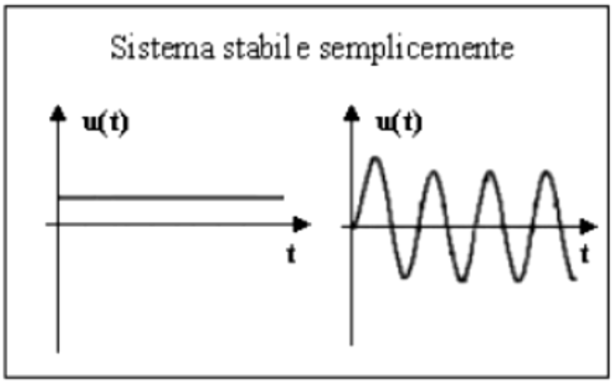
SISTEMI DI CONTROLLO

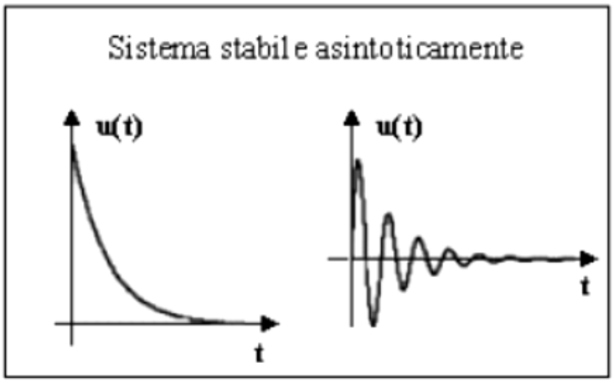
STABILITA'

La stabilità dei sistemi di controllo NON dipende dal tipo di segnale di IN, ma SOLO dalla FdT (Funzione di Trasferimento) del sistema stesso, definita del Dominio della variabile complessa **s**, come rapporto tra le TRASFORMATE DI LAPLACE del segnale di OUT e di IN : **G(s) = OUT(s) / IN(s)**

- Un sistema lineare tempoinvariante si dice <u>stabile semplicemente</u> se risponde ad un ingresso limitato con una uscita limitata, invece se risponde con una uscita che tende a zero il sistema dicesi <u>stabile asintoticamente</u>.

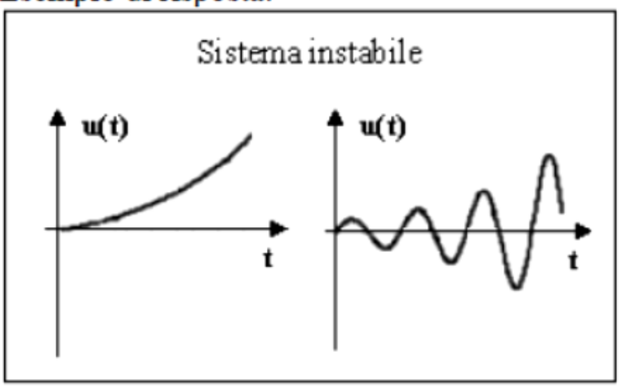
Esempio di risposta:





- Un sistema lineare tempoinvariante si dice <u>instabile</u> se risponde ad un ingresso limitato con una uscita non limitata (divergente)

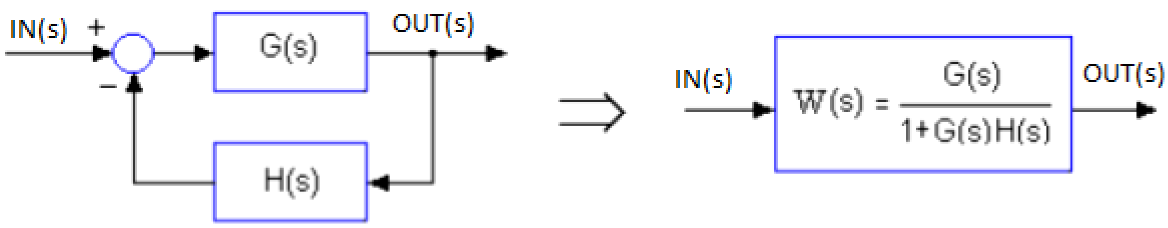
Esempio di risposta:



CRITERIO GENERALE DI STABILITA'

(Posizione dei Poli nel Piano di Gauss)

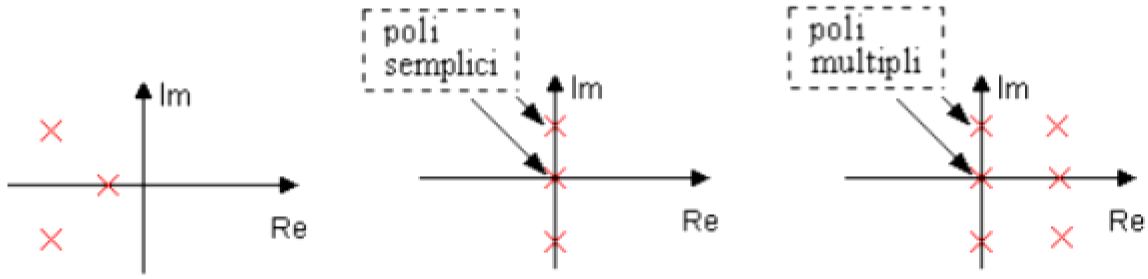
Il criterio generale di stabilità permette di determinare la stabilità di un sistema di controllo quando si conoscono i poli della f.d.t. ad anello chiuso.



W(s) = f.d.t. ad anello chiuso G(s) ·H(s) = f.d.t. ad anello aperto.

Un sistema lineare è stabile se e solo se la f.d.t. del sistema ha tutti i poli a parte reale non positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici.

Un sistema lineare è asintoticamente stabile se è solo se ha tutti i poli a parte reale negativa.



sistema stabile asintoticamente

sistema stabile semplicemente

sistema instabile

ESERCIZIO 1

Determinare la stabilità dei seguenti sistemi retroazionati, note le f.d.t. ad anello chiuso.

a) $W(s) = \dfrac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$ I poli sono $p_1 = -2$, $p_2 = -3$, $p_3 = -4$,

Essendo i poli tutti negativi, il sistema è stabile asintoticamente

b) $W(s) = \dfrac{10(s+1)}{(s+2)(s-3)(s+4)}$ I poli sono $p_1 = -2$, $p_2 = +3$, $p_3 = -4$.

Essendo presente un polo positivo, il sistema è instabile

c) $W(s) = \dfrac{10(s+1)}{s(s+3)(s+4)}$ I poli sono $p_1 = 0$, $p_2 = -3$, $p_3 = -4$

Essendo presente, oltre ai poli negativi p_2 e p_3, anche il polo nullo p_1, il sistema è stabile

d) $W(s) = \dfrac{10s}{(s+3+2J)(s+3-2J)}$ I poli sono $p_1 = -3 - 2j$, $p_2 = -3 + 2j$

Essendo i poli complessi e coniugati con parte reale negativa, il sistema è stabile asintoticamente

e) $W(s) = \dfrac{10+s}{(s+1)(s^2+9)}$ I poli sono $p_1 = -1$ $p_2 = +3j$, $p_3 = -3j$

Essendo i poli: p_1 reale negativo e p_2 e p_3 complessi e coniugati con parte reale nulla, il sistema è stabile

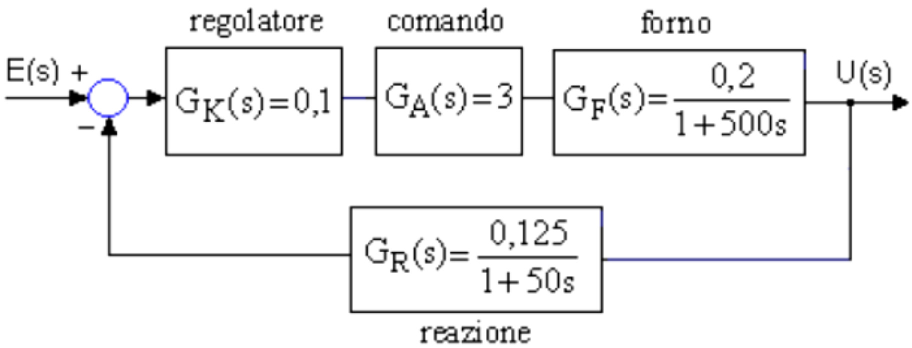
Esercizio 2

Uno stabilimento utilizza, per la cottura di merendine, un sistema di controllo di temperatura a catena chiusa. Sapendo che le funzioni di trasferimento del regolatore, del circuito di comando, del forno e del circuito di reazione(termocoppia e circuito di condizionamento) sono rispettivamente:

$$G_K(s) = 0{,}1 \qquad G_A(s) = 3 \qquad G_F(s) = \frac{0{,}2}{1+500s} \qquad G_R(s) = \frac{0{,}125}{1+50s}$$

Determinare la f.d.t. complessiva del sistema

Soluzione



$$W(s) = \frac{0{,}06 \cdot (1+50s)}{25000s^2 + 550s + 1}$$

Calcolo dei poli

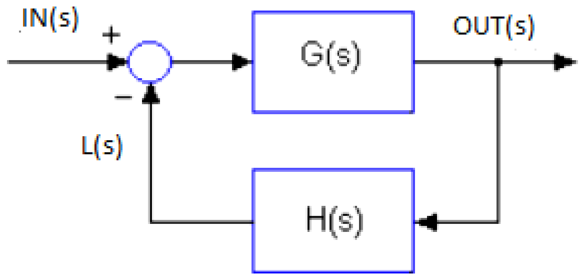
$$2500s^2+550s+1 = 0$$

$$p_{1/2} = \frac{-275 \pm \sqrt{225^2 - 2500}}{2500} = \frac{-275 \pm 219{,}3}{2500} \quad \Rightarrow \quad p_1 = -\,0{,}02 \ ; \ p_2 = -\,0{,}2$$

Il sistema avendo poli reali e negativi è asintoticamente stabile

CRITERIO DI STABILITA' DI NYQUIST

Consideriamo il sistema in figura



Il criterio di stabilità di Nyquist permette di determinare la stabilità del sistema ad anello chiuso. Esso si basa sul tracciamento del diagramma di Nyquist della funzione f.d.t. ad anello aperto cioè $L(s) = G(s) \cdot H(s)$. per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$

Enunciato del criterio di stabilità di Nyquist

Il criterio afferma che un sistema ad anello chiuso è stabile se e solo se il numero di giri (N) in senso antiorario compiuti dal diagramma di Nyquist della f.d.t. ad anello aperto intorno al punto -1 è uguale al numero dei poli (P) a parte reale positiva (cioè non presenta poli nel semipiano destro)

Riassumendo

$P = N \Rightarrow$ sistema stabile

$P \neq N \Rightarrow$ sistema instabile

Se P = 0 , cioè la FdT ad anello aperto **NON** presenta poli a parte reale **POSITIVA**, il Sistema ad anello chiuso sarà **STABILE** se e solo se il diagramma di Nyquist non compirà alcun giro intorno al Punto **(-1 , j0)**

- **FdT ad anello aperto : G(s) * H(s)**

- **FdT ad anello chiuso (Retroazione Negativa) :** $G(s) = \dfrac{OUT(s)}{IN(s)} = \dfrac{G(s)}{1 + G(s) * H(s)}$

MARGINE DI FASE E MARGINE DI GUADAGNO

Il margine di fase e il margine di guadagno permettono di valutare il grado di stabilità di un sistema ad anello chiuso.

Margine di fase

$$m_f = 180° - |\Phi c|$$

dove:

Φc (sfasamento critico) è lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto in corrispondenza della pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 1.

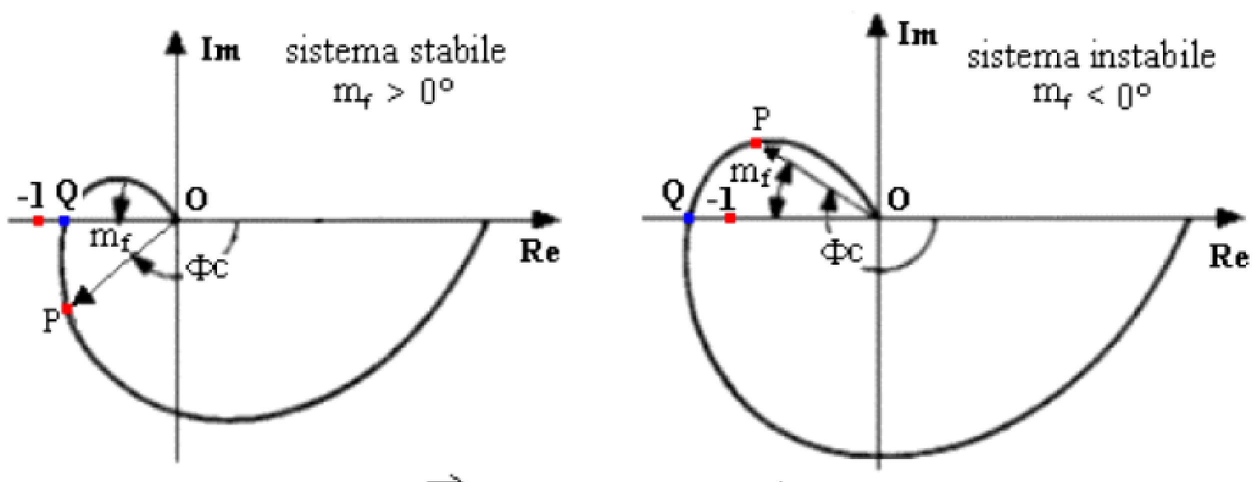
Margine di guadagno

$$m_g = \frac{1}{OQ} \quad ; \qquad |m_g|_{dB} = 20 \cdot \log m_g$$

dove:

OQ è il modulo della fdt ad anello aperto in corrispondenza di uno sfasamento della f.d.t. ad anello aperto di 180°

Diagramma di Nyquist della fdt ad anello aperto



$\vec{OP}$ (modulo = 1; fase = Φc)

- Grado di stabilità in funzione del margine di guadagno
  - $m_f > 30° \Rightarrow$ sistema sufficientemente stabile
  - $m_f < 0° \Rightarrow$ sistema instabile
- Grado di stabilità in funzione del margine di guadagno
  - $m_g > 10 \div 20$ dB $\Rightarrow$ sistema sufficientemente stabile
  - $m_g < 0$ dB $\Rightarrow$ sistema instabile

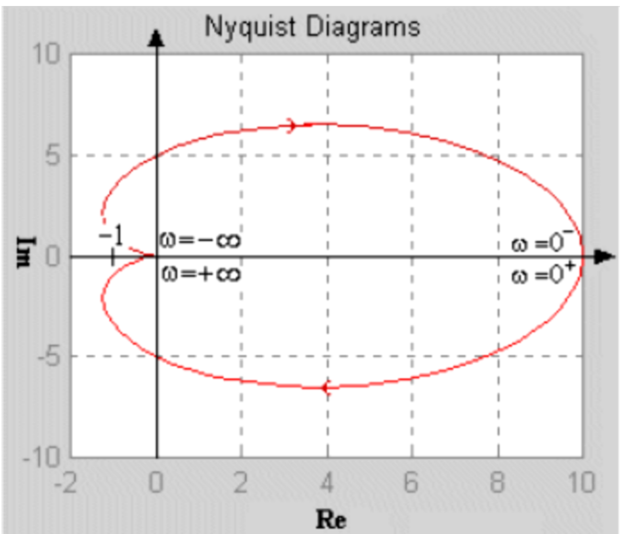
ESERCIZI SUL CRITERIO DI STABILITA' DI NYQUIST

ES.1) $L(s) = G(s) * H(s) = \dfrac{10}{(1 + s^2)}$ polo Reale Negativo doppio, in s = -1

- La FdT ad anello aperto NON presenta poli a parte reale positiva
- Affinchè il Sistema ad anello chiuso sia stabile, bisogna che il diagramma di Nyquist NON Compia alcun giro intorno al punto (-1, j0)
- $L(j\omega) = \dfrac{10}{(1 + j\omega) * (1 + j\omega)}$
- $|L| = \dfrac{10}{\sqrt{1 + \omega^2} * \sqrt{1 + \omega^2}} = \dfrac{10}{1 + \omega^2}$
- Fase(L) = - 2 artan (ω)

	$\lvert L(j\omega) \rvert$	Fase(L)
per ω = 0	**10**	**0°**
per ω → ∞	**0**	**-180°**
per ω = 1	**5**	**- 90°**

- il Modulo parte da 10, vale 5 nel polo doppio e decresce fino a zero
- la Fase parte da zero, vale -90° nel polo doppio e arriva fino a -180
- poiché il diagramma non compie alcun giro intorno al punto (-1, j0), il sistema è stabile.



Calcoliamo il Margine Guadagno e il Margine di Fase :

Margine di Guadagno = 1 / OQ = ∞

Dobbiamo ora calcolare il valore di ω per cui |L| = 1 (0 [dB])

$$|L| = \frac{10}{(1+\omega^2)} = 1 \quad >>>> \quad 10 = (1+\omega^2) \quad >>>> \quad \omega^2 = 9 \quad >>>> \quad \omega = 3\ [rad/s]$$

Ora vediamo quanto vale la Fase per questo valore di pulsazione :

Fase(L) per ω=3 >>>> - 2 artan(3) ≈ - 144°

Da cui Margine di Fase = 180° - 144° = 36°

IL SISTEMA E' STABILE

Esercizio 2

Discutere la stabilità con il criterio di Nyquist

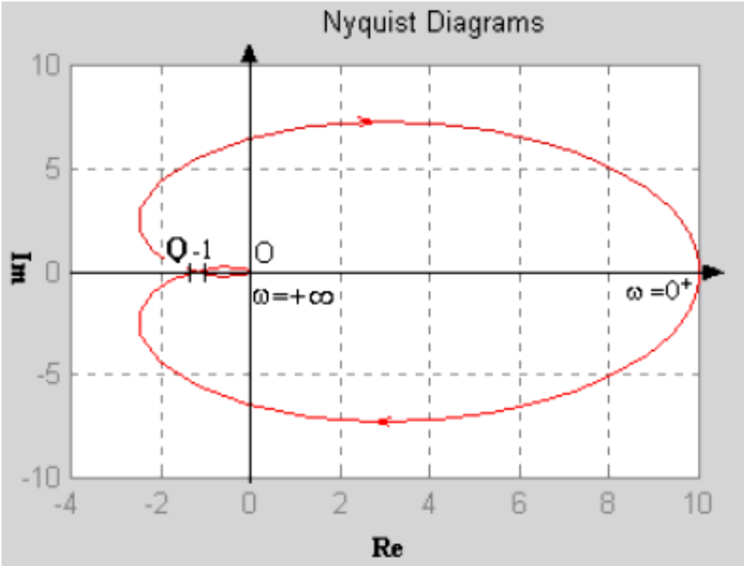
$$L(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$ **polo triplo in s = - 1**

Anche in questo caso la f.d.t. ad anello aperto non presenta poli a parte reale positiva quindi per essere stabile il sistema ad anello chiuso, il diagramma di Nyquist non deve compiere nessun giro intorno al punto –1 , j0

$$L(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)^3}$$

$$L = |L(j\omega)| = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega^2})^3} \quad ; \quad \varphi = \angle L(j\omega) = = -3\,\text{arctg}\,\omega$$

ω	L = |L(jω)|	φ = ∠L(jω)
0	10	- 3arctg 0 = 0°
∞	0	-3 arctg ∞ = - 270°



Calcoliamo il valore di ω per cui il diagramma taglia l'asse Reale (punto Q , avente fase 180°) :

$$\angle L(j\omega_q) = = -3 \operatorname{arctg}\omega_q = 180° \Rightarrow \operatorname{arctg}\omega_q = 60° \Rightarrow \omega_q = \sqrt{3}$$

$$OQ = |L(j\omega_q)| = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega_q^2})^3} = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega_q^2})^3} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

Il punto Q si trova a sinistra del punto −1, attorno al quale il diagramma compie due giri in senso orario (N = - 2), pertanto il sistema è instabile.

<u>Margine di Guadagno</u>

$$m_g = \frac{1}{OQ} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$$

<u>Margine di fase</u>

$$m_f = 180° - |\Phi c|$$

Φc è lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto in corrispondenza della pulsazione alla quale il modulo della funzione di trasferimento ad anello aperto vale 1.

$$|L(j\omega)| = 1 == \frac{10}{(\sqrt{(1+\omega_q^2})^3} \Rightarrow \omega_q \cong 2 \text{ rad/sec}$$

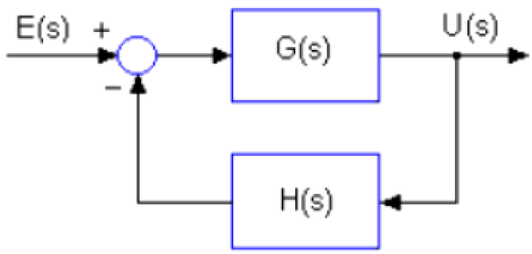
$$\Phi c = \angle L(j\omega_p) = = -3 \operatorname{arctg}\omega_p = -2 \operatorname{arctg}2 \cong -192°$$

$$m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - 192° = -12 < 0°$$

IL SISTEMA E' INSTABILE

CRITERIO DI STABILITA' DI BODE

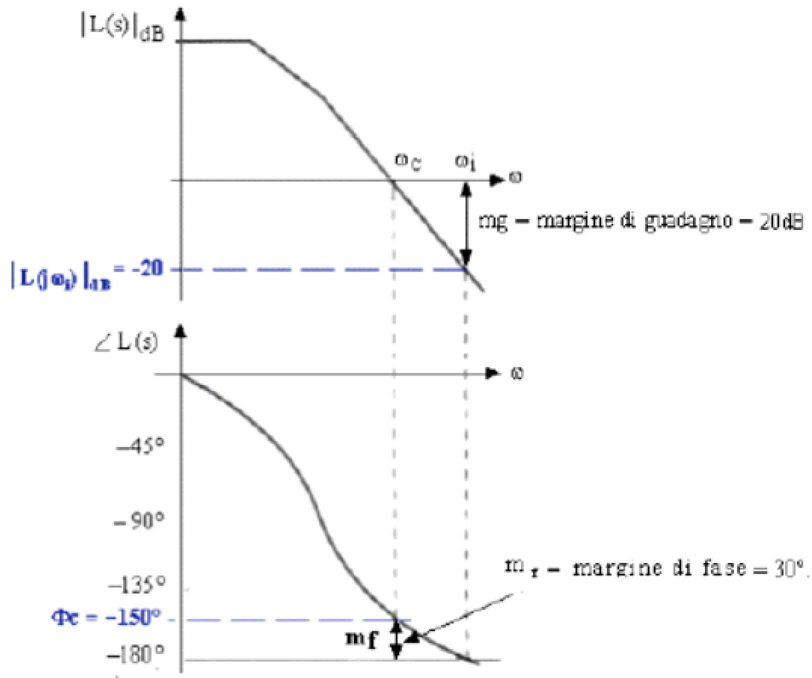
Consideriamo un sistema ad anello chiuso



Il criterio di stabilità di Bode[1] permette di determinare la stabilità quando è nota la funzione f.d.t. ad anello aperto cioè la $L(s) = G(s) \cdot H(s)$.

Un sistema a catena chiusa è stabile: se lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto calcolato in corrispondenza della pulsazione critica[2] è inferiore in valore assoluto a 180°

<u>Esempio</u>: consideriamo un sistema ad anello chiuso i cui diagrammi di Bode della f.d.t. ad anello aperto siano i seguenti



Il sistema è stabile in quanto in corrispondenza della pulsazione critica ω_C, lo sfasamento in valore assoluto della f.d.t ad anello aperto è $|\Phi c| = 150° < 180°$.

Il margine di fase è $m_f = 180° - |\Phi c| = 180° - |-150°| = 180° - 150° = +30°$.

Il margine di guadagno è $mg = 0 - |L(j\omega_i)|_{dB} = -|-20| = +20dB$

Note : 1. La FdT non deve avere zeri e poli a parte reale positiva
2. Pulsazione critica ω_c : pulsazione per cui $|L(j\omega)| = 0$ [dB]

CRITERIO DI STABILITA' DI BODE SEMPLIFICATO

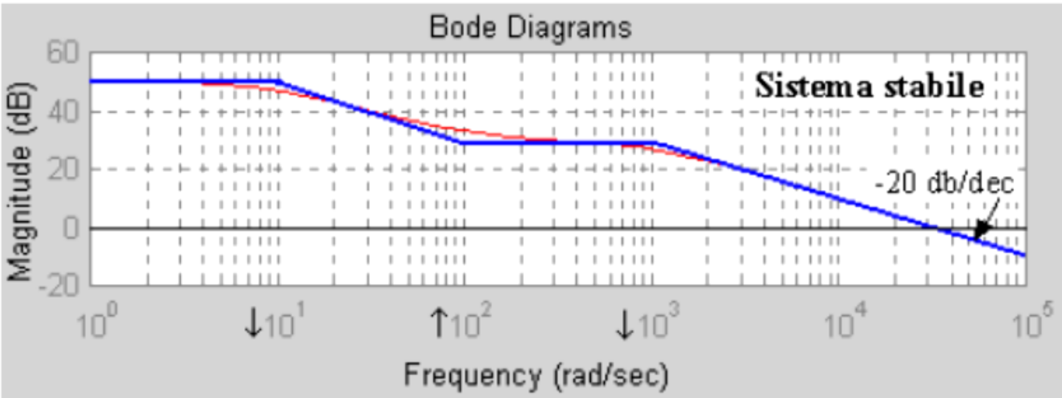
Un sistema ad anello chiuso è stabile **se** il diagramma del modulo del guadagno ad anello aperto interseca l'asse delle ascisse con una pendenza di – 40dB/dec.
Se la pendenza è maggiore o uguale a –60dB/dec il sistema è sicuramente instabile;
con una pendenza di –40dB/dec il sistema potrebbe essere instabile e si deve ricorrere al criterio generale di stabilità

Esercizio 1

Verificare la stabilità del sistema ad anello chiuso

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{316\cdot(1+0.01s)}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}001s)}$$

Zeri: $z1 = -100 \Rightarrow \uparrow\omega_Z=100$ rad/*sec*
Poli: $p_1= -10 \Rightarrow \downarrow\omega_{P1}=10$ rad/s ; $p_2= -1000 \Rightarrow \downarrow\omega_{P2}=1000$ rad/s
Costante: $K = 316 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 316 = 50$ dB



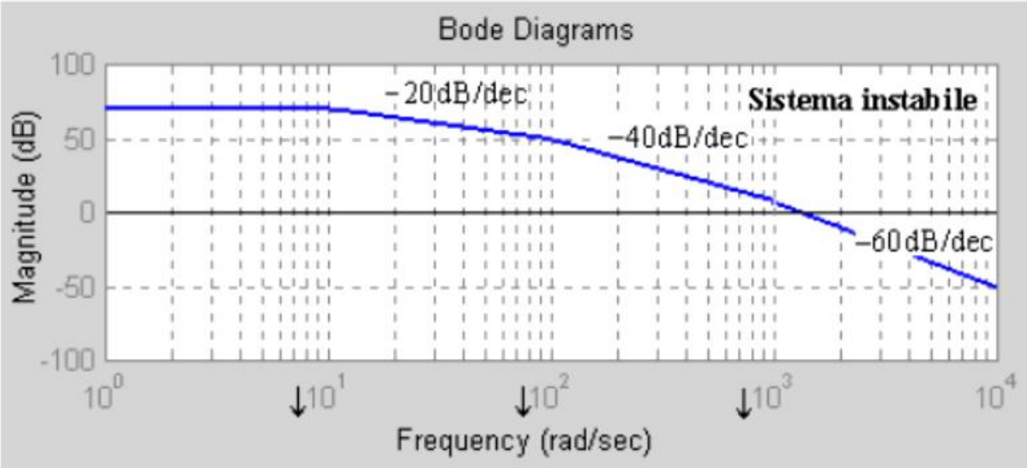
L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 20dB/dec, pertanto il sistema è stabile

Esercizio 2

Verificare la stabilità del sistema ad anello chiuso

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{3162}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}01s)\cdot(1+0{,}001s)}$$

Poli:
$p_1= -10 \Rightarrow \downarrow\omega_{P1}=10$ rad/s
$p_2= -100 \Rightarrow \downarrow\omega_{P2}=100$ rad/s
$p_2= -1000 \Rightarrow \downarrow\omega_{P3}=1000$ rad/s
Costante: $K = 3162 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 3162= 70$ dB



L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 60dB/dec,pertanto il sistema è instabile

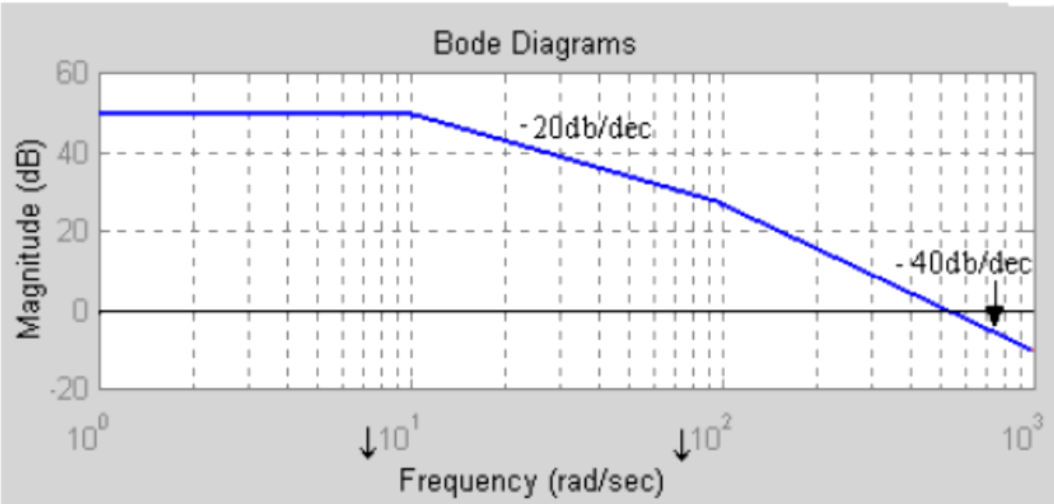
Esercizio 3

Verificare la stabilità del sistema ad anello chiuso

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{316}{(1+0{,}1s)\cdot(1+0{,}01s)}$$

Poli: $p_1= -10 \Rightarrow \downarrow\omega_{P1} =10$ rad/s ; $p_2= -100 \Rightarrow \downarrow\omega_{P2} =100$ rad/s

Costante: $K = 316 \Rightarrow K_{dB} = 20\log 316= 50$ dB



L'attraversamento dell'asse delle ascisse avviene con una pendenza di – 40dB/dec, il criterio semplificato di Bode non ci permette di valutare la stabilità.