)^2}} = \frac{10}{1+\omega^2} \;;$$

$$\varphi = \angle L(j\omega) = \text{arctg}\frac{0}{10} - \text{arctg}\frac{\omega}{1} = -\text{arctg}\frac{\omega}{1} = -2\,\text{arctg}\omega$$

ω	**L=** $\lvert L(j\omega)\rvert$	$\varphi = \angle L(j\omega)$
0	10	- 2arctg 0 = 0°
∞	0	-2 arctg ∞ = - 180°
$\lvert p \rvert = 1$	$\frac{10}{2} = 5$	- 2atcg 1 = -90°

Il modulo parte da 10 e decresce, la fase parte da 0 e decresce fino a 180°



Il diagramma di Nyquist non compie nessun giro intorno al punto –1, pertanto il sistema ad anello chiuso è stabile.

Margine di Guadagno

$$m_g = \frac{1}{OQ} = \infty$$

Margine di fase

$$m_f = 180° - |\Phi c|$$

Φc è lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto in corrispondenza della pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 1.

$$|L(j\omega)| = 1 = \frac{10}{\sqrt{(1+\omega^2)^2}} \quad \Rightarrow \quad 1+\omega_p^2 = 10 \quad \Rightarrow \omega_p = 3 \text{ rad/sec}$$

$$\Phi c = \angle L(j\omega_p) = = -2\,\text{arctg}\omega_p = -2\,\text{arctg}3 \cong -144°$$

$$m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - 144° = 36°$$

Esercizio 2

Discutere la stabilità con il criterio di Nyquist

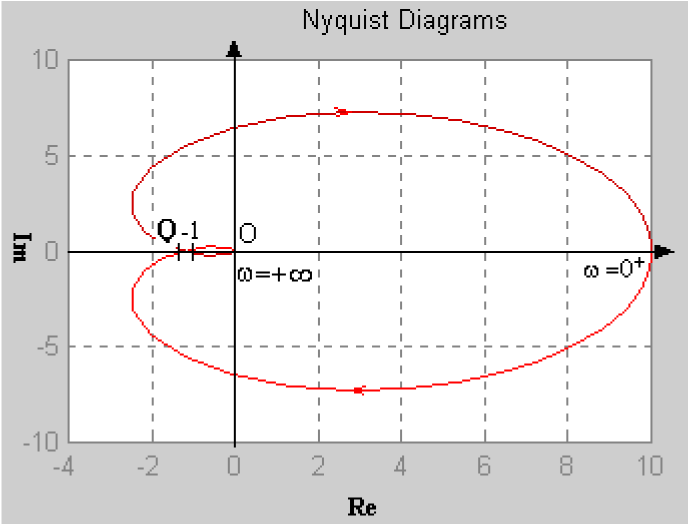
$$L(s) = G(s)\cdot H(s) = \frac{10}{(1+s)^3} \qquad (\text{poli} = -1)$$

Anche in questo caso la f.d.t. ad anello aperto non presenta poli a parte reale positiva (P = 0), quindi per essere stabile il sistema ad anello chiuso, il diagramma di Nyquist non deve compiere nessun giro intorno al punto –1 (N = 0)

$$L(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)^3}$$

$$L = |L(j\omega)| = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega^2})^3} \quad ; \quad \varphi = \angle L(j\omega) = = -3\,\text{arctg}\omega$$

ω	**L=** $\lvert L(j\omega)\rvert$	$\varphi = \angle L(j\omega)$
0	10	- 3arctg 0 = 0°
∞	0	-3 arctg ∞ = - 270°



Per stabilire se il diagramma compie rotazioni intorno al punto –1 bisogna stabilire dove si trova il punto Q in cui il diagramma attraversa l'asse reale. Tale punto è caratterizzato da una fase di 180°

$$\angle L(j\omega_q) = = -3\,\text{arctg}\omega_q = 180° \;\Rightarrow\; \text{arctg}\omega_q = 60° \Rightarrow \omega_q = \sqrt{3}$$

$$OQ = \left|L(j\omega_q)\right| = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega_q{}^2})^3} = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega_q{}^2})^3} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

Il punto Q si trova a sinistra del punto –1, attorno al quale il diagramma compie due giri in senso orario (N = - 2), pertanto il sistema è instabile.

<u>Margine di Guadagno</u>

$$m_g = \frac{1}{OQ} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$$

<u>Margine di fase</u>

$$m_f = 180° - |\Phi c|$$

Φc è lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto in corrispondenza della pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 1.

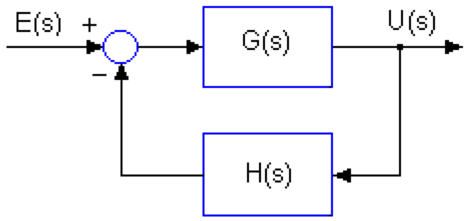
$$|L(j\omega)| = \quad 1 \quad == \frac{10}{(\sqrt{(1+\omega_q{}^2})^3} \qquad \Rightarrow \; \omega_q \cong 2 \text{ rad/sec}$$

$$\Phi c \;= \angle L(j\omega_p) = = -3\,\text{arctg}\omega_p = -2\,\text{arctg}2 \;\cong -192°$$

$$m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - 192° = \;\; -12 < 0°$$

8.7 CRITERIO GENERALE DI STABILITÀ DI BODE[1]

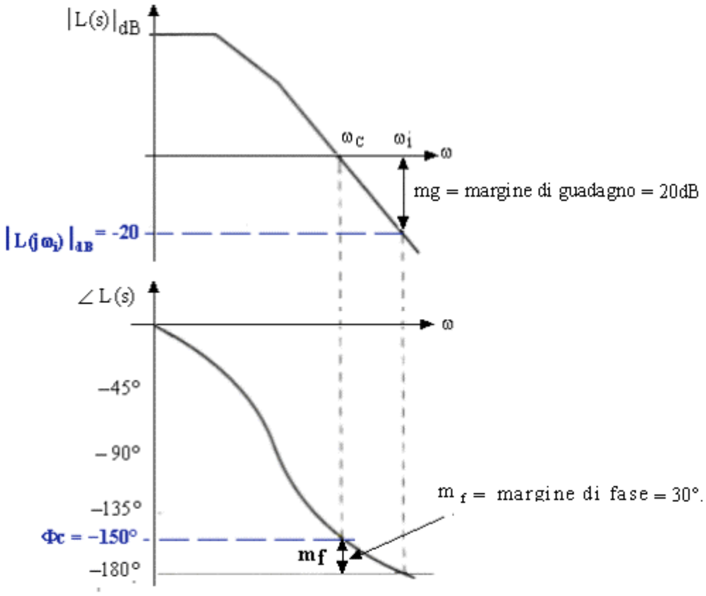
Consideriamo un sistema ad anello chiuso



Il criterio di stabilità di Bode[1] permette di determinare la stabilità quando è nota la funzione f.d.t. ad anello aperto cioè la $L(s) = G(s)\cdot H(s)$.

Un sistema a catena chiusa è stabile: se lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto calcolato in corrispondenza della pulsazione critica[2] è inferiore in valore assoluto a 180°

Esempio: consideriamo un sistema ad anello chiuso i cui diagrammi di Bode della f.d.t. ad anello aperto siano i seguenti



Il sistema è stabile in quanto in corrispondenza della pulsazione critica ω_C, lo sfasamento in valore assoluto della f.d.t ad anello aperto è $|\Phi c| = 150° < 180°$.

Il margine di fase è $m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - |-150°| = 180° - 150° = +30°$.

Il margine di guadagno è $mg = 0 - |L(j\omega_i)|_{dB} = -|-20| = +20dB$

[1] Il criterio di stabilità di Bode può essere applicato solo se la f.d.t. del sistema ad anello aperto è stabile e a sfasamento minimo, cioè la L(s) non deve avere poli e zeri a parte reale positiva.

[2] Pulsazione critica ω_C = pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 0dB

8.8 CRITERIO SEMPLIFICATO DI STABILITÀ DI BODE

Un sistema ad anello chiuso è stabile de il diagramma del modulo del guadagno ad anello aperto interseca l'asse delle ascisse con una pendenza di – 40dB/dec.
Se la pendenza è maggiore o uguale a –60dB/dec il sistema è sicuramente instabile;
con una pendenza di –40dB/dec il sistema potrebbe essere instabile e si deve ricorrere al criterio generale di stabilità

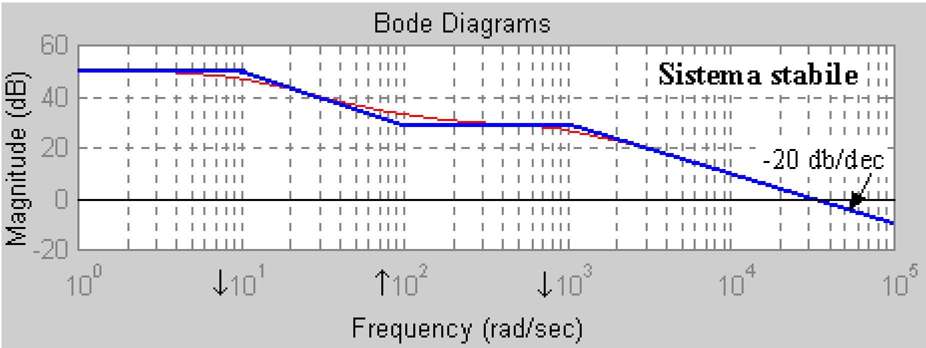
8.9 ESERCIZI - CRITERIO SEMPLIFICATO DI STABILITÀ DI BODE

Esercizio 1

Verificare la stabilità del sistema ad anello chiuso

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{316\cdot(1+0.01s)}{(1+0,1s)\cdot(1+0,001s)}$$

Zeri: z1= -100 $\Rightarrow$ $\uparrow\omega_Z$=100 rad/*sec*
Poli: p_1= -10 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P1}$ =10 rad/s ; p_2= -1000 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P2}$ =1000 rad/s
Costante: K = 316 $\Rightarrow$ K_{dB} = 20log 316 = 50 dB



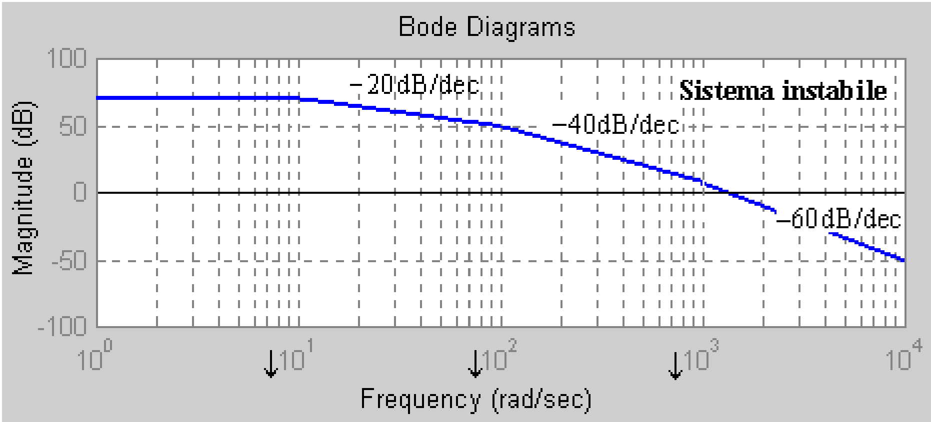
L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 20dB/dec, pertanto il sistema è stabile

Esercizio 2

Verificare la stabilità del sistema ad anello chiuso

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{3162}{(1+0,1s)\cdot(1+0,01s)\cdot(1+0,001s)}$$

Poli:
p_1= -10 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P1}$ =10 rad/s
p_2= -100 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P2}$ =100 rad/s
p_2= -1000 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P3}$ =1000 rad/s
Costante: K = 3162 $\Rightarrow$ K_{dB} = 20log 3162= 70 dB



L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 60dB/dec,pertanto il sistema è instabile

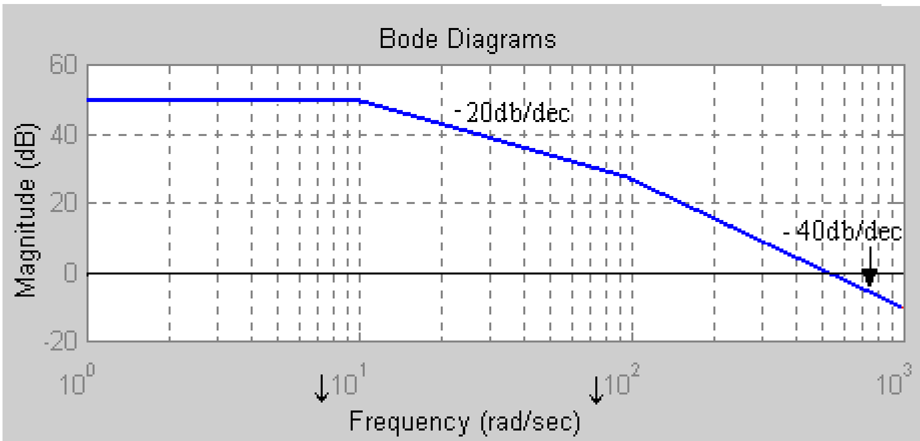
Esercizio 3

Verificare la stabilità del sistema ad anello chiuso

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{316}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}01s)}$$

Poli: p_1= -10 ⇒ $\downarrow\omega_{P1}$ =10 rad/s ; p_2= -100 ⇒ $\downarrow\omega_{P2}$ =100 rad/s

Costante: K = 316 ⇒ K_{dB} = 20log 316= 50 dB



L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 40dB/dec, il criterio semplificato di Bode non ci permette di valutare la stabilità.

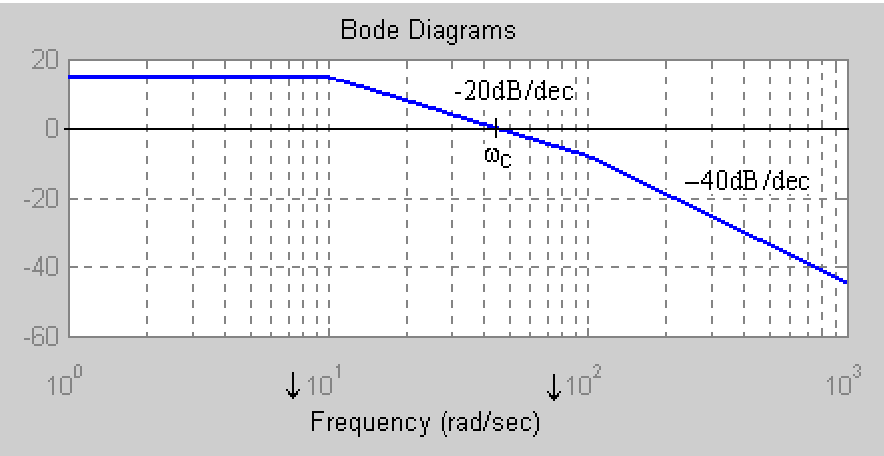
8.10 ESERCIZI - STABILIZZAZIONE PER RIDUZIONE DEL GUADAGNO DI ANELLO

Esercizio 1

Analizzare la stabilità del sistema dell'esercizio N.3, ma con guadagno K minore di 35dB

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{5{,}62}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}01s)}$$

Poli: $p_1 = -10 \Rightarrow \downarrow\omega_{P1} = 10$ rad/s; $p_2 = -100 \Rightarrow \downarrow\omega_{P2} = 100$ rad/s
Costante: $K = 5{,}62 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 5{,}62 = 20 \cdot 0{,}75 = 15$ dB



La curva del modulo ha lo stesso andamento della figura dell'esercizio N.3, ma parte non più da 50dB, ma da 20dB. L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene ora prima del secondo polo con una pendenza di – 20dB/dec, per il criterio semplificato di Bode il sistema è stabile.

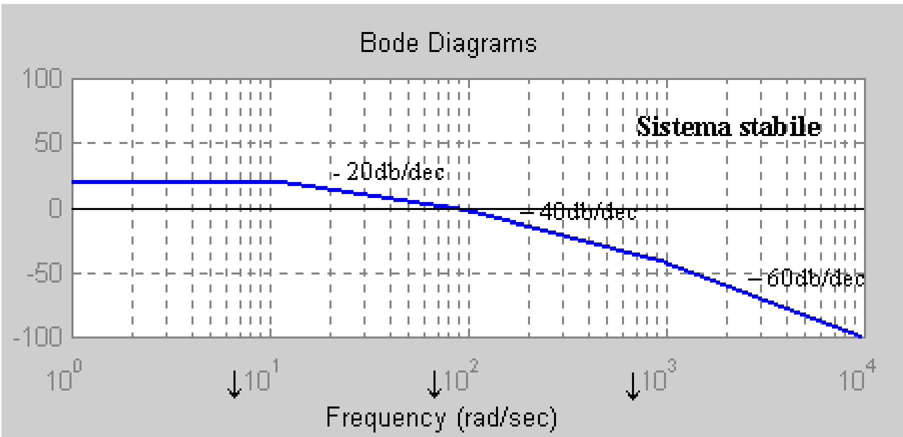
Esercizio 2
Stabilizzare il sistema dell'esercizio N.2 riducendo il guadagno d'anello

$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{3162}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}01s)\cdot(1+0{,}001s)}$$

Poli:
$p_1 = -10 \Rightarrow \downarrow \omega_{P1} = 10$ rad/s
$p_2 = -100 \Rightarrow \downarrow \omega_{P2} = 100$ rad/s
$p_2 = -1000 \Rightarrow \downarrow \omega_{P3} = 1000$ rad/s
Costante: $K = 3162 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 3162 = 70$ dB

E' sufficiente fare in modo che quando arriva il secondo polo la curva attraversi l'asse delle ascisse. Quindi bisogna imporre che alla pulsazione di 100 rad/sec il guadagno risulti $|L(s)|_{dB} = 0$ dB.
Dal grafico dell'esercizio N.2 si ricava $K_{db} == (70-50)dB = 20dB \Rightarrow K = 10$

$$L'(s) = \frac{10}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}01s)\cdot(1+0{,}001s)}$$



L'attraversamento dell'asse delle ascisse ora avviene con una pendenza di – 20dB/dec, per il criterio semplificato di Bode il sistema è stabile.

Nota:
Da questi esempi si evince:
- che la stabilità oltre al guadagno d'anello dipende dal numero dei poli della L(s), in quanto ogni polo incrementa ulteriore la pendenza di 20dB/dec
- che con la riduzione del guadagno di anello K, si migliora la stabilità del sistema.

Questo metodo di stabilizzazione in genere non è seguito, perché il sistema di controllo diviene più lento, meno preciso e più sensibile ai disturbi.

.

8.11 ESERCIZI: CRITERIO GENERALE DI STABILITÀ DI BODE

Osservazioni

Rispetto al criterio di Nyquist, il criterio di Bode ha il vantaggio di servirsi dei diagrammi di Bode più agevoli da tracciare.
La pulsazione critica può essere ricavata con buona approssimazione dal diagramma di Bode asintotico del modulo, a condizione che non vi siano cambiamenti di pendenza nelle vicinanze della pulsazione critica
La fase critica invece conviene calcolarla analiticamente.

Esercizio 1

Discutere la stabilità con il criterio di Bode.

$$L(s) = G(s)\cdot H(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$$

Diagramma di Bode del Modulo

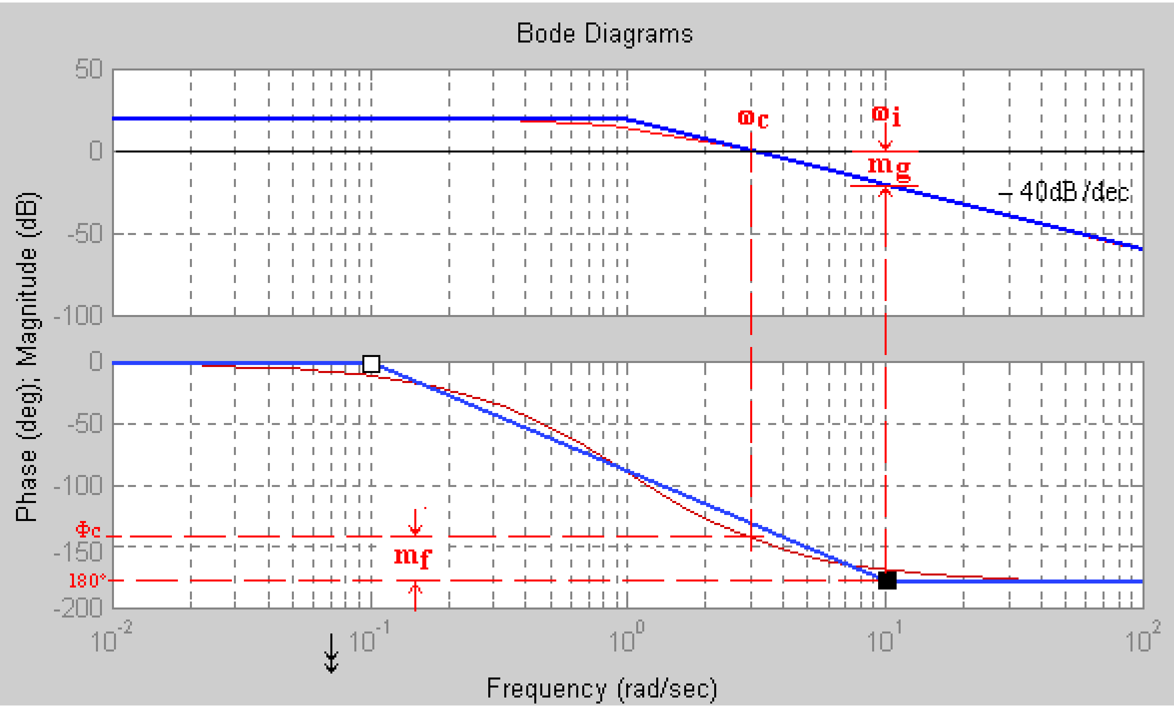
Poli: $p_1 = p_2 = -1 \Rightarrow \quad \omega_P = \omega_{P1} = \omega_{P2} = 1$ rad/s

Costante: $K = 10 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 10 = 20$ dB

Diagramma di Bode della fase

$$L(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)^2}; \qquad \angle L(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{0}{10} - 2\cdot\operatorname{arctg}\frac{\omega}{1} = -2\operatorname{arctg}\omega$$

Costante	0°	
Polo doppio	□ $0{,}1\omega_p = 0{,}1$ rad/sec $(\cong 0°)$	■ $10\omega_{p1} = 10$ $(\cong -180°)$



- La fase critica può essere calcolata analiticamente $\Phi c = \angle L(j\omega_c) = -2 \cdot \text{arctg } 3 = 144°$

Nota:. Φc ricavato dal diagramma asintotico ha un valore minore.

Poiché lo sfasamento in corrispondenza della pulsazione critica è 144° < 180° il sistema ad anello chiuso per il criterio di Bode è stabile

Il margine di fase è $m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - |-144°| = +36°$
Il margine di guadagno è $mg = 0 - |L(j\omega_i)|_{dB} = -|-20| = +20dB$

Esercizio 2
Discutere la stabilità con il criterio di Bode.

$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

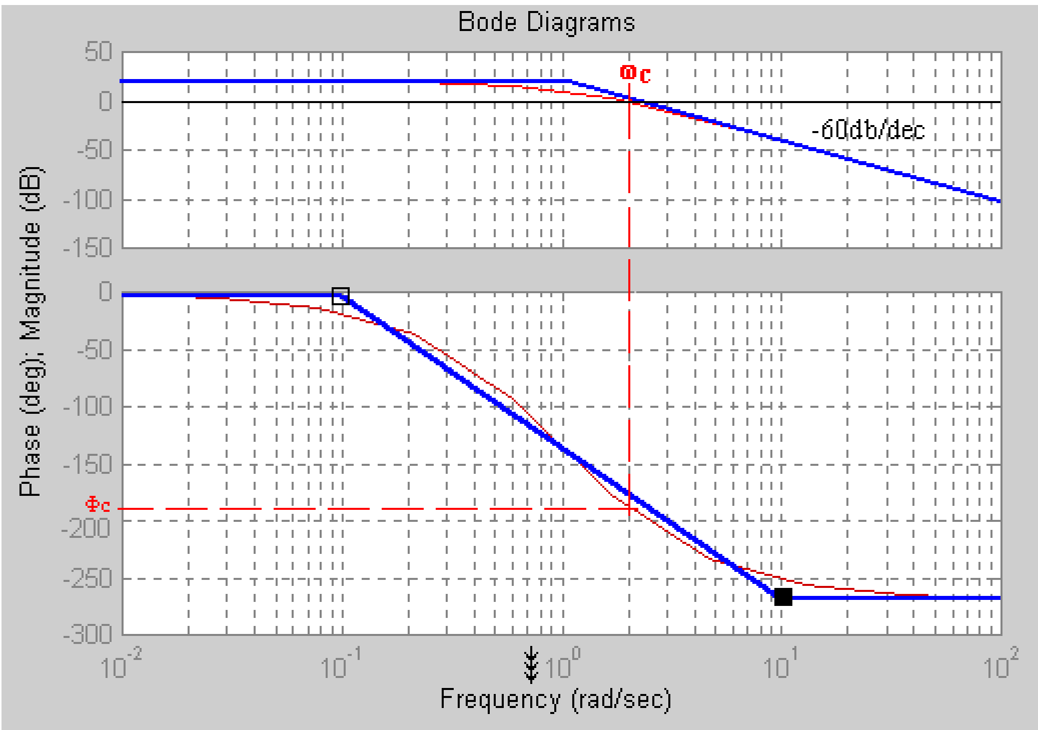
Diagramma di Bode del Modulo

Poli: $p_1 = p_2 = p_3 = -1 \Rightarrow \omega_P = \omega_{P1} = \omega_{P2} = \omega_{P3} = 1$ rad/s
Costante: $K = 10 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 10 = 20dB$

Diagramma di Bode della fase

$$L(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)^3}; \quad \angle L(j\omega) = \text{arctg}\frac{0}{10} - 3 \cdot \text{arctg}\frac{\omega}{1} = -3\,\text{arctg}\omega$$

Costante	0°	
Polo triplo	□ $0{,}1\omega_p = 0{,}1$ rad/sec (≅ 0°)	■ $10\omega_{p1} = 10$ (≅ -270°)



- La pulsazione critica vale $\omega_C = 2$ rad/sec
- La fase critica può essere calcolata analiticamente $\Phi c = \angle L(j\omega_c) = -3 \cdot \text{arctg } 2 = 192°$

Poiché lo sfasamento in corrispondenza della pulsazione critica è 192° > 180° il sistema ad anello chiuso per il criterio di Bode è instabile.

Il margine di fase è $m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - |-192°| = -12° < 0$
Il margine di guadagno è $mg < 0$

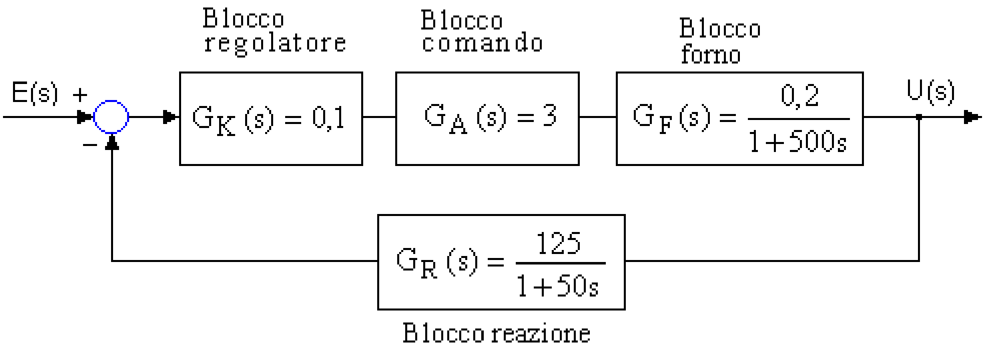
<u>Esercizio 3</u>

Uno stabilimento utilizza, per la cottura di merendine, un sistema di controllo di temperatura a catena chiusa. Sapendo che le funzioni di trasferimento del regolatore, del sistema di comando, del forno e del blocco di reazione (termocoppia e circuito di condizionamento) sono rispettivamente:

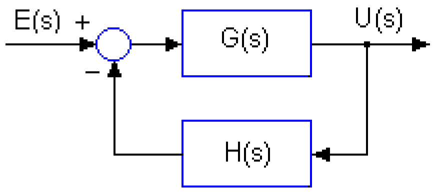
$$G_K(s) = 0{,}1 \qquad G_A(s) = 3 \qquad G_F(s) = \frac{0{,}2}{1+500s} \qquad G_R(s) = \frac{125}{1+50s}$$

Analizzare la stabilità del sistema

<u>Soluzione</u>



Semplificando si ha:



$$G(s) = 0{,}1 \cdot 3 \cdot \frac{0{,}2}{1+500s} = \frac{0{,}06}{1+500s}$$

$$H(s) = \frac{0{,}125}{1+50s}$$

La f..dt. ad anello aperto vale $L(s) = G(s)H(s) = \dfrac{0{,}06}{1+500s}\,\dfrac{125}{1+50s} = \dfrac{7{,}5}{(1+50s)\cdot(1+500s)}$

La f.d.t. ad anello aperto è stabile in quanto i poli della f.d.t. sono reali e negativi (p_1= -1/500; p_2= -1/50), pertanto per determinare la stabilità del sistema ad anello chiuso si può applicare il criterio di Bode.

<u>Diagramma di Bode del Modulo</u>

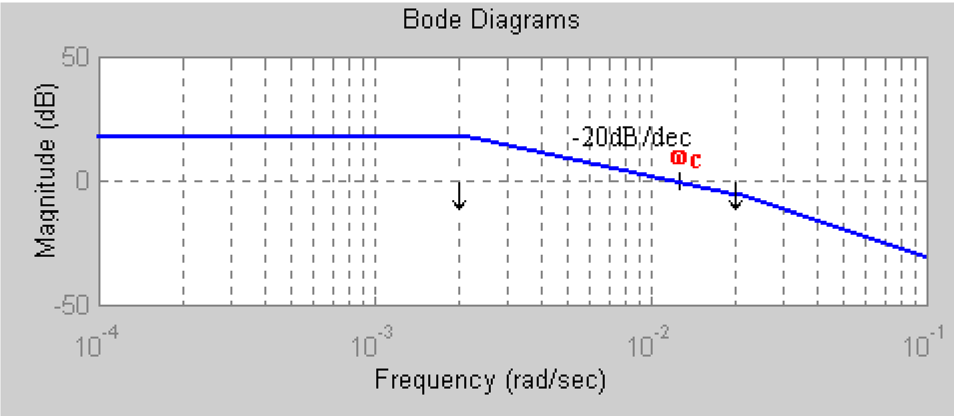
<u>Poli</u>

P_1= -1/50 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P1}$ = 1 / 500 = 0,002 rad/s

P_2= -1/500 $\Rightarrow$ $\downarrow\omega_{P2}$ = 1 / 50 = 0,02 rad/s

<u>Costante</u>

K = 7,5 $\Rightarrow$ K_{dB} = 20 log 7,5 = 17,5 dB



- La pulsazione critica vale $\omega_C \approx 1{,}4\cdot10^{-2}$ rad/sec
- La fase critica può essere calcolata analiticamente:

$$\Phi c = \angle L(j\omega_c) = -\ \mathrm{arctg}\frac{50\omega}{1} - \mathrm{arctg}\frac{500\omega}{1} \approx -\ 35° + 82° = 117°$$

Poiché lo sfasamento in corrispondenza della pulsazione critica (ω_c) e minore di 180°, il sistema ad anello chiuso per il criterio di Bode è stabile.

Il margine di fase è $m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - |-117°| = 67°$

<u>Nota:</u>

Per determinare la stabilità si poteva in alternativa applicare il criterio semplificato di Bode.

Dal grafico si nota che l'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 20dB/dec, pertanto per il criterio semplificato di Bode il sistema è stabile

8.13 SPECIFICHE DEI SISTEMI REAZIONATI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Per la progettazione dei sistemi ad anello chiuso si tengono conto nel dominio della frequenza delle seguenti specifiche

- Larghezza di banda

La larghezza di banda è l'intervallo delle frequenze tale che il modulo della f.d.t. ad anello chiuso W(s), non è mai minore di 3dB del valore che esso assume quando $\omega = 0$
Per il calcolo della larghezza di banda per sistemi ad anello chiuso si utilizza la f.d.t. ad anello aperto.

$$L(s) = G(s) \cdot H(s)$$

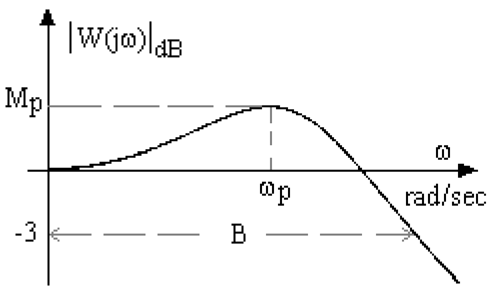
La larghezza di banda (B) di un sistema ad anello chiuso è approssimativamente uguale alla pulsazione critica[2]

$$B \cong \omega_c$$

- Picco di risonanza e Pulsazione di risonanza

Per i sistemi ad anello chiuso del 2°ordine con poli complessi e coniugati $\zeta \le 0{,}7$

$$W(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n} \quad ; s = j\omega$$



$$M_p = \frac{1}{2\zeta \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{(picco di risonanza)}$$

$$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{(pulsazione di risonanza)}$$

[2] Pulsazione critica ω_C = pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 0dB