

MODULAZIONI

L'informazione deve essere trasferita a distanza tramite un mezzo di supporto, che può essere di tipo diverso [linea metallica, canale hertziano (= spazio atmosferico o anche interplanetario), fibre ottiche]. Poiché il segnale subisce attenuazione e si degrada a causa del rumore presente sul canale, per svariate cause, e a causa delle distorsioni introdotte soprattutto dagli elementi attivi (amplificatori, filtri), deve subire un trattamento opportuno per poter essere trasmesso in modo soddisfacente e poter essere ricostruito correttamente in ricezione.

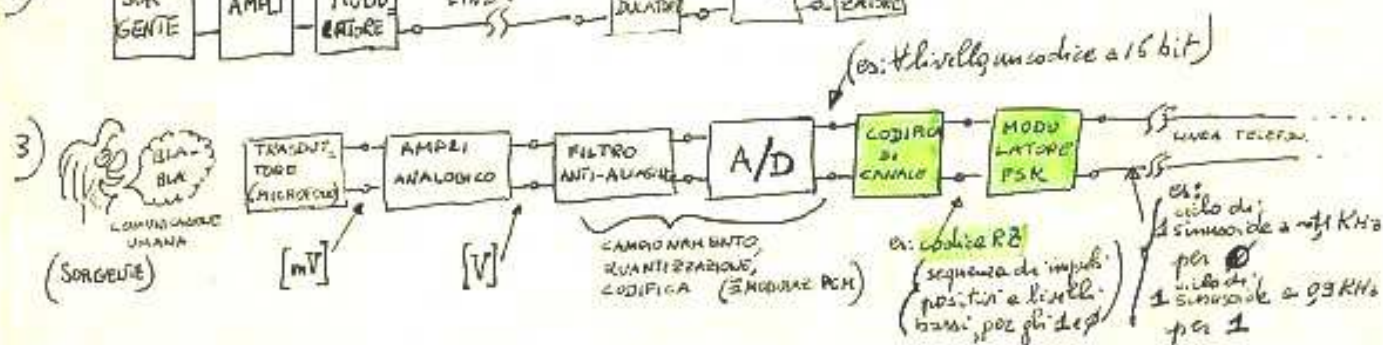
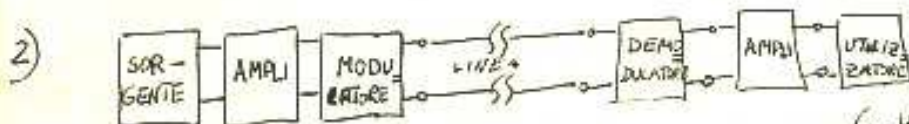
Questo trattamento consiste in un processo di manipolazione del segnale informativo, processo definito MODULAZIONE o anche CODIFICA DI LINEA.

In ricezione, il segnale viene demodulato e ricostruito.

Posiamo costruire schemi e blocchi via via più dettagliati, indicando i vari dispositivi coinvolti.



fig. 13



In ricezione, ci sarà il demodulatore PSK, il convertitore D/A, l'amplificatore, l'altoparlante di uscita per ricostruire il segnale vocale nella banda audio (20-20.000 Hz).

La scelta della tecnica di modulazione avviene soprattutto in base ad alcuni fattori

- 1) distanza tra Tx e Rx
- 2) Tipo di mezzo trasmissivo (linea metallica, spazio, fibre ottiche)
- 3) Natura dell'informazione (analogica, digitale)
- 4) Qualità della trasmissione
- 5) costo

SCOPI DELLA MODULAZIONE

- 1) Per adattare il segnale informativo al canale: segnali elettrici di diversa frequenza (e diversa lunghezza d'onda $\lambda \cdot f = v$) si propagano diversamente nello stesso mezzo e viceversa: in mezzi diversi un segnale di una certa f subisce diverse attenuazioni.
- a) Per esempio per comunicazioni militari tra sottomarini si usano segnali a bassissima frequenza, che si propagano meglio nell'acqua.
- b) Nell'atmosfera si propagano bene segnali nella banda dei 100 MHz (FM) o di qualche GHz (telefonia, panti-radio, telef. GSM) ma a un certo punto, se λ diventa comparabile con le dimensioni delle goccioline di vapore acqua, si può avere assorbimento dell'energia delle onde elm, per cui il segnale si attenua fortemente. Adolittura le radiazioni elm, provenienti dallo spazio esterno e di $f > 10^{17}$ Hz, sono in grado di interagire con le molecole dei gas dell'alta atmosfera, ionizzando gli atomi $\left[\frac{3 \cdot 10^{-9}}{10^{17}} = 3 \cdot 10^{-26} \text{ [m]} \right]$ (Gli elettroni di valenza, ricevendo energia dalla radiazione $\times \sigma$, abbandonano l'atomo, che diventa ione).
- Questa fascia atmosferica (IONOSFERA) è sfruttata nella trasmissione radiofonica in ONDE MEDIE: queste onde elm, di frequenza abbastanza bassa, vengono riflesse totalmente dalla fascia di atomi ionizzati, per cui un segnale può addirittura fare il giro completo della Terra (Alcuni radioamatori, con trasmettitori di potenza relativamente ridotta, riescono a comunicare dall'Italia, anche con l'Australia!).



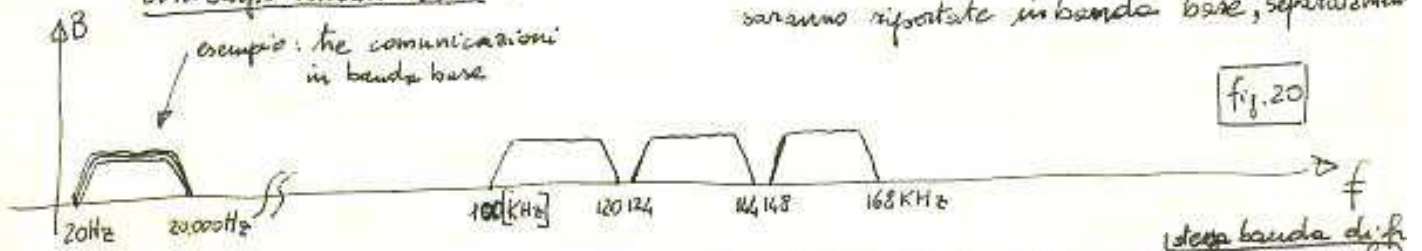
La modulazione può essere definita come l'operazione di trasferimento del segnale informativo (localizzato in una certa Banda Base), in un'altra banda, in genere a frequenza più elevata, mantenendo invariate le caratteristiche dell'informazione.

In tal modo l'informazione è messa nelle condizioni ideali per transitare in un dato canale. In tal caso c'è il problema inverso: la Banda del segnale informativo (~ 20 KHz) è molto più stretta della Banda del canale (telefonia ~ 4 KHz), per cui bisogna "stringere" la Banda.

- 2) Per adattare il segnale ai circuiti di rice-trasmissione: prima di essere inviato sul canale, il segnale dovrà essere filtrato, amplificato, adattato (in termini di impedenza) e subirà procedimenti analoghi in ricezione.
- 3) Per moltiplicare le comunicazioni sul canale: è impensabile, data la massa di comunicazioni.

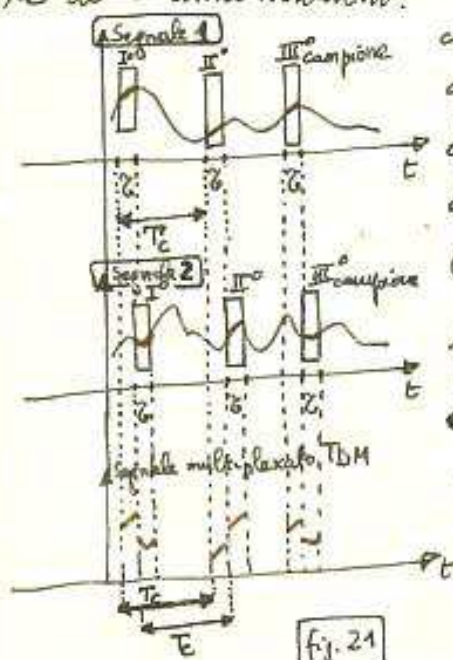
che deve transitare sui canali di comunicazione, pensare di riservare un canale a una sola comunicazione. Vi sono due alternative: **FDM** e **TDM**.

FDM: ogni comunicazione (si pensi alla banda audio 20÷20.000Hz) viene traslata in frequenza e allocata in una nuova posizione dello spettro elm, senza ^{che la} banda ^{base sia} ridotta. Ovviamente le varie comunicazioni occuperanno bande contigue, senza sovrapporsi, ma saranno presenti contemporaneamente sul canale. In ricezione, con un procedimento inverso, saranno riportate in banda base, separatamente.



TDM Il canale è a disposizione, in tempi diversi, delle varie comunicazioni, che occupano la stessa banda di f_c . Si campionano le varie comunicazioni a intervalli regolari di tempo (T_c)

Tra un campione e il successivo, della 1° forma d'onda, si campionano le altre comunicazioni. I campioni, una volta che sono stati quantizzati e codificati (PCM), sono inviati, uno dopo l'altro, sul canale. Perciò tra un campione e il successivo della stessa comunicazione, se T_c è l'intervallo di campionamento e τ è la durata del campione (non infinitesima, come nel campione ideale), potranno essere allocati $N = \frac{T_c}{\tau}$ campioni di N diverse comunicazioni.



Ovviamente T_c deve soddisfare il teorema del campionamento di Shannon:

$$T_c < \frac{T_{min}}{2}$$

$$f_c > 2f_{max}$$

← frequenza dell'armonica + alta del segnale (sviluppato in sezione di Fourier)

[Cio' vuol dire che la armonica di più alta frequenza del segnale deve essere campionata almeno 2 volte nel periodo]

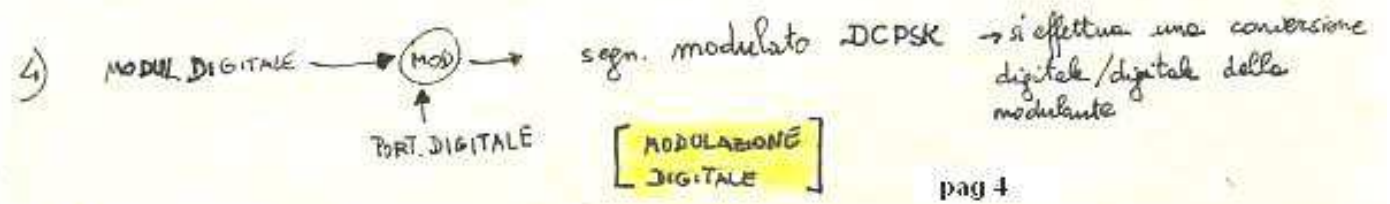
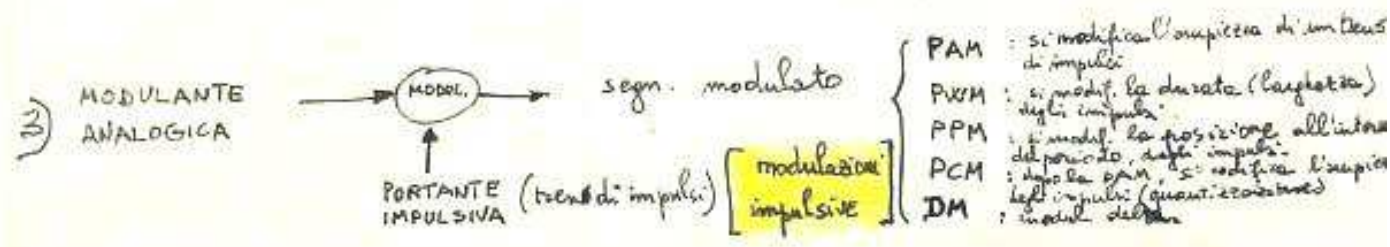
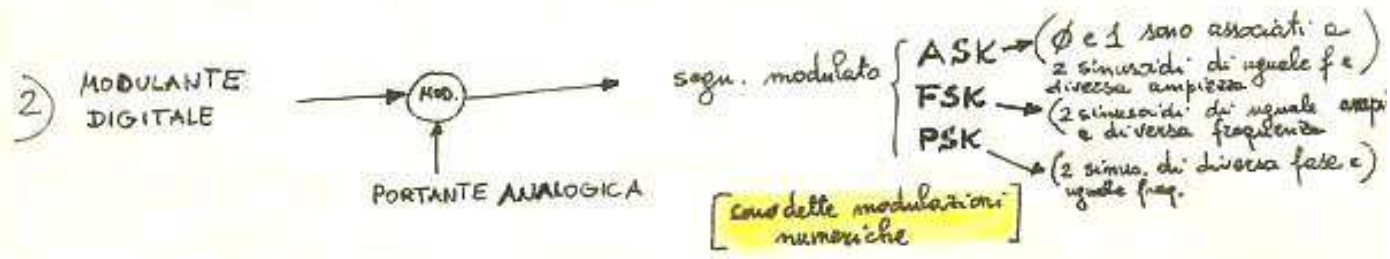
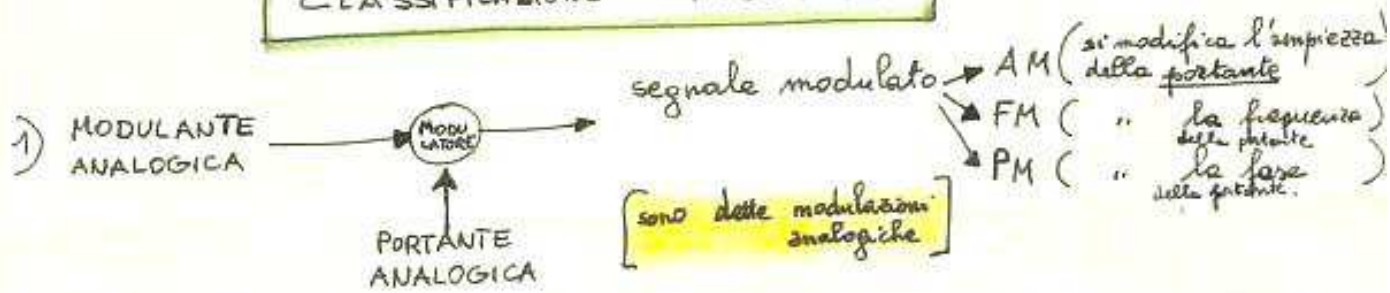
In ricezione N campioni arrivano serialmente e devono essere ridistribuiti tra le varie comunicazioni, dopo di che si ricostruiscono le varie comunicazioni analogiche.

Questi 3 motivi valgono per tutti i tipi di comunicazione (via linea o antenna) -

Per i sistemi via antenna c'è tuttavia la 4^a ragione fondamentale di cui si è già detto:

4) Dimensionamento antenna: la lunghezza dell'antenna è inversamente proporzionale alla frequenza del segnale da trasmettere $\lambda = K \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$; in banda base le antenne avrebbero dimensioni chilometriche, per cui si trasporta il segnale in HF; tenendo conto di tutti gli altri fenomeni atmosferici già visti si sceglie l'intervallo di frequenze più opportuno (onde lunghe, onde medie, corte, ultracorte, μ -onde)

CLASSIFICAZIONE MODULAZIONI



Modulante sinusoidale $v_m(t) = A_m \cos(\omega_m t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$
 Portante sinusoidale $v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$

$$\begin{cases} A_m \leq A_p \\ \omega_p \gg \omega_m \end{cases}$$

Il segnale modulante a bassa frequenza modifica l'ampiezza del segnale portante ad alta frequenza. Si ottiene una traslazione della banda base nei dintorni della freq. della portante (sopra e sotto f_p).

Espressione analitica del segnale modulato in ampiezza: [DOPPIA BANDE LATERALE CON PORTANTE TRASMESSA]

a) $v_{AM}(t) = [A_p + A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t)$

Quindi l'ampiezza del s. modulato segue l'involuppo della modulante (sinusoide a freq. f_m traslata del valore max A_p della portante), la frequenza del s. modulato e' quella della portante.

Possiamo riscrivere così $v_{AM}(t)$:

$$v_{AM}(t) = A_p [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t)$$

con $m = \frac{A_m}{A_p}$ indice di modulazione

anche $m = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}} = \frac{(A_p + A_m) - (A_p - A_m)}{(A_p + A_m) + (A_p - A_m)} = \frac{2A_m}{2A_p}$

(per una facile lettura sull'oscilloscopio)

se $m = 1$ ($A_m = A_p$), l'involuppo tocca l'asse t .

se $m > 1$ ($A_m > A_p$) si ottiene una sovr modulazione

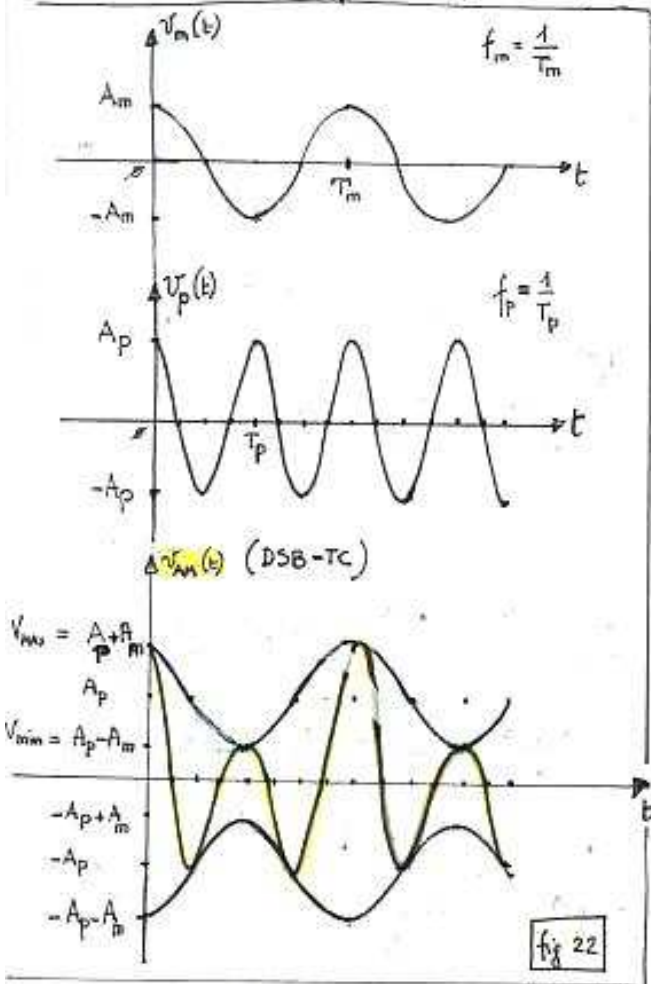


fig 22

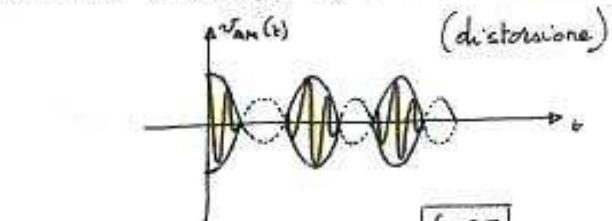


fig 23

sviluppiamo la 1):

$$v_{AM}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + A_m \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + m A_p \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t)$$

espressione del tipo $\cos \alpha \cdot \cos \beta$

Ritornando Weier: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Sommando membro a membro: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$

(DSB-TC nel dominio della frequenza)

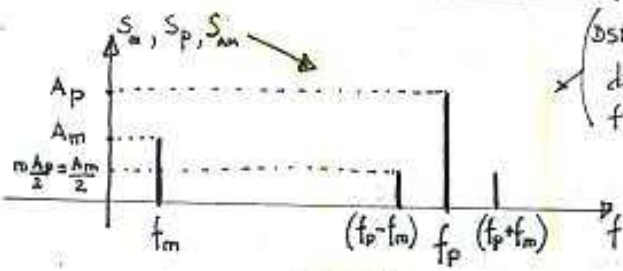


fig 24

da cui ricavando $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ essendo $\alpha = 2\pi f_p t = \omega_p t$

cioè $v_{AM}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + m \frac{A_p}{2} \cos[2\pi(f_p + f_m)t] + m \frac{A_p}{2} \cos[2\pi(f_p - f_m)t]$ $\beta = 2\pi f_m t = \omega_m t$

riga portante
riga laterale destra
riga laterale sinistra

(a questa espress. analitica corrisponde lo spettro di fig 24) (si noti che $m \frac{A_p}{2} = \frac{A_m}{A_p} \cdot \frac{A_p}{2}$)

Osservando lo spettro e/o l'espressione analitica, si comprende come sia poco efficiente questo tipo di modulazione; infatti l'informazione contenuta nella modulante (in questo esempio didattico è una sinusoidale, in pratica sarà sempre un segnale composto da molte sinusoidi, in accordo con lo sviluppo di Fourier) si ritrova raddoppiata nelle 2 righe laterali (ridondanza) e per di più il segnale più ampio è la portante, che viene trasmessa. La maggior parte della potenza sarà assorbita dalla portante, che non porta informazione. Anche nel caso di max modulazione, con $m = 1$, cioè $A_m = A_p$, si ottiene che le righe laterali sono alte $\frac{A_m}{2} = \frac{A_p}{2}$ per cui ogni riga laterale è associata, al massimo, il 25% della potenza associata alla portante ($\frac{1}{4} P_p$)

Infatti $P_{AM} = P_p + P_{BLS} + P_{BLI} = P_p + P_{BL}$

BLS ≡ BANDE LATERALI SUPERIORE
BLI ≡ " " INFERIORE

La potenza associata a un segnale elettrico è data da $P = \frac{V_{eff}^2}{R} = \frac{V_{MAX}^2}{(\sqrt{2})^2 R} = \frac{V_{MAX}^2}{2R}$

(dove $V_{eff} = \sqrt{v.r.q.m.} = \frac{V_{MAX}}{\sqrt{2}}$ (solo per la sinusoidale))

allora otterremo: $P_p = \frac{A_p^2}{2R}$ $P_{BLS} = P_{BLI} = \frac{(A_m)^2}{2R} = \frac{A_m^2}{2R} = \frac{m^2 A_p^2}{2R} = \frac{m^2}{4} \cdot \frac{A_p^2}{2R} = \frac{m^2}{4} \cdot P_p$ ($m = \frac{A_m}{A_p}$)

(potenza associata alle 2 righe) $\rightarrow P_{BL} = \frac{m^2}{2} \cdot P_p \Rightarrow P_{AM} = P_p + \frac{m^2}{2} P_p = P_p (1 + \frac{m^2}{2})$

Ovviamente la potenza del segnale modulato dipende da m (se m aumenta, aumenti il rendimento max, con $m = 1$, e' pari a $\eta = \frac{P_{BLI}}{P_{AM}} = \frac{P_{BLS}}{P_{AM}}$ (se m aumenta, aumenti le P associate alle righe laterali mentre la potenza della portante resta costante)

$= \frac{\frac{m^2}{4} P_p}{P_p (1 + \frac{m^2}{2})} = \frac{m^2}{2(2 + m^2)} = \frac{m^2}{2m^2 + 4} \Rightarrow \eta_{max} = \frac{1}{6} = 16.6\%$

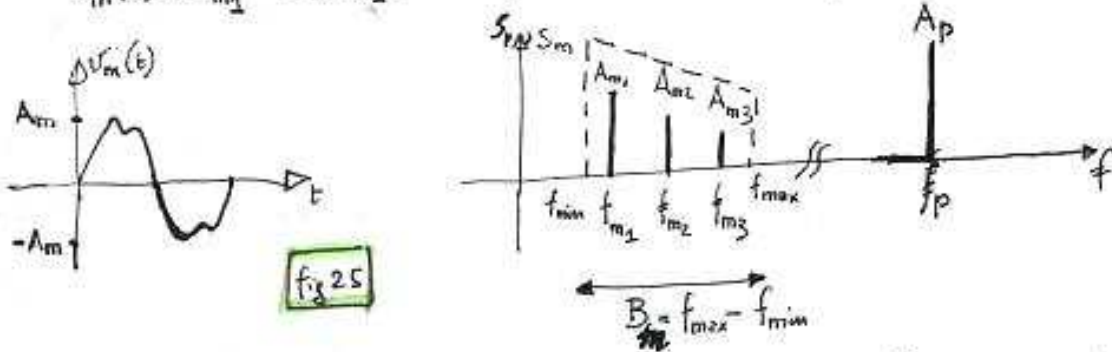
Riassumendo, la maggior parte della potenza serve per trasmettere la portante; le righe laterali, che portano l'informazione, assorbono al max il 50% della potenza della portante (molto meno con indici di modulazione bassi)

DSB - TC CON MODULANTE NON SINUSOIDALE

Il segnale analogico informativo è audio o video, perciò molto complesso. È costituito da diverse componenti armoniche. Se la modulante può essere considerata periodica, avremo uno spettro a righe (serie di Fourier), se invece è aperiodica, avremo uno spettro continuo (trasformata di Fourier).

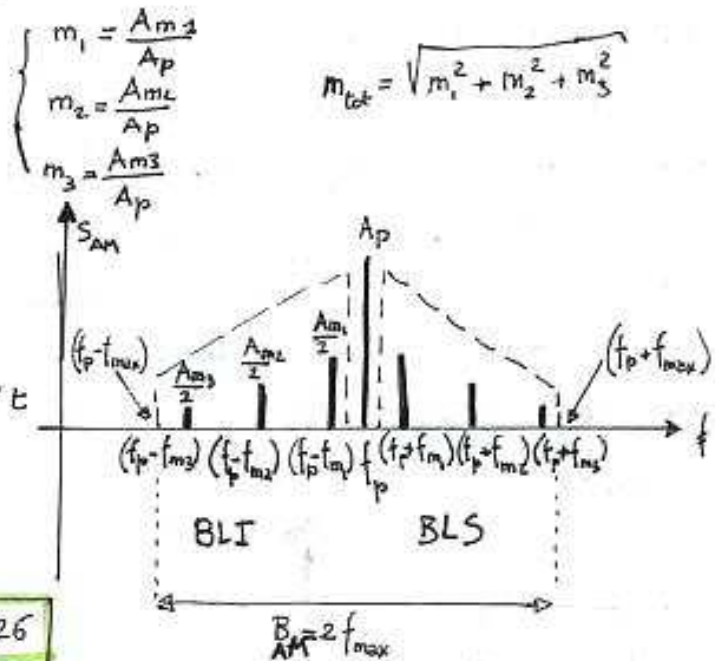
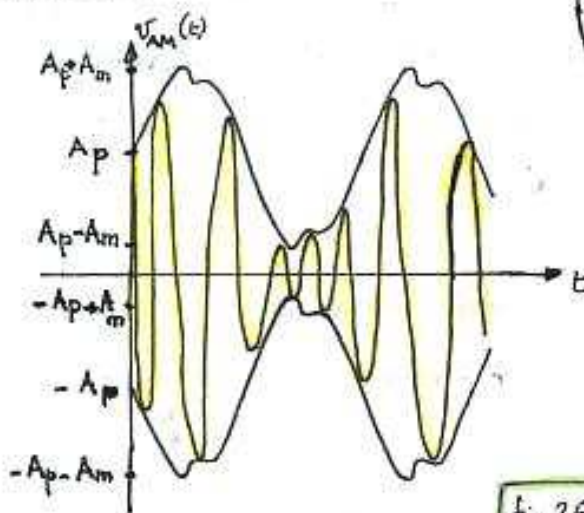
Consideriamo, per semplicità, un segnale costituito da 3 componenti:

$$v_m(t) = A_{m1} \cos(2\pi f_{m1} t) + A_{m2} \cos(2\pi f_{m2} t) + A_{m3} \cos(2\pi f_{m3} t)$$



$$v_{am}(t) = [A_p + A_{m1} \cos(2\pi f_{m1} t) + A_{m2} \cos(2\pi f_{m2} t) + A_{m3} \cos(2\pi f_{m3} t)] \cos(2\pi f_p t)$$

avrà tre indici di modulazione



Con le solite formule di Werner ottengo infatti:

$$v_{am}(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) + m_1 \frac{A_p}{2} [\cos(2\pi(f_p + f_{m1})t) + \cos(2\pi(f_p - f_{m1})t)] + m_2 \frac{A_p}{2} [\dots] + m_3 \frac{A_p}{2} [\dots]$$

Lo spettro risulta perciò composto, considerando solo le prime tre armoniche componenti il segnale modulante, da 6 righe disposte simmetricamente rispetto alla riga relativa alla portante (che rimane inalterata, mentre le altre 6 righe risultano modificate in ampiezza, precisamente dimezzate, oltre che traslate in frequenza): in totale perciò 7 righe.

L'insieme delle righe disposte a sx della portante, costituisce la Banda laterale inferiore (BLI), quello a dx la banda laterale superiore (BLS).

Ovviamente, se lo spettro della modulante è più ampio, cioè composto da più righe, anche la banda passante del segnale AM sarà più larga.

Considerando ad esempio un'onda quadra, sviluppata in serie di Fourier fino alla 7^a armonica, e considerando solo le armoniche dispari, avremo 4 componenti in banda base (1^a, 3^a, 5^a, 7^a armonica) e 8 componenti in banda traslata (4+4+portante).

L'ultimo caso da considerare, che è quello più realistico, prevede una modulante analogica non periodica, avente perciò spettro continuo, di forma qualunque. Per effetto della modulazione ogni componente verrà dimezzata in ampiezza e traslata in alta frequenza, nelle 2 posizioni a cavallo della portante.

Si ottengono perciò dei grafici di questo tipo:

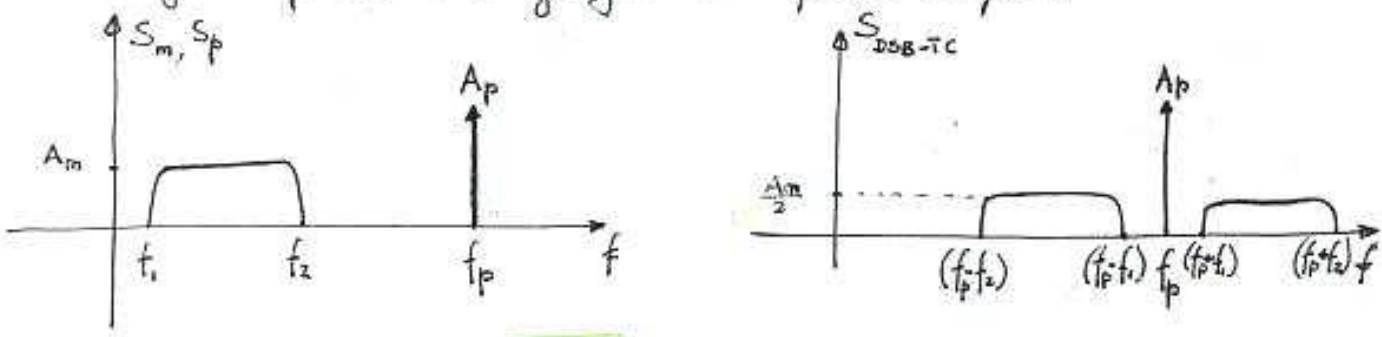


fig. 27

MODULAZIONE D'AMPIEZZA DSB - SC

L'operazione di modulazione consiste semplicemente nel prodotto della modulante e della portante.

$$v_{DSB-SC}(t) = v_m(t) \cdot v_p(t) = v_m(t) \cdot \cos(\omega_p t) \quad \text{con} \quad v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t) = \cos(\omega_p t)$$

con $A_p = 1$

Consideriamo una modulante analogica particolare, che ben conosciamo: un'onda quadra bipolare dispari,

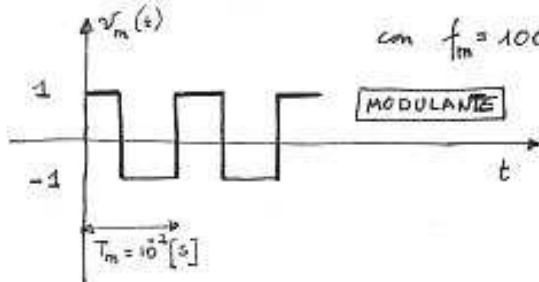
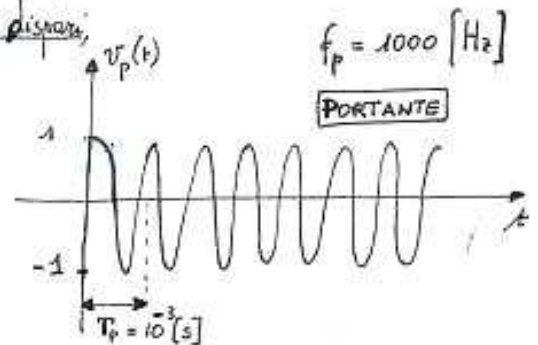


fig. 28



- $C_0 = \phi$ (v. medio nullo)
- $B_k = \phi$ (no coseni)
- $A_k = \frac{4}{k\pi}$ (solo seni con k dispari)

$$v_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_m t)$$

Il segnale modulato avrà un andamento temporale di questo tipo: cioè per mezzo periodo dell'onda quadra (T_m) la portante rimane inalterata, per l'altro mezzo periodo (T_i), viene ribaltata.

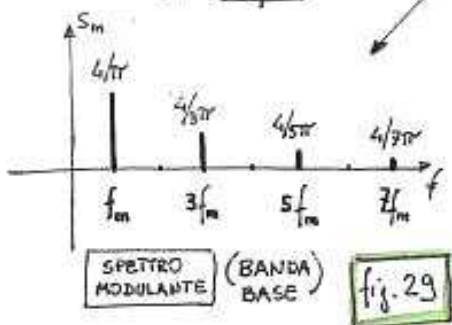
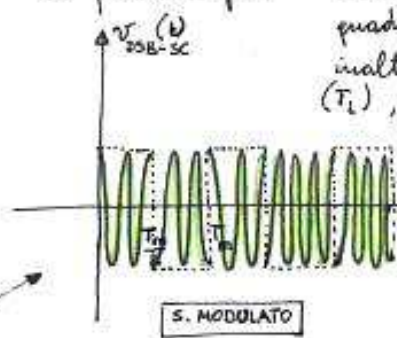


fig. 29



S. MODULATO

grafico solo indicativo in realtà in un periodo della modulante dovrebbero "stare" 10 periodi della portante

Che spettro ha questo segnale?

Per ricavarlo esprimiamo, per comodità di formule, il modulante come somma di coseni (operazione anzitutto lecita)

$$v_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_m t + \phi_k) \quad \begin{cases} \phi_k = 90^\circ \\ C_k = A_k \end{cases}$$

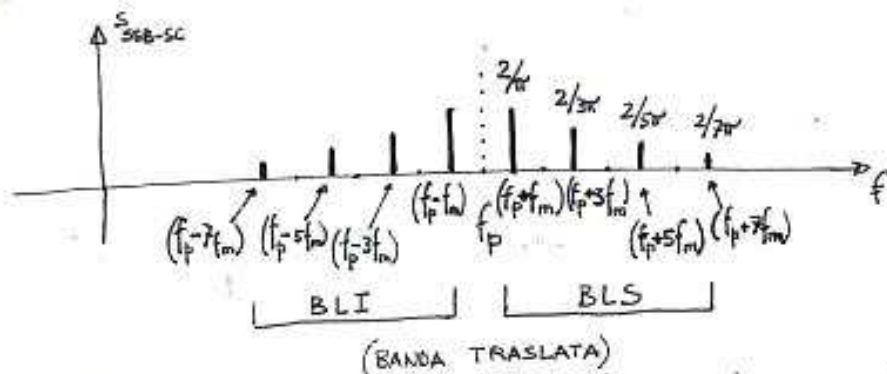
Allora $v_{DSB-SC}(t) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_m t + \phi_k) \right] \cdot \cos(\omega_p t)$

la portante agisce su ogni componente della modulante (o viceversa...)

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{2} \cos[(\omega_p + k\omega_m)t + \phi_k] + \frac{C_k}{2} \cos[(\omega_p - k\omega_m)t + \phi_k]$$

per le formule di WEINER.

Quindi ogni riga della modulante dà origine a due righe, di ampiezza dimezzata, a cavallo della portante. Non è presente la portante!



SPECTRO S.MODULATO

fig. 30

Rispetto alla DSB-TC c'è il vantaggio di aver eliminato la portante, dallo spettro del s. modulato, ma c'è ancora il difetto di avere un raddoppio della banda base.

L'aver traslato la banda base a cavallo della f_p ci permette, come già detto, di poter moltiplicare le comunicazioni su una sola linea di TX: ogni comunicazione verrà moltiplicata per una diversa f_p . Ovviamente la distanza tra due portanti dovrà essere leggermente superiore a 2 volte la Banda Base per evitare sovrapposizioni tra la BLS_1 e la BLI_2 .

(N.B. In telefonia la Banda Base viene limitata a 4 KHz da appositi filtri P. BASSO del VI° ordine, con pendenza 120 dB/decade)

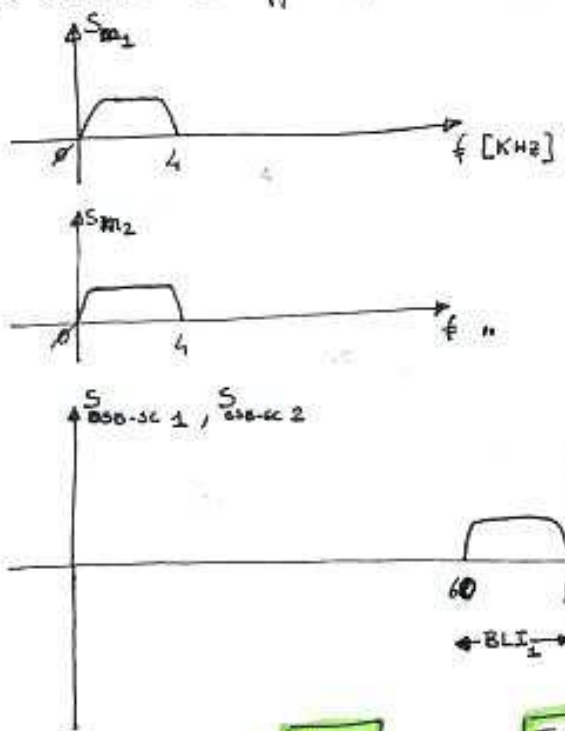


fig. 31

Esempio di FDM con MODULAZIONE DSB-SC

In realtà per la tecnica FDM non si usa questa modulazione, ma la SSB (Single Side Band): dopo il modulatore si inserisce un filtro P. BANDA ad elevata pendenza per far passare solo una delle due bande laterali (o la inferiore o la superiore).

LA DEMODULAZIONE

Per riottenere il segnale originario, in banda base, a partire dal segnale modulato, in banda traslata, in ricezione bisognerà nuovamente moltiplicare per la portante:

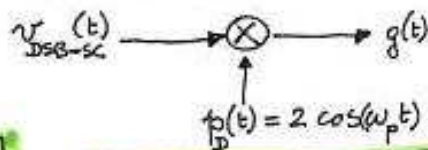


fig 32

DEMODULATORE COERENTE

Il coeff. 2 (ampiezza della portante p_d) è introdotto per comodità di calcolo $p_d(t)$ è generata da un oscillatore loc

$$g(t) = v_{DSB-SC}(t) \cdot 2 \cos(\omega_p t) = v_m(t) \cdot \cos(\omega_p t) \cdot 2 \cos(\omega_p t) = v_m(t) \cdot 2 \cos^2(\omega_p t)$$

Ricordando che $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$

$$g(t) = v_m(t) \cdot [1 + \cos(2\omega_p t)] = v_m(t) + v_m(t) \cos(2\omega_p t)$$

perciò $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$

s. modulante s. modulato a freq. doppia rispetto al s. d'ingresso

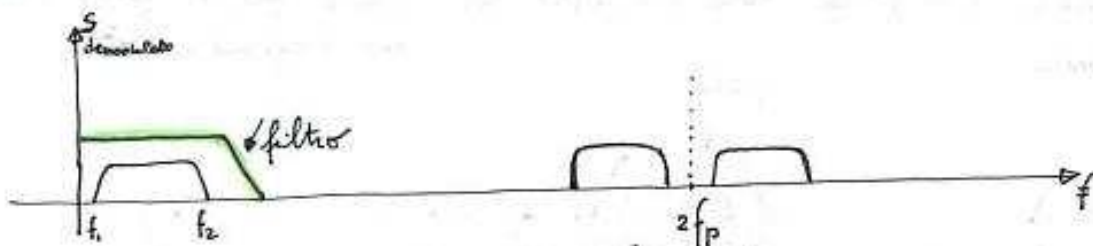


fig 33

Con un filtro passa-basso si elimina facilmente il segnale in alta frequenza, e non è necessaria un'elevata pendenza.

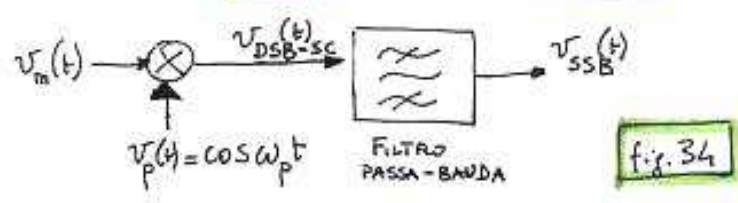
Svantaggio di questo metodo: la portante locale deve avere frequenza e fase identiche a quelle della portante usata in modulazione (coerenza). Dato che Tx e Rx sono lontani e non si scambiano informazioni circa la portante, spesso ci reinserisce, dopo la modulazione, una piccola porzione di portante (burst: pochi periodi in un tempo limitato) che serva da riferimento per il demodulatore.

Se esiste una differenza di fase θ tra la portante locale e quella usata in modulazione, si vede che ogni armonica viene moltiplicata per $\cos \theta$; perciò se $\theta = 90^\circ$, le armoniche vengono eliminate e non si ottiene alcuna uscita dal demodulatore (caso limite).

Questo aspetto può però essere sfruttato in modo positivo: se nel Tx si utilizzano due portanti sfasate di 90° ($\cos(\omega_p t)$ e $\sin(\omega_p t)$) per modulare due segnali.

diversi, in ricezione si potrà attuare una demodulazione coerente mediante due portanti locali in quadratura e ritogliere i segnali modulati. Infatti il segnale modulato da $\cos \omega_p t$ non dà alcuna uscita al demodulatore che usa $\sin \omega_p t$ e viceversa - Si possono così trasmettere due segnali contemporaneamente!

MODULAZIONE SSB



il filtro può essere accordato sulla BLI o sulla BLS.

fig. 34

Bisogna però che la modulante non abbia componenti in bassa frequenza (cioè ci sia un intervallo vuoto di frequenze tra f_1 e f_2) in modo che lo spettro del s. modulato DSB-SC abbia una separazione di banda tra la BLI e la BLS, e si possa usare un filtro passa-banda reale con pendii non esagerati!

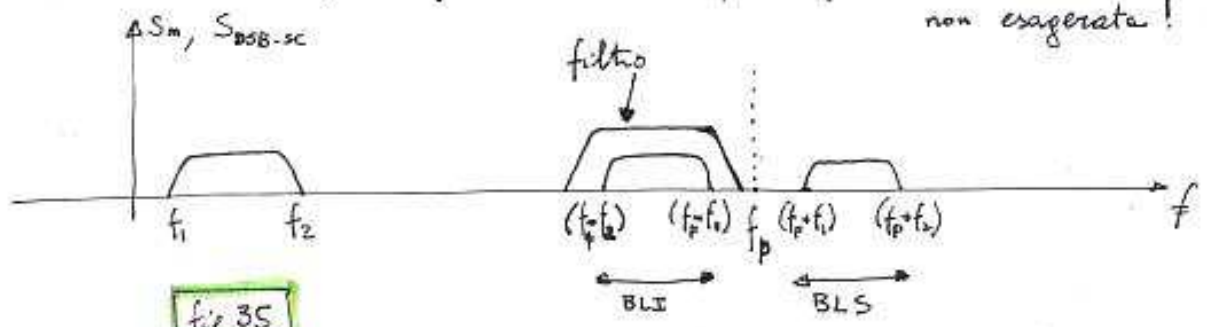


fig. 35

MODULAZIONI D' ANGOLO

La modulante $v_m(t)$ modifica la frequenza o la fase della portante $v_p(t)$

$$v_p(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

(per comodità analitica)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \text{pulsazione portante in assenza di modulazione} \\ \varphi_0 = \text{fase iniziale.} \end{array} \right.$$

Nel piano di Gauss la portante è un vettore di ampiezza 2, fase iniziale φ_0 rotante con velocità angolare ω_0

Argomento totale dei singoli vettori rotanti: $X_0(t) = \omega_0 t + \varphi_0 = 2\pi f_0 t + \varphi_0$

f_0 produce, al variare di t , una variazione dell'argomento (angolo), a partire da φ_0 .

La FM varia direttamente f_0 , la PM varia direttamente φ_0 , ma entrambe producono comunque una variazione dell'argomento totale X_0 rispetto al valore in assenza di modulazione

FM \Rightarrow

$$\omega_i(t) = \omega_0 + K_f m_f(t)$$

pulsazione istantanea coeff. con dimensioni di pulsaz. segnale modulante

← I due vettori ruotano a velocità in accordo con $m_f(t)$

PM \Rightarrow

$$\varphi_i(t) = \varphi_0 + K_\varphi m_\varphi(t)$$

fase istant. coeff. con dimensioni di fase modulante

→ I vettori incrementano la loro fase, proporzionalmente a $m_\varphi(t)$.

Entrambe le modulazioni modificano l'argomento $X(t)$ della portante! - 13 -

Infatti: $X_i(t) \equiv X_{PM}(t) = \omega_0 t + \varphi_i(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + K_{\varphi} m_{\varphi}(t)$

PM

L'argomento varia perché varia φ_i ; se eseguo la derivata rispetto al tempo dell'argomento (\equiv spazio angolare), ottengo la velocità istantanea di rotazione (dei vettori) (\equiv pulsazione istantanea)

$$\omega_{PM} \equiv \dot{X}_i(t) = \frac{d}{dt} [X_{PM}(t)] = \frac{d}{dt} [\omega_0 t + \varphi_0 + K_{\varphi} m_{\varphi}(t)] = \boxed{\omega_0 + K_{\varphi} \frac{d}{dt} [m_{\varphi}(t)]}$$

La PM produce direttamente una variazione della fase iniziale φ_0 , ma produce anche una modulazione di frequenza (variazione di ω_0 cioè f_0) tramite un segnale proporzionale alla derivata della modulante $m_{\varphi}(t)$.

Viceversa,

FM

$$\omega_{FM}(t) \equiv \omega_i(t) = \omega_0 + K_f m_f(t)$$

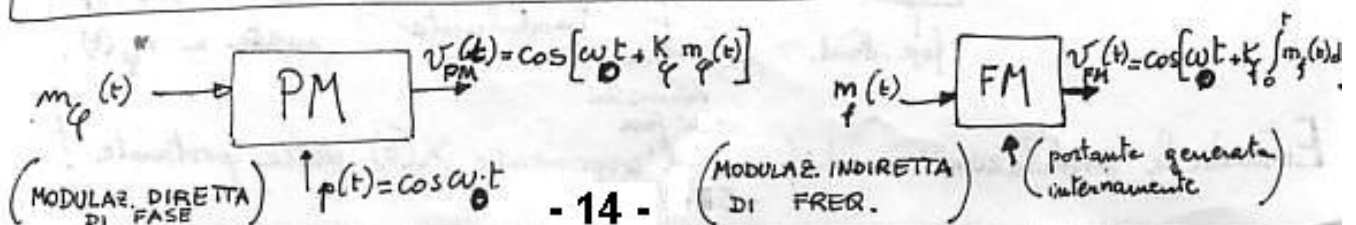
nota la pulsazione istantanea (\equiv veloc. istantanea di rotaz.), risalgo all'argomento $X_i(t)$ effettuando l'operazione di integrazione nel tempo.

$$X_i(t) \equiv X_{FM}(t) = \int_0^t \omega_i(t) dt = \int_0^t [\omega_0 + K_f m_f(t)] dt = \omega_0 t + K_f \int_0^t m_f(t) dt + \varphi_0$$

cost. di integrazione

La FM produce direttamente una variazione della pulsazione ω_0 (f_0), ma produce anche una modulazione di fase (variazione della fase φ_0) tramite un segnale proporzionale all'integrale della modulante $m_f(t)$.

Simmetria tra le due modulazioni



Le modulazioni d'angolo sono **NON LINEARI**, perché la modulante agisce sul segnale modulato tramite la funzione coseno:

FM:

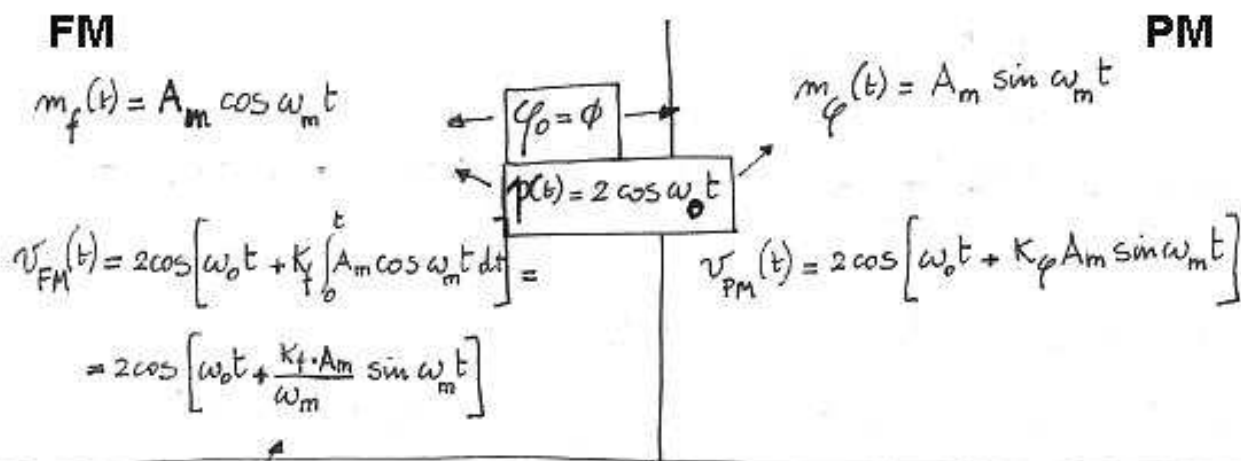
$$\begin{cases} p(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \omega_{FM}(\omega) = \omega_0 + K_f m_f(t) \\ X_{FM}(t) = \int_0^t \omega_{FM} dt = \omega_0 t + K_f \int_0^t m_f(t) dt + \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow v_{FM}(t) = 2 \cos[X_{FM}(t)] = 2 \cos\left[\omega_0 t + \varphi_0 + K_f \int_0^t m_f(t) dt\right]$$

Quindi, non si può applicare il **PRINCIPIO DI SOVRAPPONGI EFFETTI!**

[Nota il risultato per un segnale trigonometrico di una certa ampiezza, la variazione dell'ampiezza sposta radicalmente il problema, fornendo risultati completamente diversi.]

Lo studio delle modulazioni d'angolo può essere affrontato solo per una certa classe di s. modulanti.

MODULANTE TRIGONOMETRICA

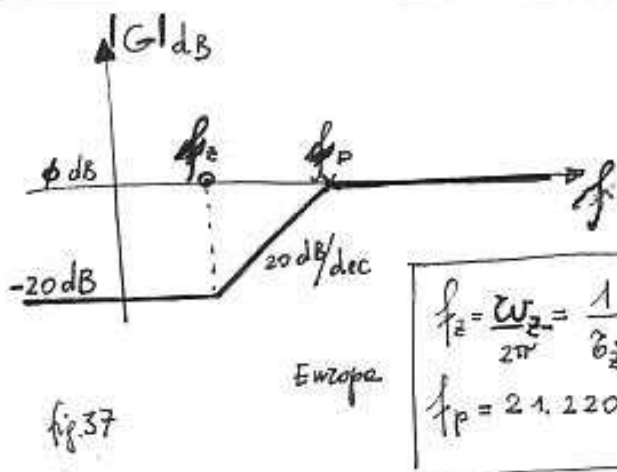


Si vede che l'incidenza sulla fase della modulazione è inversamente proporzionale alla pulsazione della modulante: al crescere della frequenza, il contenuto informativo viene trasferito sempre meno sulla portante modulata

Perciò, se la modulante ha uno spettro esteso (es $20 \div 20.000 [Hz]$), dato che le armoniche di ordine più alto hanno ampiezze decrescenti, risulta che l'effetto di tali componenti sulla portante è veramente modesto.

Se poi il canale di comunicazione è rumoroso, si rischia di perdere il contenuto informativo delle armoniche a deviate in frequenza.

Si opera perciò un'amplificazione con filtro attivo (preenfasi).



Filtro di preenfasi:

E. Standard : $\tau_z = 75 [\mu s]$

A. Standard : $\tau_z = 50 [\mu s]$

$$\tau_p = 10 \tau_z$$

$$f_z = \frac{\omega_z}{2\pi} = \frac{1}{\tau_z \cdot 2\pi} = 2122 \text{ [Hz]}$$

$$f_p = 21.220 \text{ [Hz]}$$

America

$$f_z = 3183 \text{ [Hz]}$$

$$f_p = 31.830 \text{ [Hz]}$$

SPETTRO DELLA MODULAZIONE FM

$$\frac{K_f A_m}{\omega_m} \triangleq \beta$$

indice di modulazione

$$\beta = \frac{\Delta \omega_{op}}{\omega_m} = \frac{\Delta f_{op}}{f_m} \left(\begin{array}{l} \text{MAX SCOSTAMENTO DI } f \\ \text{riferito a } f \text{ modulante} \end{array} \right)$$

$K_f \cdot A_m = \Delta \omega_{op} \triangleq$ max deviazione di pulsazione (si ottiene con il valore max dell'ampiezza della modulante)

$$v_{FM}(t) = 2 \cos \left[\underbrace{\omega_0 t}_X + \underbrace{\beta \sin \omega_m t}_Y \right]$$

[1] ricordando che $2 \cos(x+y) = 2[\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y] = 2[\cos(\omega_0 t) \cdot \cos(\beta \sin \omega_m t) - \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(\beta \sin \omega_m t)]$

i termini $\cos[\beta \sin \omega_m t]$ e $\sin[\beta \sin \omega_m t]$ sono

funzioni trig. di funz. trigon. e si possono sviluppare in serie di funzioni di Bessel di prima specie; il prodotto $\cos x \cdot \cos y$ e $\sin x \cdot \sin y$ viene invece sviluppato con le formule di WERNER.

$$\cos y = \cos(\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\omega_m t + 2J_4(\beta) \cos 4\omega_m t + 2J_6(\beta) \cos 6\omega_m t + \dots$$

$$\sin y = \sin(\beta \sin \omega_m t) = 2J_1(\beta) \sin \omega_m t + 2J_3(\beta) \sin 3\omega_m t + 2J_5(\beta) \sin 5\omega_m t + \dots$$

i termini $J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$ etc sono le funzioni di Bessel, che danno però l'ampiezza max delle componenti armoniche del segnale FM, e dipendono dall'indice di modulazione β (il quale non è limitato tra 0 e 1!)

A questo punto bisogna sostituire questi sviluppi nelle [4]

e applicare le f. di WERNER (su ogni componente di asse) $\cos x \cdot \cos y$

$$\begin{aligned} \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{FM}(t) &= 2 \left[\cos x \cos y - \sin x \sin y \right] = 2 \left[J_0 \cos \omega_c t + 2 J_2 \cos \omega_c t \cdot \cos 2\omega_m t + 2 J_4 \cos \omega_c t \cdot \cos 4\omega_m t + \dots - 2 J_1 \sin \omega_c t \cdot \sin \omega_m t - \dots \right] \\ &= 2 \left[J_0 \cos \omega_c t + 2 \cdot \frac{1}{2} J_2 \cos(\omega_c + 2\omega_m)t + 2 \cdot \frac{1}{2} J_2 \cos(\omega_c - 2\omega_m)t + \dots - 2 \cdot \frac{1}{2} J_1 \cos(\omega_c - \omega_m)t + 2 \cdot \frac{1}{2} J_1 \cos(\omega_c + \omega_m)t + \dots \right] \end{aligned}$$

cioè:

$$v_{FM}(t) = 2 \left[\begin{array}{l} \text{portante} \\ \uparrow \\ J_0 \cos \omega_c t \end{array} + 2 \text{ righe distanziate di } \omega_m \text{ dalla portante} + 2 \text{ righe distanziate di } 2\omega_m \text{ dalla portante} + \dots \right]$$

$$- J_1 \cos(\omega_c - \omega_m)t + J_1 \cos(\omega_c + \omega_m)t + J_2 \cos(\omega_c - 2\omega_m)t + J_2 \cos(\omega_c + 2\omega_m)t$$

ogni multiplo dispari di ω_m produce 2 righe (negativa quella a sx di ω_c , positiva " " dx di ω_c)

ogni multiplo pari di ω_m " 2 righe, entrambe positive.

L'ampiezza di ogni riga è proporzionale alle funzioni di Bessel, che dipendono dall'indice di modulazione $\beta = \frac{K_f A_m}{\omega_m}$, che a sua volta dipende dalla modulante e dalla sensibilità del modulatore.

Le f. di Bessel sono tabulate, perciò si svolge un lavoro essenzialmente grafico e approssimato. Per bassi indici di modulazione, si ottengono poche componenti significative (J_0, J_1, J_2, J_3) e cioè poche componenti armoniche; Ma già con $\beta=5$ si ottengono valori apprezzabili fino a J_8 e conseguentemente 16 righe a cavallo della portante, più la portante stessa. Lo spettro del segnale modulato FM è perciò estremamente largo (con $\beta=5$, $B_{FM} = 2.8 f_m = 16 f_m$).

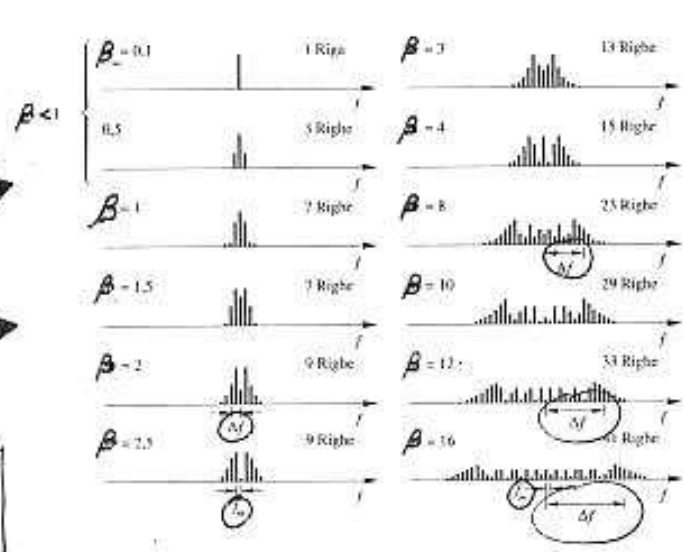
Tutto dipende perciò dall'indice di modulazione; per una certa frequenza della modulante, se si aumenta l'ampiezza max A_m , β aumenta, per cui

aumenta il n° delle righe spettrali, tutte equispaziate (distanza tra le righe = f_m) e aumenta anche il max spostamento di frequenza.
 Al contrario se si riduce A_m .

Poco, a parità di ampiezza A_m , se si aumenta f_m l'indice β diminuisce e diminuiscono le righe spettrali, che si allontanano anche le une dalle altre.

Se invece f_m diminuisce, aumenta β , aumentano le righe, diminuisce la distanza reciproca (lo spettro tende a diventare continuo).

Variatione dello spettro del segnale modulato per una variazione di β (provocata da una variazione di A_m) (con $f_m = \text{cost.}$)

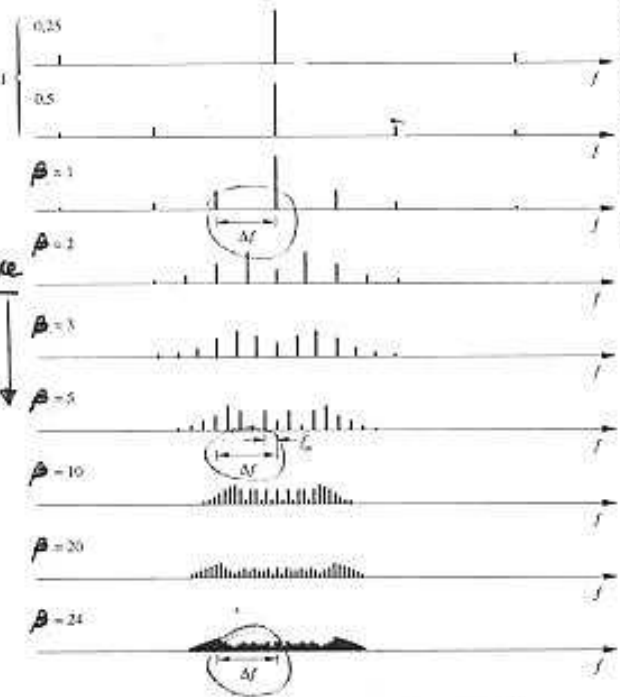


$f_m = \text{cost}$
 (stessa distanza tra le righe)

$$\Delta f = K_f \cdot A_m$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

se f_m diminuisce
 β aumenta
 perciò aumentano le righe,
 (e diminuisce la
 distanza tra esse)



Variatione dello spettro del segnale modulato per una variazione di f_m e quindi di β con $A_m = \text{cost.}$

$A_m = \text{cost.}$

fig 38

MODULAZIONE PAM - esempio

(Calcolo altezza righe spetto di un segnale modulato PAM)

1) segnale campionario (portante) : $A_p r(t)$ (segnale impulsivo)

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \phi & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \text{ , } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{altezza impulso} : A_p = 10 \\ \text{duty-cycle } \frac{\tau}{T} = 0,2 \\ \text{f campionamento} = f_c = 1 \text{ [KHz]} \end{array} \right.$

$$\alpha = \frac{A_m}{A_p} = 0,5$$

2) segnale modulante (analogico sinusoidale) $m(t) = A_m \cos(2\pi f_s t)$
 $= 5 \cos(2\pi f_s t)$ con $\left\{ \begin{array}{l} A_m = 5 \\ f_s = 100 \text{ Hz} \end{array} \right.$

3) segnale campionato (modulato PAM)
 (DSB-TC su portante impulsiva)

$$v_{\text{PAM}}(t) = A_p r(t) + m(t)r(t)$$

4) Sviluppo in serie di Fourier del segn. campionario (alto A_p)

$$A_p r(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k \frac{2\pi}{T_c} t)$$

funzione pari \Rightarrow solo coseni \Rightarrow solo B_k

$$C_0 = A_p \frac{\tau}{T_c} = 10 \cdot 0,2 = 2$$

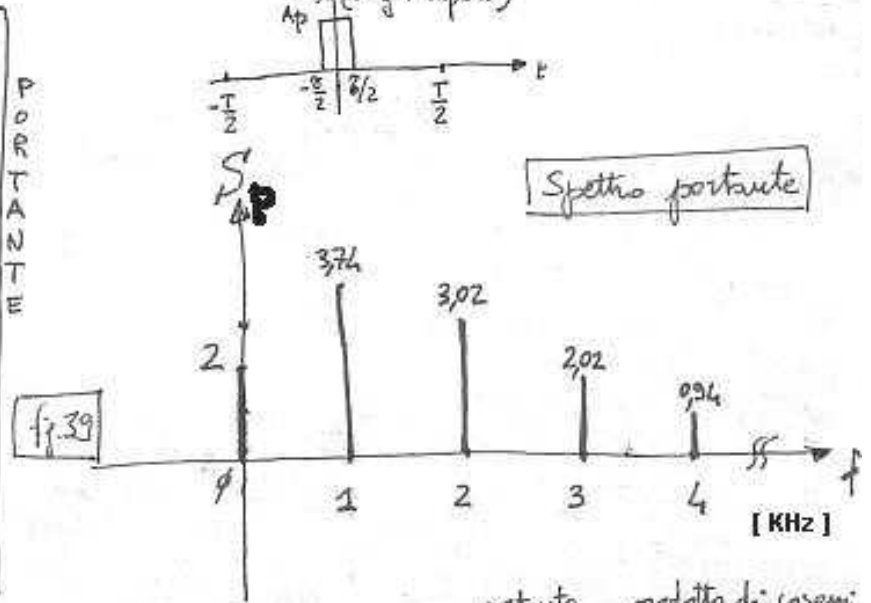
$$B_k = 2 A_p \frac{\tau}{T_c} \frac{\sin(k\pi \frac{\tau}{T_c})}{k\pi \frac{\tau}{T_c}}$$

$$B_1 = 2 \cdot 10 \cdot 0,2 \frac{\sin(\pi \cdot 0,2)}{\pi \cdot 0,2} = 3,74$$

$$B_2 = 4 \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 0,2 \cdot 2)}{\pi \cdot 2 \cdot 0,2} = 3,02$$

$$B_3 = 4 \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 0,2 \cdot 3)}{\pi \cdot 3 \cdot 0,2} = 2,02$$

$$B_4 = 4 \cdot \frac{\sin(\pi \cdot 0,2 \cdot 4)}{\pi \cdot 4 \cdot 0,2} = 0,98$$



5) segnale campionato

$$v_{\text{PAM}}(t) = \underbrace{A_p r(t)}_{\text{portante}} + \underbrace{m(t)r(t)}_{\text{prodotto di coseni}}$$

Sviluppo segnale campionario con altezza unitaria $\rightarrow r(t) = 0,2 + 0,374 \cos(2\pi f_c t) + 0,302 \cos(2\pi \cdot 2 f_c t) + 0,202 \cos(2\pi \cdot 3 f_c t) + 0,098 \cos(2\pi \cdot 4 f_c t) + \dots$

modulante + portante \equiv DSB-SC (su portante impulsiva)

6) $m(t)r(t)$

\rightarrow WERNER \rightarrow

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$5 \cos 2\pi f_s t \cdot \left[0,2 + 0,374 \cos(2\pi f_c t) + 0,302 \cos(2\pi \cdot 2f_c t) + 0,202 \cos(2\pi \cdot 3f_c t) + \dots \right] =$$

$$= 1 \cdot \cos 2\pi f_s t + \underbrace{1,87 \cos(2\pi f_s t) \cdot \cos(2\pi f_c t)}_{\text{WERNER}} + \underbrace{1,01 \cos(2\pi f_s t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_c t)}_{\text{WERNER}}$$

$$= 1 \cdot \cos 2\pi f_s t + 1,87 \cdot \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_c - f_s)t] + 1,87 \cdot \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_c + f_s)t] + 1,51 \cdot \frac{1}{2} \cos[2\pi(2f_c - f_s)t] +$$

$$+ 1,51 \cdot \frac{1}{2} \cos[2\pi(2f_c + f_s)t] + \dots$$

7) In definitiva (!)

Sviluppo Fourier portante impulsiva

$$V_{\text{PAM}}(t) = 2 + 3,74 \cos(2\pi f_c t) + 3,02 \cos(2\pi \cdot 2f_c t) + 2,02 \cos(2\pi \cdot 3f_c t) + \dots +$$

MODULANTE ATTENUATA

$$+ 1 \cdot \cos 2\pi f_s t + 0,935 \cos[2\pi(f_c - f_s)t] + 0,935 \cos[2\pi(f_c + f_s)t] +$$

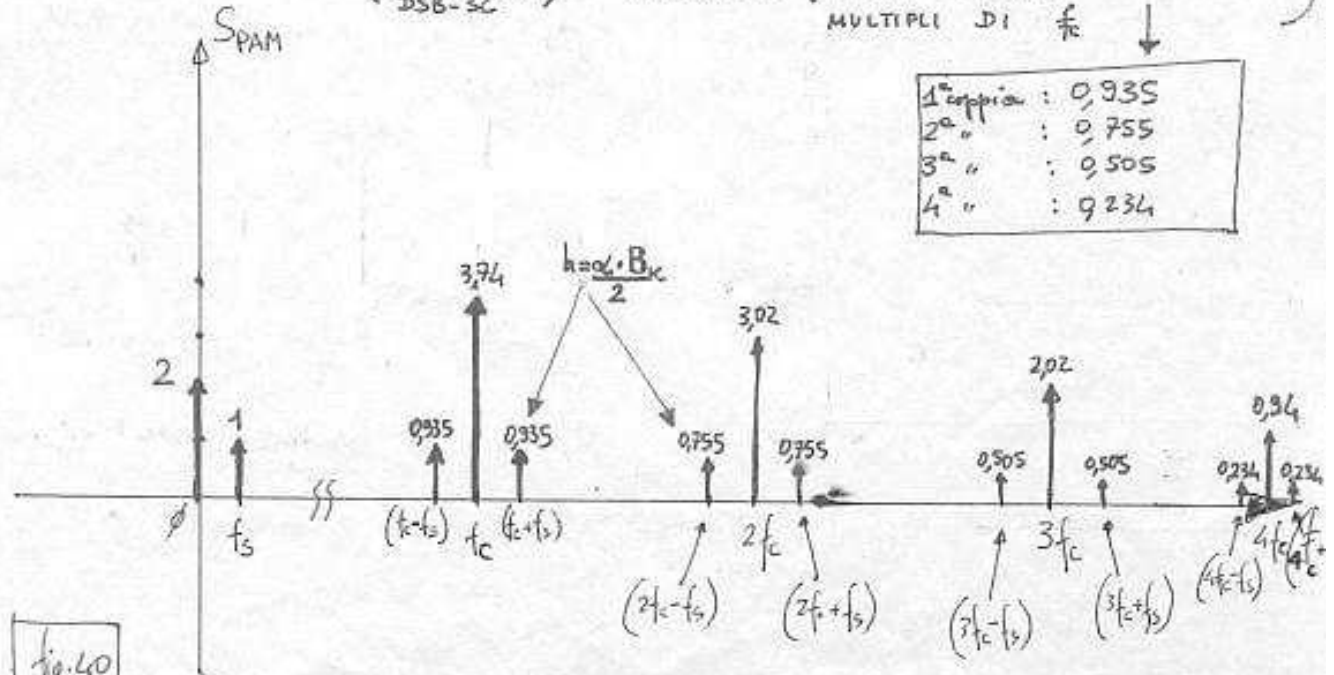
$$+ 0,755 \cos[2\pi(2f_c - f_s)t] + 0,755 \cos[2\pi(2f_c + f_s)t] + \dots$$

(MODULANTE CAMPIONATA DSB-SC)

WERNER

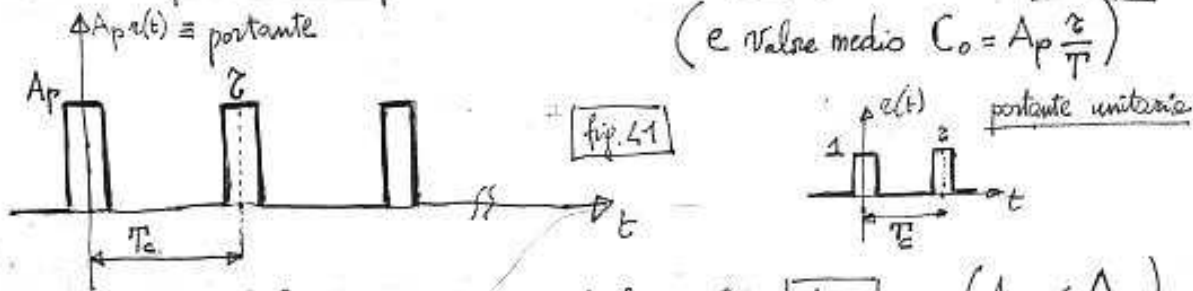
(COPIE DI RIGHE LATERALI A CAVALLO DEI MULTIPLI DI f_c)

1 ^a coppia	: 0,935
2 ^a "	: 0,755
3 ^a "	: 0,505
4 ^a "	: 0,234



CONSIDERAZIONI SULLA MODULAZIONE PAM (DSB - TC)

- 1) Ho una portante impulsiva con altezza A_p e un certo $\delta = \frac{\tau}{T_c}$ (e valore medio $C_0 = A_p \frac{\tau}{T_c}$)



- 2) Ho una modulante sinusoidale alta A_m ($A_m < A_p$)
 $m(t) = A_m \cos \omega_s t$

- 3) L'espress. analitica $v_{PAM}(t)$ consiste nel prodotto della modulante, trascorata di A_p , per un treno di impulsi di altezza unitaria.

$$v_{PAM}(t) = [A_p + A_m \cos \omega_s t] z(t)$$

introducendo l'indice di modulazione $m \equiv \alpha = \frac{A_m}{A_p}$ ottengo

$$v_{PAM}(t) = A_p [1 + \alpha \cos \omega_s t] z(t) = A_p z(t) + \alpha A_p \cos \omega_s t \cdot z(t)$$

Per ottenere lo spettro di v_{PAM} dovrò quindi sviluppare in serie di Fourier la portante e sfruttare poi WERNER per i vari prodotti [cos $\omega_s t$ armonica della portante].

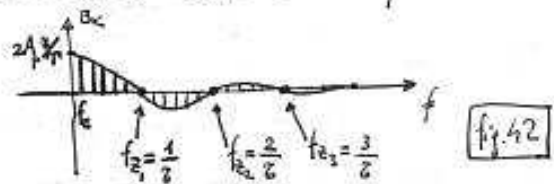
Determinante sono perciò il $\delta = \frac{\tau}{T_c}$ della portante e l'indice di modulazione α .

Per impulsi sempre più stretti ($\tau \rightarrow 0$), con T_c costante [il valore di T_c è fissato dal teorema del campionamento: $f_c = \frac{1}{T_c}$ deve essere $\geq 2 f_s$], avrò $\delta \rightarrow 0$,

ottenendo così un valor medio $C_0 = A_p \frac{\tau}{T_c}$ sempre più piccolo e righe sempre più piccole

(ricorda che la portante del disegno ha simmetria pari, perciò è composta da $C_0 +$ coseni di frequenza multipla di f_c , con ampiezza max data dalla formula

$$B_k = 2 A_p \frac{\tau}{T_c} \frac{\sin(k\omega_s \tau/2)}{k\omega_s \tau/2} = \frac{2 A_p \tau}{T_c} \frac{\sin(k\pi \delta / T_c)}{k\pi \delta / T_c}$$



Il 1° lobo dell'involucro diventa sempre più largo.

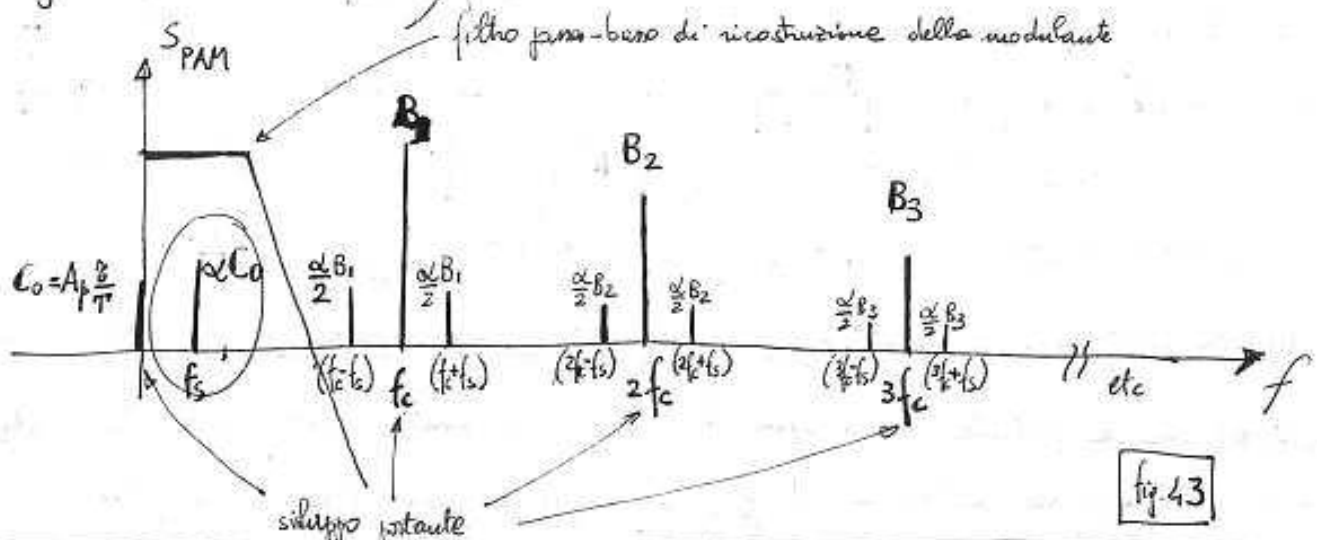
A questo punto, tutte le righe della portante, ridotte del fattore α (indice di modulazione), devono essere moltiplicate per $\cos(\omega_s t)$. Perciò avrò tanti

fattori $\cos(\omega_s t) \propto B_k \cos(k\omega_s t)$ cioè $\cos(\omega_s t) \propto B_1 \cos(\omega_s t) + \cos(2\omega_s t) + \dots$
 (dove al fattore $C_0 \cdot \cos \omega_s t$)

Ogni fattore dà origine a 2 righe di altezza $\frac{\alpha B_k}{2}$, centrate sulle frequenze $(f_c - f_s)$ e $(f_c + f_s)$, poi $(2f_c \pm f_s)$ etc...

Il segnale campionato v_{PAM} ha perciò uno spettro molto esteso composto dallo spettro della portante + la riga della modulante moltiplicata per α + tutte le coppie di righe alle frequenze $(k f_c \pm f_s)$, alte $\frac{\alpha B_k}{2}$.

Questo significa che per ricostruire la modulante a partire dai suoi campioni basterà usare un filtro passa-basso di pendenza adeguata, a patto che f_s e $(f_c - f_s)$ (la 1^a riga in "bassa" frequenza) siano sufficientemente distanziate. È perciò evidente che bisogna scegliere una frequenza di campionamento f_c consistentemente maggiore di $2f_s$. (Infatti se $f_c = 2f_s$, $f_c - f_s = 2f_s - f_s = f_s$ cioè la prima "immagine" coincide con la riga della modulante!)



Tutto questo si ottiene se la modulante è un semplice segnale trigonometrico. Se la modulante ha uno spettro composto da più righe, bisogna fare questo lavoro per ogni riga della modulante, per cui cambiare l'indice di modulazione α , di volta in volta.

Se la modulante ha uno spettro continuo e limitato, avremo la ripetizione dello spettro, con attenuazione α e αx di ogni riga della portante.

La f_c dovrà essere $> 2f_{max}$ dello spettro della modulante. - 22 -

MULTIPLO PAM TELEFONICO

1) Abbiamo visto, analiticamente, cosa significa campionare un segnale analogico come si modifica il suo spettro; abbiamo visto che relazione deve sussistere tra la max frequenza del segnale analogico (modulante) e la f_c di campionamento (portante impulsiva).

Se la distanza tra due campioni non è inferiore a $\frac{T_i}{2}$ (periodo della i-esima armonica della modulante) non si riesce a ricostruire correttamente quella data armonica, né tanto meno quelle di ordine superiore. In termini di getto significa che compaiono delle righe troppo vicine a quelle della modulante, e non si riesce a filtrarle. (ALIASING) - Il segnale ricostruito sarà perciò diverso da quello originale (distorsione).

Abbiamo visto che f_c deve essere abbastanza maggiore di $2f_{max}$, se vogliamo usare un filtro P.Basso non esageratamente "pendente".

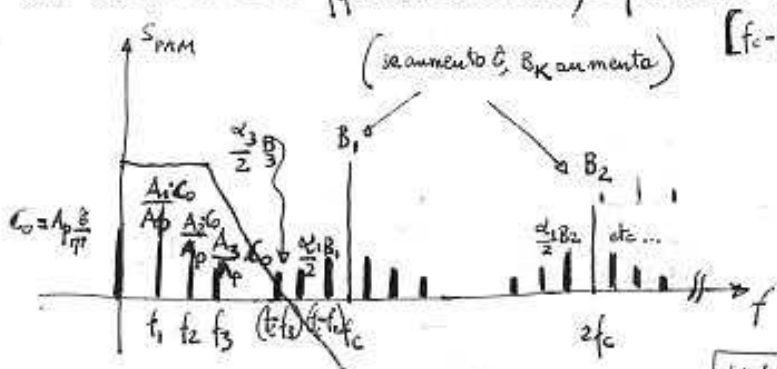
Non conviene però scegliere una $f_c \gg 2f_{max}$, perché questo comporterebbe 2 problemi, in cambio di una ricostruzione più accurata:

a) Rimane poco tempo tra un campione e il successivo, in vista di una moltiplicazione TDM.

b) Se poi si vuole convertire in DIGITALE i vari campioni, non è detto che l'A/D abbia sufficiente tempo a disposizione. ($T_{CONVERS}$ deve essere minore $T_{CAMPIONAGH}$.)

2) Abbiamo visto che il $\delta = \frac{\sigma}{f_c}$ della portante impulsiva è determinante, insieme ad α per quanto riguarda l'altezza delle righe dello spettro.

Infatti se δ è abbastanza grande rispetto a T_c può succedere che le righe laterali a sx di f_c siano troppo alte e il filtro non riesca ad attenuarle sufficientemente, soprattutto se f_c è poco + grande di $2f_{max}$.



$$\begin{cases} d_1 = \frac{A_1}{A_p} \\ d_2 = \frac{A_2}{A_p} \\ d_3 = \frac{A_3}{A_p} \end{cases} \text{indici di modulazione}$$

Il filtro fa passare parte della riga a $(f_c - f_3)$

Vediamo meglio cosa succede :

modulante $m(t) = 1 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 t)$

$$\begin{cases} f_s = 3 \text{ [KHz]} \\ A_m = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{A_m}{A_p} = 1$$

portante impulsiva
mitonia

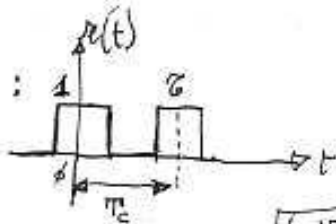


fig 45

$$\begin{cases} f_c = 8 \text{ [KHz]} \\ A_p = 1 \\ \frac{\delta}{T_c} = 50\% \end{cases}$$

(frequenza di campionamento usata in telefonia)

$$v_{PAM} = [1 + m(t)]r(t) =$$

$$v_{PAM}(t) = r(t) + m(t)r(t)$$

sviluppo di $r(t) = C_0 + B_k \cos(k \frac{2\pi}{T_c} t) \Rightarrow$

$$C_0 = 1 \cdot \frac{\delta}{T_c} = 0,5$$

$$B_k = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\delta}{T_c} \frac{\sin(k\pi \frac{\delta}{T_c})}{k\pi \frac{\delta}{T_c}} = 2 \frac{\sin(k\pi 0,5)}{k\pi}$$

$$B_1 = 0,64$$

$$B_2 = \emptyset$$

$$B_3 = -0,21$$

$$B_4 = \emptyset$$

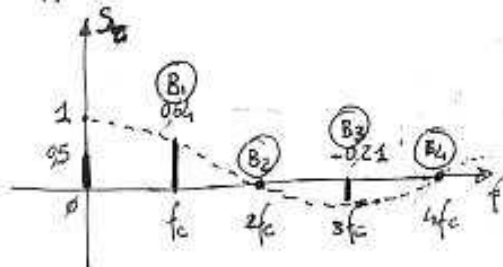


fig 46

$$v_{PAM}(t) = r(t) + \cos(2\pi f_s t) \cdot [r(t)] = 0,5 + 0,64 \cos(2\pi f_c t) - 0,21 \cos(2\pi 3f_c t) + \dots + \cos(2\pi f_s t) [0,5 + 0,64 \cos(2\pi f_c t) - 0,21 \cos(2\pi 3f_c t) + \dots] =$$

$$= r(t) + 0,5 \cos(2\pi f_s t) + 0,64 \cos(2\pi f_s t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - 0,21 \cos(2\pi f_s t) \cdot \cos(2\pi 3f_c t) + \dots =$$

$$= r(t) + \alpha C_0 m(t) + \left(\frac{0,64}{2}\right) \cos[2\pi(f_c \pm f_s)t] - \left(\frac{0,21}{2}\right) \cos[2\pi(3f_c \pm f_s)t] + \dots$$

portante

modulante

$$\frac{\alpha}{2} B_1$$

$$\begin{aligned} f_c - f_s &= 8 - 3 = 5 \text{ [KHz]} \\ f_c + f_s &= 11 \text{ [KHz]} \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{2} B_2$$

$$21 = 27 \text{ [KHz]}$$

coppie di righe intorno a $f_c, 3f_c, 5f_c$ etc...

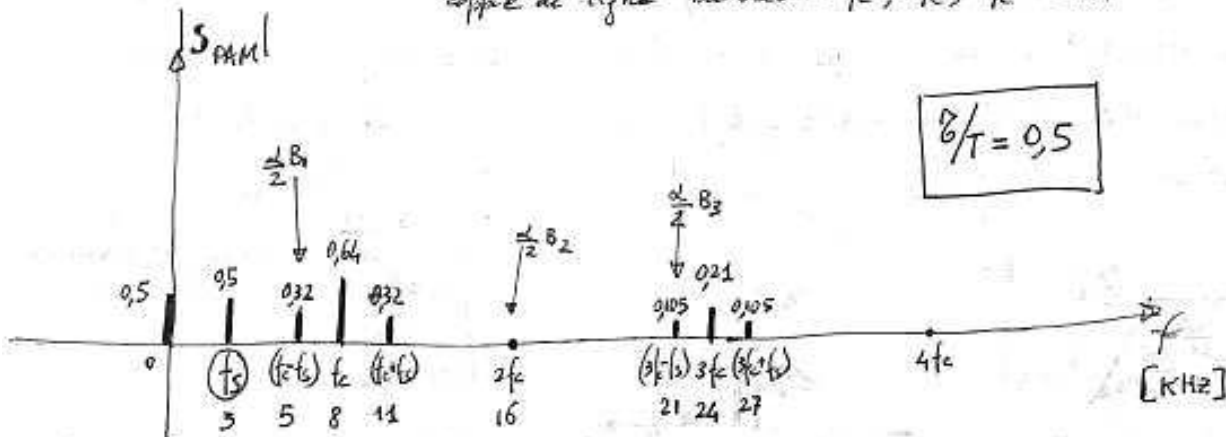


fig 47

Generalmente, filtri P. Basso in ricezione, nei sistemi PAM, attenuano di circa 16 [dB] a 5 [KHz] e 24 [dB] a 7 [KHz].

Perciò dopo il filtro la rigo laterale a 5 [KHz] sarà alta $0,32 \cdot 10^{-16/20} = 0,32 \cdot 0,15 \approx 0,050$

N.B. Le altezze delle righe sono sempre state espresse in [Volt] (sottinteso)

Il rapporto segnale/rumore (S/N) (la rigo laterale a 5 [KHz] va considerata come rumore, rispetto al segnale modulante a 3 [KHz]) e perciò di

$$20 \log \frac{0,50}{0,050} = 20 \text{ [dB]} = \frac{S}{N}$$

[Ovviamente la soglia del filtro è posta oltre il limite della Banda Telefonica, che è pari a 4 [KHz]]

In questo caso la distorsione è accettabile, in quanto la rigo laterale sx è sufficientemente attenuata. Se si vuole attenuarla maggiormente, basta ridurre β . Prendiamo infatti un valore di $\frac{\beta}{T_c} = 0,2$ anziché 0,5.

$$\beta = 1 \cdot \frac{\beta}{T_c} = 0,2$$

$$\begin{cases} B_1 = 2 \cdot 1 \cdot 0,2 \frac{\sin(\pi \cdot 0,2)}{\pi \cdot 0,2} \approx 0,37 \\ B_2 = 0,4 \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot 0,2)}{2 \cdot \pi \cdot 0,2} \approx 0,30 \\ B_3 = 0,4 \cdot \frac{\sin(3\pi \cdot 0,2)}{3 \cdot \pi \cdot 0,2} \approx 0,20 \\ B_4 = 0,093 \quad B_5 = 0 \end{cases}$$

$$[B_k = 2 \cdot A_p \cdot \frac{\beta}{\pi} \frac{\sin(k\pi \frac{\beta}{T_c})}{k\pi \frac{\beta}{T_c}}]$$

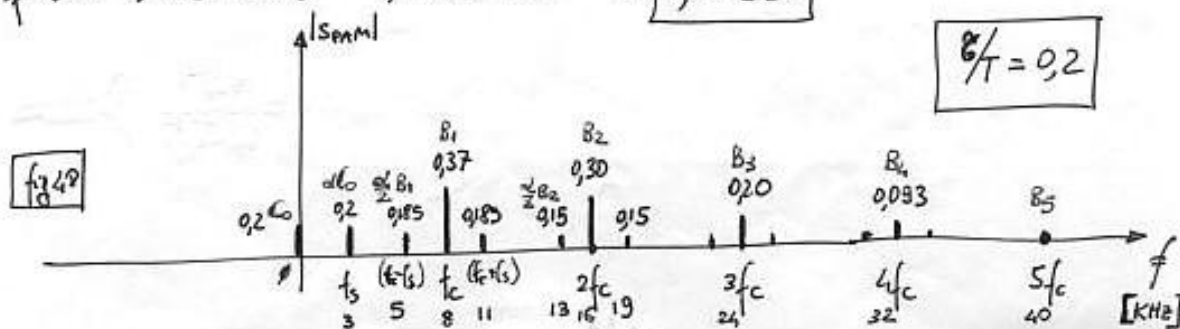
$$[\alpha = 1]$$

$$r_{PAM} = 0,2 + 0,2 \cos(2\pi f_s t) + 0,185 \cos[2\pi(f_c \pm f_s)t] + 0,37 \cos 2\pi f_c t + 0,15 \cos[2\pi(2f_c \pm f_s)t] + \dots$$

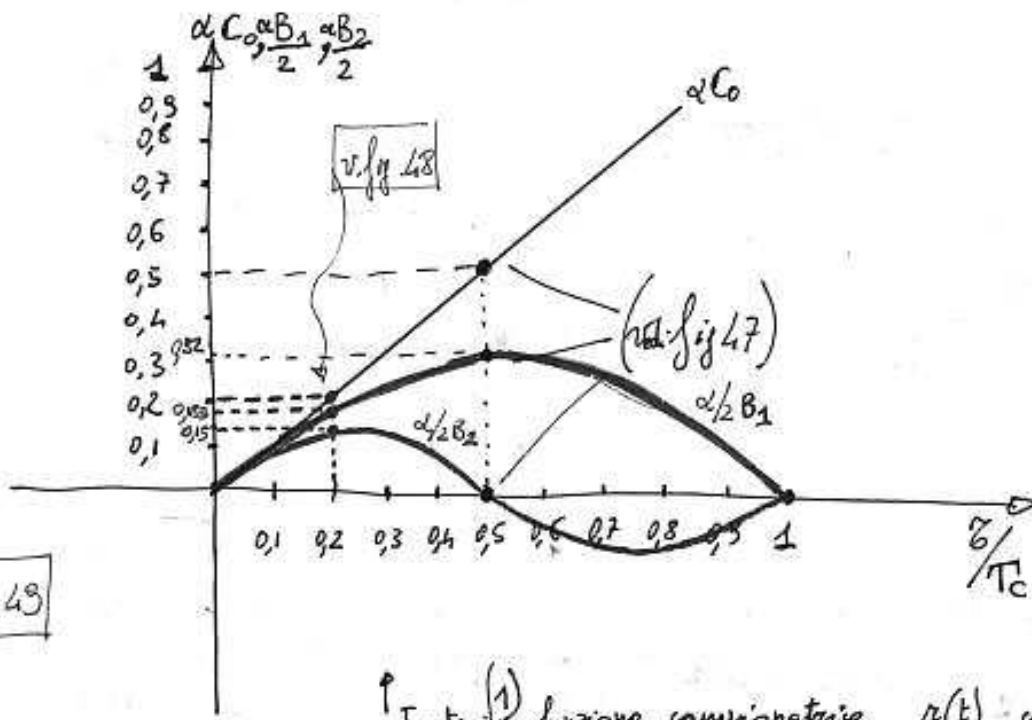
\leftarrow $\frac{\alpha}{2} B_1$ \leftarrow $\frac{\alpha}{2} B_2$
 coppie di righe intorno a f_c e a $2f_c$ righe portante

Come si vede, la rigo laterale sinistra a $(f_c - f_s)$ è molto più bassa di prima (0,185 anziché 0,32).

Dopo il filtro sarà alta $0,185 \cdot 10^{-16/20} = 0,029$

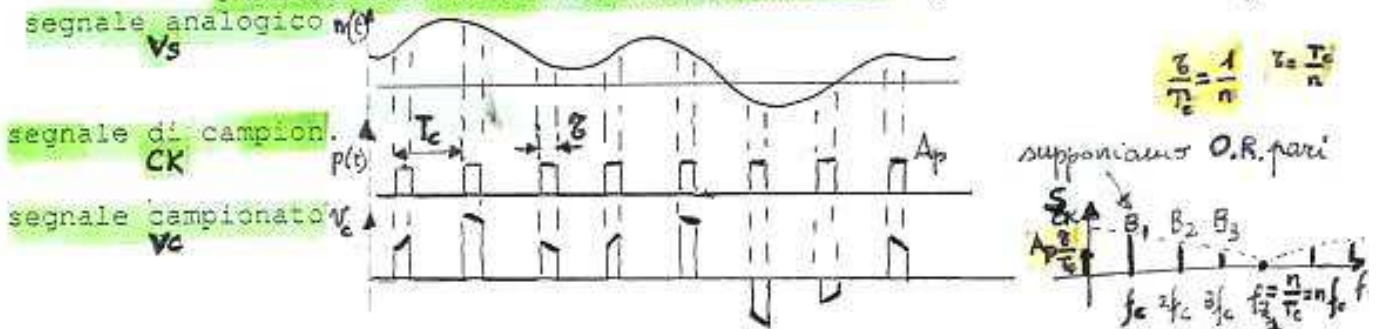


Possiamo anche usare dei grafici che danno la variazione nell'altezza delle righe del segnale PAM, al variare del σ/T_c .



Ipotesi: (1) funzione campionatrice $r(t)$ con $A_p = 1$
 (pari) $f_c = 8 \text{ [KHz]}$
 sviluppo in serie di coseni
 con altezze max $B_k = \frac{2 \cdot \frac{8}{T_c} \cdot \sin(k\pi \frac{\sigma}{T_c})}{k\pi \frac{\sigma}{T_c}}$
 $= 2 \frac{\sin(k\pi \frac{\sigma}{T_c})}{k\pi}$
 $C_0 = 1 \cdot \frac{8}{T_c}$
 e) modulante cosinusoidale con altezza = 1
 da cui $\alpha = \frac{A_m}{A_p} = 1$

CAMPIONAMENTO DI UN SEGNALE ANALOGICO (PAM - DSB - SC)



Il segnale analogico deve essere **CAMPIONATO** in modo tale da poter poi essere ricostruito correttamente dal **RICEVITORE**: per far questo, bisogna che sia rispettato il teorema di SHANNON, secondo il quale la frequenza di campionamento, ossia la f del CK , deve essere $f_c > 2f_{max}$ (dove f_{max} è la f dell'armonica di ordine più elevata contenuta in V_s). Operare il campionamento significa eseguire il **PRODOTTO** tra V_s e segnale di CK , e questa operazione modifica profondamente lo spettro originario di V_s : infatti, se per semplicità si suppone V_s sinusoidale, si ha: $V_s = B \cos(\omega t)$ a cui corrisponde il seguente spettro:



Il CK è un'onda rettangolare di frequenza f_c , periodo $T_c = 1/f_c$, D.C. = $2/T_c$ ed è quindi costituita da una componente continua e da una serie infinita di armoniche di frequenza $n \cdot f_c$ ($f_c, 2f_c, 3f_c$ ecc...); il suo spettro (che ha la tipica forma a lobi e si annulla in $1/T_c, 2/T_c$, ecc.) contiene perciò i termini: $\cos(\omega_c t), \cos(2\omega_c t), \cos(3\omega_c t)$ ecc.... $E_K = A_p \frac{2}{T_c} + B_1 \cos \omega_c t + B_2 \cos 2\omega_c t + \dots$ $\left\{ \begin{array}{l} B_K \\ C_0 = A_p \frac{2}{T_c} \end{array} \right. = 2A_p \frac{2}{T_c} \frac{\sin(K\pi \frac{\omega}{\omega_c})}{K\pi \frac{\omega}{\omega_c}}$

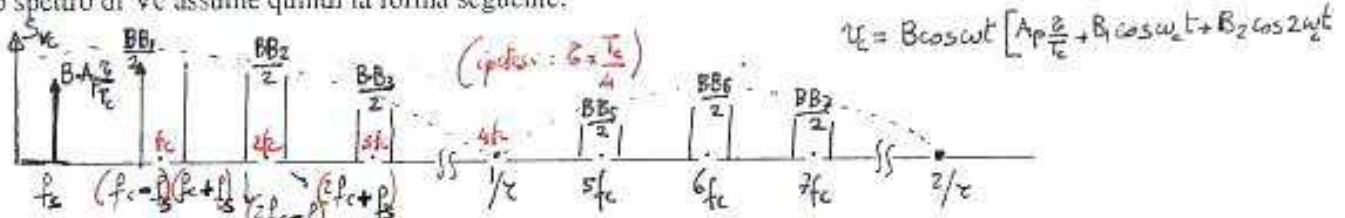
Eseguendo il prodotto $V_s \cdot CK$ si producono i termini:

$$B \cdot A_p \frac{2}{T_c} \cos(\omega t), B \cdot B_1 \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega_c t), B \cdot B_2 \cos(\omega t) \cdot \cos(2\omega_c t), B \cdot B_3 \cos(\omega t) \cdot \cos(3\omega_c t) \text{ ecc....}$$

che a loro volta danno luogo ai termini:

$$B \cdot A_p \frac{2}{T_c} \cos(\omega t), \frac{B \cdot B_1}{2} \cos(\omega_c + \omega)t, \frac{B \cdot B_1}{2} \cos(\omega_c - \omega)t, \frac{B \cdot B_2}{2} \cos(2\omega_c + \omega)t, \frac{B \cdot B_2}{2} \cos(2\omega_c - \omega)t, \frac{B \cdot B_3}{2} \cos(3\omega_c + \omega)t, \frac{B \cdot B_3}{2} \cos(3\omega_c - \omega)t \dots$$

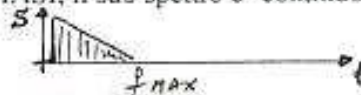
Lo spettro di V_c assume quindi la forma seguente:



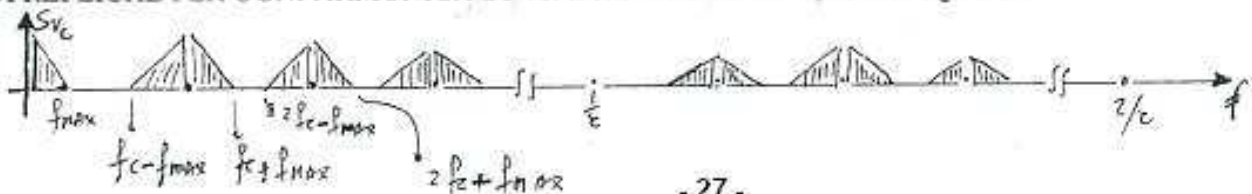
Confrontando lo spettro di V_s con quello del segnale campionato V_c , si vede che, **OLTRE ALL'ARMONICA ORIGINARIA** di frequenza f , si hanno delle **REPLICHE** a frequenze $f_c + f, f_c - f, 2f_c + f, 2f_c - f, 3f_c + f, 3f_c - f$ ecc....

Se è $f_c > 2f_s$, si riesce in ricezione a **RICOSTRUIRE** il segnale V_s , eliminando con un **PASSABASSO** tutte le repliche e lasciando passare inalterata solo la f_s originaria. Se non si rispetta il teorema di Shannon, questo non è possibile: il segnale ricostruito contiene l'armonica di frequenza $f_c - f_s$, non presente in quello originale: questo fenomeno è detto **ALIASING**.

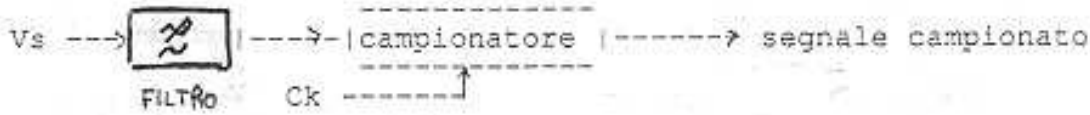
Se V_s è un **SEGNALE QUALSIASI**, il suo spettro è continuo e occupa una banda B :



f_{max} rappresenta la f dell'ultima armonica di ampiezza **APPREZZABILE** contenuta in V_s . Il campionamento agisce su ciascuna armonica di V_s come agisce sull'unica armonica di V_s sinusoidale e produce **UNA SERIE DI REPLICHE PER OGNI ARMONICA DI V_s** . Il suo andamento è quindi il seguente:

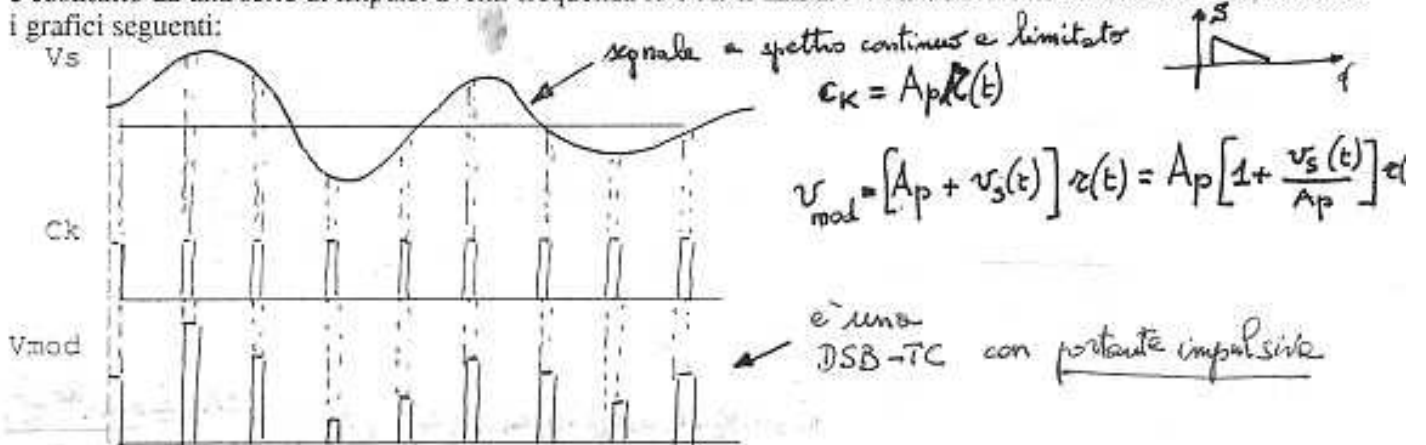


Anche in questo caso con un P.BASSO e' possibile ricostruire correttamente il segnale originario, purchè sia soddisfatta la condizione: $f_c > 2f_{max}$, se questo non accade, le repliche si sovrappongono (fenomeno detto FREQUENCY FOLDING) e il segnale ricostruito contiene armoniche non presenti in quello originario. E' evidente che il segnale V_s deve essere a BANDA LIMITATA, in modo che si possa individuare la f_{max} per decidere la frequenza di campionamento corretta: prima di essere inviato al dispositivo campionatore (circuito di SAMPLING), si limita la banda di V_s con un filtro P.Basso (filtro PRE-SAMPLING):



1- P.A.M. (Pulse Amplitude Modulation)

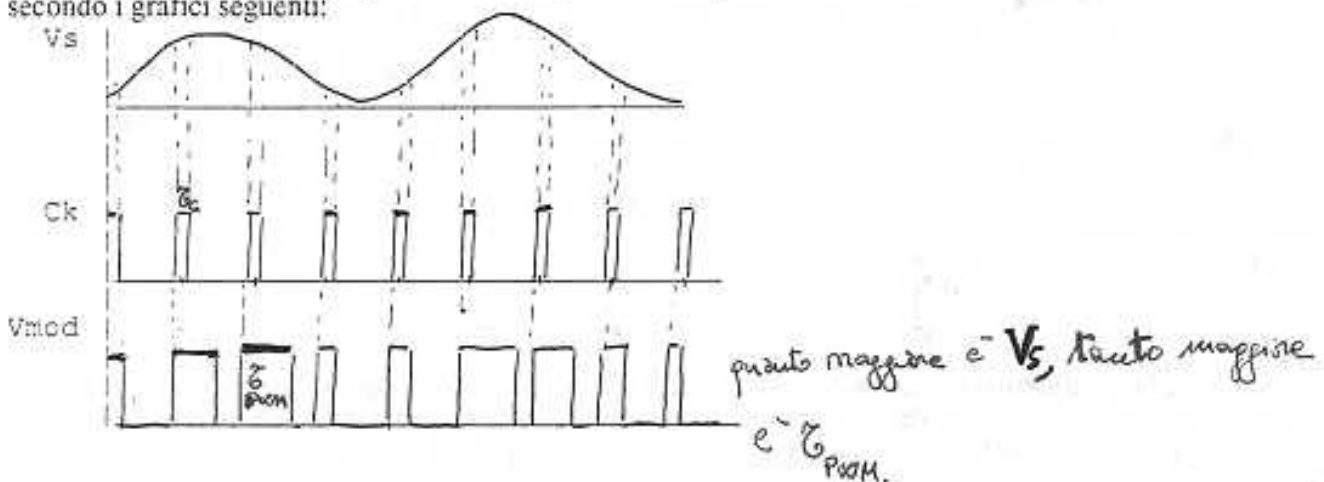
Il segnale modulato V_{mod} si ottiene campionando il segnale informazione V_s con un C_k di frequenza f_c : V_{mod} è costituito da una serie di impulsi aventi frequenza f_c e AMPIEZZA VARIABILE in accordo con V_s , secondo i grafici seguenti:



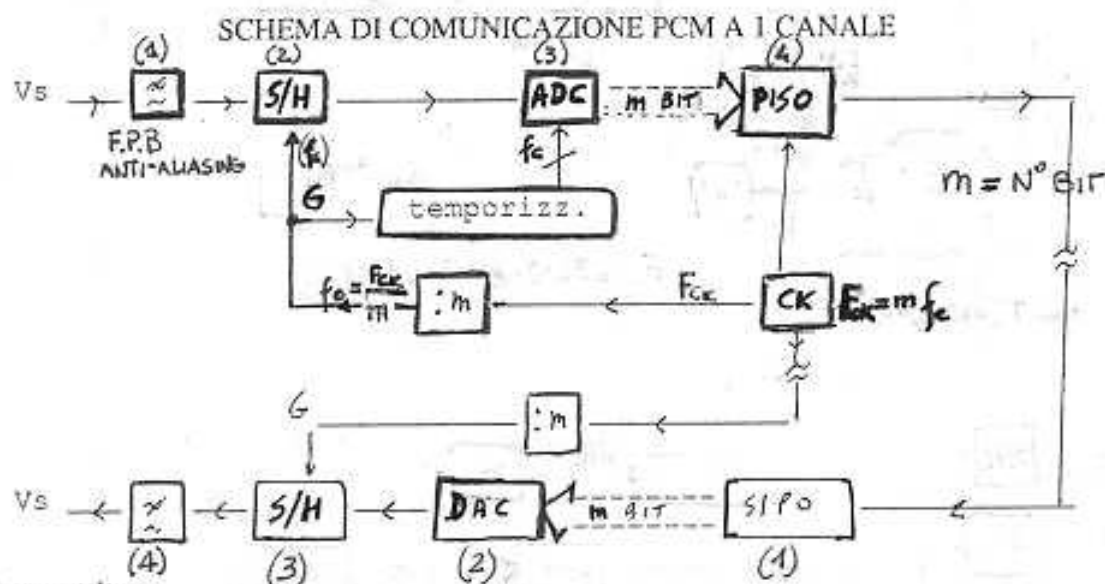
Questo tipo di modulazione può essere usato nella TELEFONIA ANALOGICA: il segnale telefonico è campionato con $f_c = 8 \text{ KHz}$ e lo spettro di V_{mod} è costituito da una serie di bande centrate intorno ai valori $n \cdot f_c$; tra un campionamento e il successivo intercorre un tempo $\Delta T = 125 \text{ microsec.}$; questo intervallo di tempo può essere usato per campionare altri segnali telefonici, trasmettendo in SEQUENZA TEMPORALE SULLO STESSO CANALE i campioni di n segnali che occupano la STESSA BANDA (tecnica TDM). Nello standard telefonico vengono multiplexati 32 canali. $\rightarrow \text{time slot} = \frac{125}{32} \approx 3,9 (\mu s)$

2- P.W.M. (Pulse Width Modulation)

Il segnale modulato V_{mod} si ottiene campionando il segnale informazione V_s con un C_k di frequenza f_c : V_{mod} è costituito da una serie di impulsi aventi frequenza f_c , ampiezza costante e τ VARIABILE in accordo con V_s , secondo i grafici seguenti:



In questo tipo di modulazione, largamente usata nella TELEFONIA DIGITALE, il segnale V_s è campionato, convertito in parole binarie a m bit e quindi trasmesso in forma seriale come sequenza temporale di bit; in ricezione la sequenza seriale di bit è ricompattata in parole di m bit, che vengono convertite in livelli di tensione e quindi in segnale analogico.



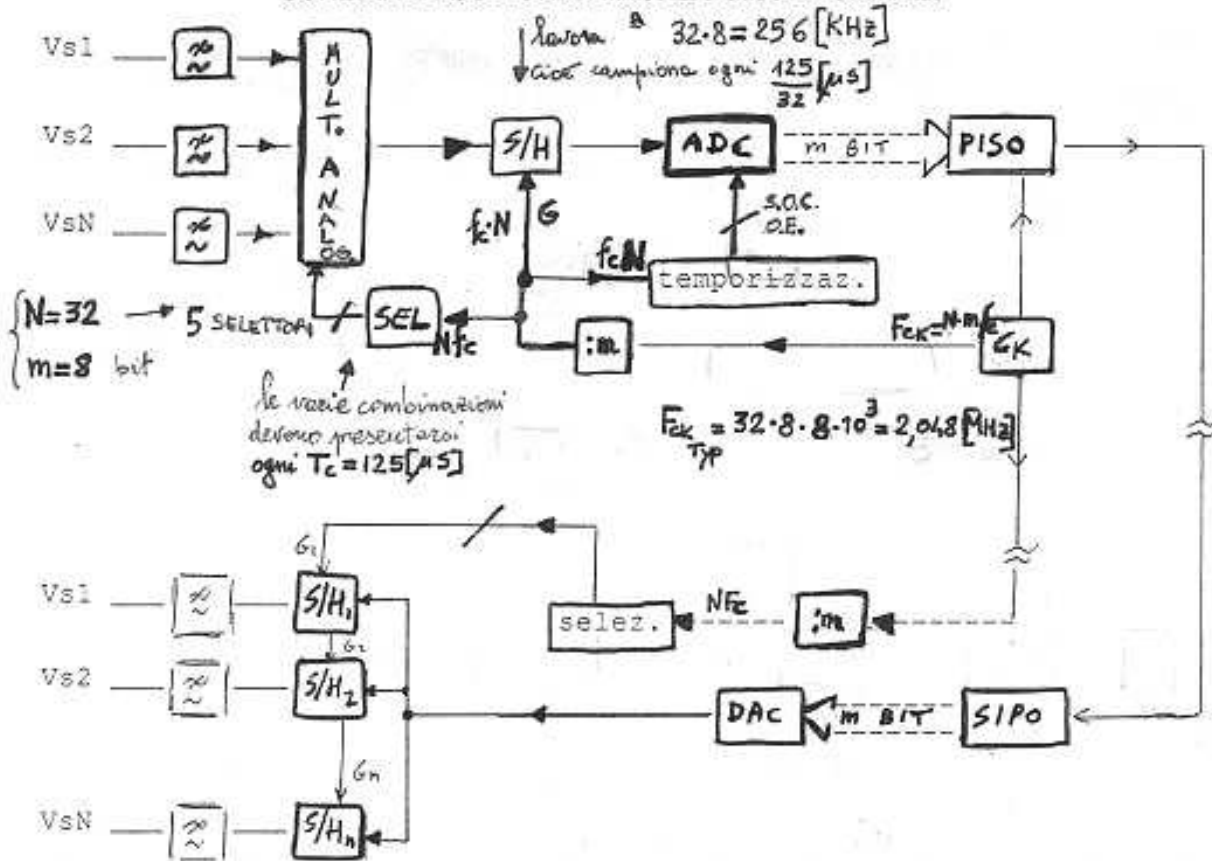
Trasmittitore:

- 1) **FILTRO P.B. pre-sampling:** serve a limitare la banda originaria di V_s per effettuare il corretto campionamento. Nello standard telefonico il filtro è di 4 ordine, con frequenza di taglio $f_t = 4$ KHz (la banda occupata da V_s è 3.4 KHz) (6')
- 2) **SAMPLE-HOLD:** circuito di campionamento-memorizzazione che, su comando del segnale di Gate G , di frequenza f_c , campiona il segnale ogni ΔT_c e memorizza l'ultimo valore letto, fino al campionamento successivo, in modo da mantenere costante la tensione in input all'ADC, mentre converte (infatti l'ADC impiega un tempo t_{conv} per effettuare la conversione)
- 3) **ADC a m bit:** esegue la conversione A-D; il codice usato è di solito BIPOLARE, in cui il bit più significativo determina il segno. All'ADC il blocco di temporizzazione, attivato dal Gate, invia i segnali per comandare l'inizio della conversione (START) e l'invio del dato sulle m linee d'output a fine conversione (OUTPUT ENABLE)
- 4) **REGISTRO PISO:** gli m bit del dato vengono serializzati per essere trasmessi; la VELOCITA' con cui i bit del dato parallelo sono inviati sull'out seriale è stabilita dal Ck , la cui frequenza deve essere $F_{ck} = f_c * m$, dato che durante il tempo ΔT_c devono essere trasmessi tutti gli m bit del dato. F_c rappresenta proprio la velocità di trasmissione: nei sistemi PCM per la TELEFONIA DIGITALE ad 1 canale la banda di V_s è 3.4 KHz, $f_c = 8$ KHz, $m = 8$ e quindi $F_c = 8 * 8 * 10^3 = 64$ Kb/sec.

Ricevitore:

- 1) **REGISTRO SIPO:** la sequenza seriale di bit trasmessi a velocità F_c viene riconvertita in dato parallelo a m bit: l'operazione deve essere scandita dallo stesso Ck del trasmettitore, che quindi deve essere trasmesso al ricevitore
- 2) **DAC:** il dato a m bit è convertito nel corrispondente livello di tensione; il DAC ha ovviamente lo stesso codice bipolare dell'ADC
- 3) **SAMPLE-HOLD:** legge, ogni ΔT_c , il livello in out al DAC e memorizza tale valore fino al successivo aggiornamento: questa operazione deve avvenire a frequenza $f_c = F_c/m$
- 4) **FILTRO P.B.:** serve ad eliminare nel segnale ricostruito le discontinuità dovute alla conversione A/D - D/A, se si considera l'andamento di V_s nel tempo, il che equivale a dire, parlando di spettro, che il F.P.B. serve ad eliminare le repliche dello spettro originario. La frequenza di taglio f_t e l'ordine sono gli stessi del F.P.B. del trasmettitore.

SCHEMA DI COMUNICAZIONE PCM A N CANALI

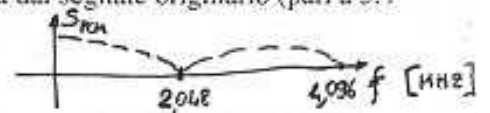


Se si tratta di un sistema a N canali che lavora in TDM; nel trasmettitore i segnali V_{s1} , V_{s2} , V_{sN} vengono inviati a un MULTIPLEXER ANALOGICO che li seleziona in sequenza temporale inviandoli all'input del S/H; nel ricevitore l'out del DAC viene inviata, tramite la logica di SELEZIONE, in sequenza, a ciascuno degli N S/H che hanno il compito di memorizzare il livello di tensione convertito e di smistarli sulle N out. In questo caso il segnale Ck che comanda nel trasmettitore il registro PISO e nel ricevitore il registro SIPO, deve avere frequenza $f_{ck} = N * m * f_c$, dato che nell'intervallo $\Delta T = T_c$ (pari a 125 microsec, dato che $f_c = 8$ KHz) vengono campionati N segnali e convertiti su m bit. Nello STANDARD TELEFONICO si ha: $N = 32$, $m = 8$, $f_c = 8$ KHz, per cui la VELOCITA' DI TRASMISSIONE è $F_c = 32 * 8 * 8 * 10^3 = 2.048$ Mb/sec.

BANDA del segnale trasmesso: il segnale è stato trasformato in sequenza di bit (rispettivamente con $F_c = 64$ Kb/s nel caso di 1 canale, e $F_c = 2.048$ Mb/s nel caso di N canali) e il suo spettro (continuo) è quello tipico di un'onda rettangolare, in cui il 1 lobo si azzera in corrispondenza rispettivamente di 64 KHz e di 2.048 MHz, occupando quindi una BANDA MOLTO PIU' LARGA di quella occupata dal segnale originario (pari a 3.4 KHz).

CODIFICA DEL SEGNALE PCM

(o codifica di linea)



In realtà, il segnale in out al PISO del trasmettitore subisce, prima di essere trasmesso, una CODIFICA e, in input al SIPO del ricevitore, una DECODIFICA, prima di essere ritrasformato in parola binaria.

I tipi di codifica più largamente usati sono i seguenti:

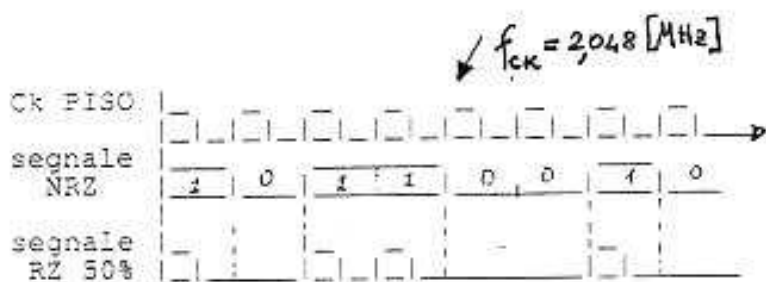
CODICE RZ

CODICE MANCHESTER

CODICE AMI

1- CODICE RZ

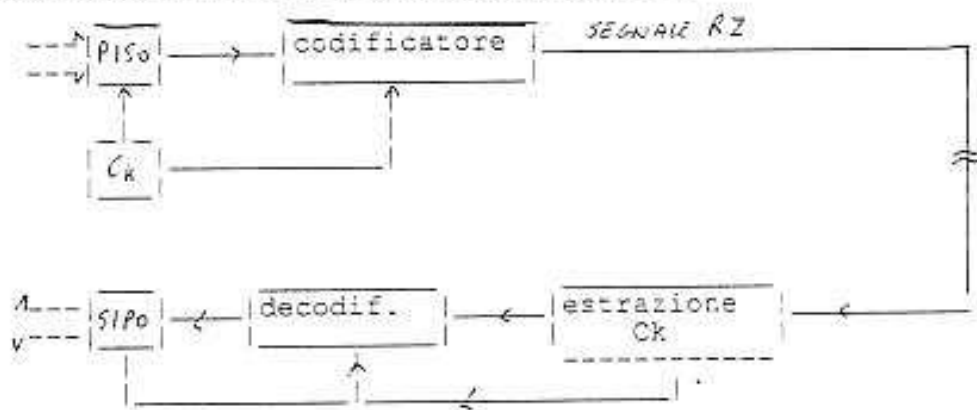
Se si utilizza la codifica RZ 50%, il segnale digitale in out al PISO (che si dice anche codificato NRZ), subisce, prima di essere inviato a distanza, la seguente trasformazione:



Il bit a 0 resta inalterato, mentre il bit a 1 viene ridotto, in durata, del 50%. In questo modo si evitano lunghe sequenze di livelli costanti in corrispondenza di lunghe sequenze di 1, evitando malfunzionamenti nella sincronizzazione trasmettitore-ricevitore. La Banda del segnale trasmesso RADDOPPIA rispetto al codice NRZ, perchè l'onda rettangolare trasmessa ha τ dimezzato. Se il 1 lobo dello spettro del segnale NRZ si azzerava in 2.048 MHz, adesso lo spettro del segnale RZ è il seguente:

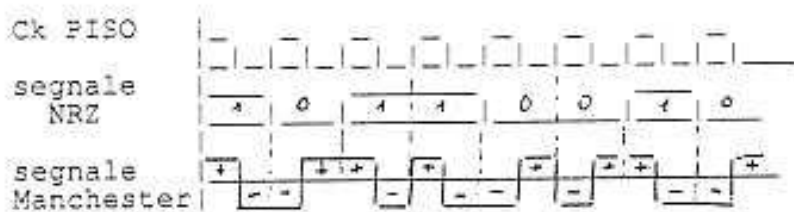


Si nota che ora è presente l'armonica a $f = 2.048 \text{ MHz}$, che nel ricevitore viene ESTRATTA dal segnale in arrivo ~~per~~ permettendo così di RICOSTRUIRE il Ck in sede di ricezione, senza doverlo inviare a distanza. Lo schema a blocchi del sistema PCM a N canali si modifica quindi così:

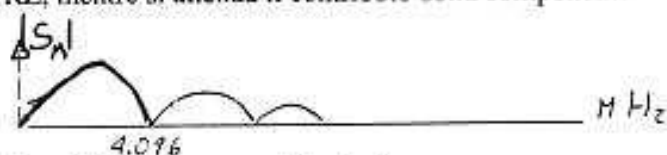


2- CODICE MANCHESTER

Per evitare le lunghe sequenze di livelli costanti in corrispondenza anche dei bit a 0, si può usare la codifica Manchester o bifase:



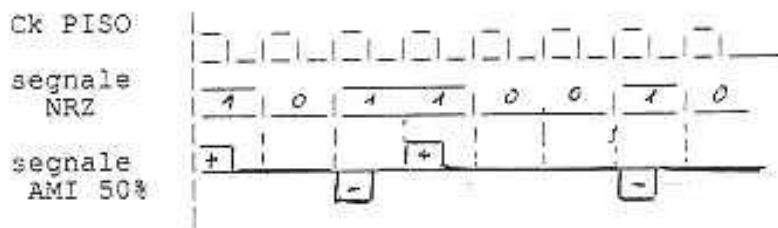
Al bit 1 si associa un livello positivo seguito da un livello negativo, al bit 0 viceversa: in questo modo la larghezza dei lobi dello spettro è la stessa che per il codice RZ, mentre si attenua il contributo della componente continua; lo spettro assume perciò la forma seguente:



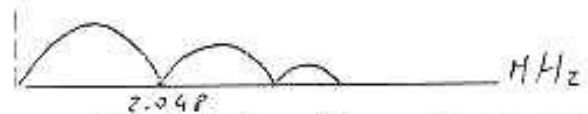
Anche qui si può estrarre il Ck in ricezione e lo schema a blocchi è analogo a quello di prima. -31-

3- CODICE AMI

Nel codice AMI 50% la forma del segnale codificato è la seguente:



Rispetto al codice RZ 50% si inverte la polarità dei bit a 1 in modo alternato (uno sì e uno no), lasciando inalterati i bit a 0, producendo uno spettro in cui la componente continua è trascurabile e la Banda occupata si DIMISETTA: infatti si dimostra che il 1 lobo è ora largo 2.048 MHz



Dato che manca l'armonica a 2.048 MHz, per poter ancora estrarre il Ck in ricezione si riconverte la sequenza ricevuta, codificata AMI, in sequenza codificata RZ.

MODULAZIONI NUMERICHE PER TRASMISSIONE DATI

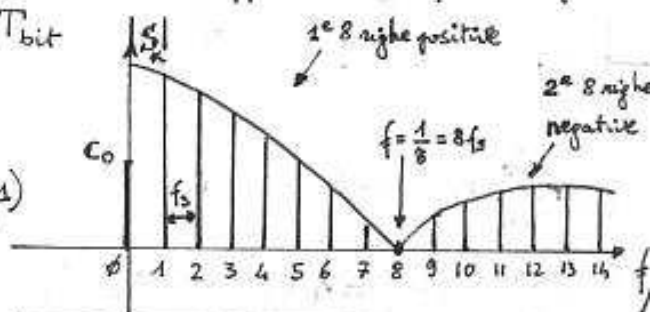
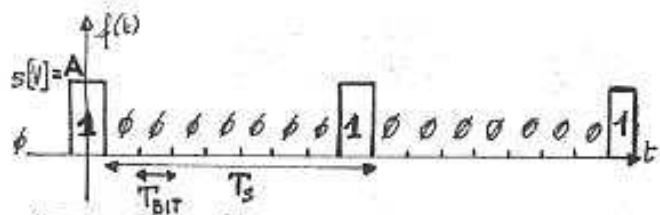
I segnali digitali sono a banda larga; per esempio un segnale rettangolare pari unipolare, come può essere una sequenza di byte di questo tipo:

1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 ... (rappresentato da un codice binario standard con livelli TTL)

presenta uno spettro a righe con inviluppo

dato dalla formula $\frac{\sin x}{x}$. Gli zeri dell'inviluppo si verificano per

$$f = \frac{n}{T_s} \quad \text{dove } T_s = \frac{T_b}{8} \quad \text{e } T_b = 8 T_{\text{bit}}$$



$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k \omega_s t \quad (\text{f.c. pari})$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}; \quad f_s = \frac{1}{T_s}; \quad \frac{\omega}{\pi} = \frac{1}{8}$$

$$B_k = \frac{2A}{\pi} \frac{\sin(K\pi/8)}{K\pi/8}$$

$$C_0 = A/8$$

$$f(t) = 0,625 + 1,22 \cos \omega_s t + 1,1 \cos 2\omega_s t + \dots + 0,017 \cos 7\omega_s t$$

- $C_0 = 0,625$
- $B_1 = 1,22$
- $B_2 = 1,1$
- $B_3 = 0,98$
- $B_4 = 0,79$
- $B_5 = 0,53$
- $B_6 = 0,37$
- $B_7 = 0,017$
- $B_8 = 0$

La distanza tra le righe è pari a $f_s = \frac{1}{T_s}$

L'inviluppo si annulla per $f = 8f_s, 16f_s, 24f_s$ etc...

Parametro fondamentale è perciò la velocità di tx in Bit/sec: infatti se raddoppiamo la velocità, T_{BIT} si dimezza, così come T_s , per cui f_s raddoppia e il 1° lobo dell'inviluppo, il + significativo, diventa largo il doppio; in altre parole le prime 8 armoniche, le + importanti per ricostruire il segnale, occupano una banda doppia rispetto a prima.

È chiaro quello che succede aumentando ancora la velocità: le prime armoniche "escono fuori" dalla banda telefonica $\phi \div 4$ [KHz].

Facciamo dei numeri:

$$V_{tx} = 1200 \text{ [BIT/sec]} \Rightarrow T_{\text{BIT}} = 0,0008\bar{3} \text{ [s]} = 0,8\bar{3} \text{ [ms]} \Rightarrow T_s = 8 \cdot 0,8\bar{3} = 6,6 \text{ [ms]} \Rightarrow f_s = 150 \text{ [Hz]}$$

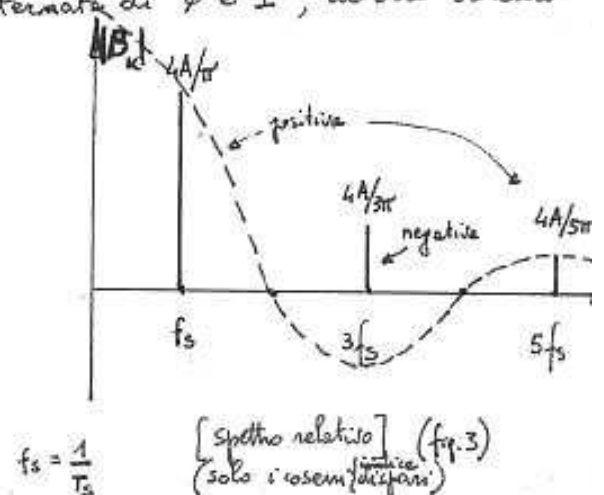
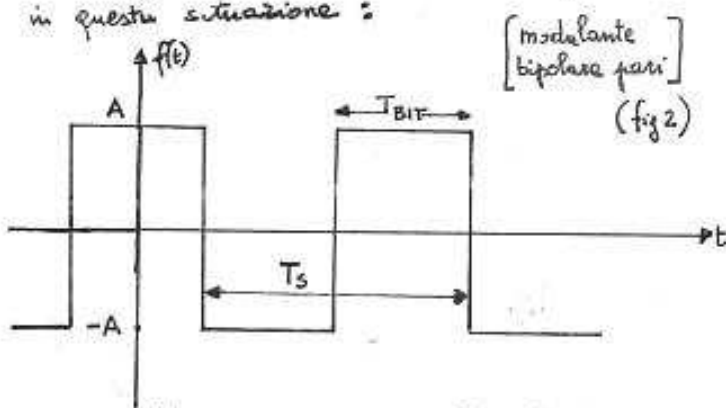
$$V_{tx} = 4800 \text{ [BIT/sec]} \Rightarrow f_s = 600 \Rightarrow 8f_s = 4800 \text{ [Hz]}$$

8f_s = 4800 [Hz]
le 8 armoniche "stanno" nella
BANDA TELEFONICA

Tutto questo per un particolare tipo di messaggio.

Se invece supponiamo di avere un messaggio digitale bipolare pari, come -33- avviene ad esempio nei modem fonia che utilizzano lo STANDARD RS-232-C,

e immaginiamo di avere una sequenza alternata di 0 e 1, allora saremo in questa situazione:



$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\omega_s t \quad (C_0 = 0)$$

$$B_k = \frac{4A}{k\pi} \sin k\frac{\pi}{2} = \frac{4A}{k\pi} \frac{\sin(k\pi \frac{1}{2})}{\frac{k\pi}{2}} = 2V_{pp} \frac{1}{2} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

(V_{pp} = 2A)

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \cos(\pi f_s t) - \frac{4A}{3\pi} \cos(3\pi f_s t) + \frac{4A}{5\pi} \cos(5\pi f_s t) + \dots$$

B_k = 0 per k pari

B₁ = 4A/π

B₃ = 4A/3π

B₅ = 4A/5π

Se V_{tx} = 1200 [bit/sec] ⇒ T_{BIT} = 0,83 [ms] ⇒ T_s = 1,6 [ms] ⇒ f_s = 60

La 4^a armonica, a 7f_s = 4200 [Hz], è già fuori banda telefoni

Dopo questa introduzione, appare chiaro che il segnale digitale non può essere trasmesso in banda base, se non a basse velocità.

Ma ci sono anche altre considerazioni, come l'attenuazione subita dal segnale nel cavo telefonico, ad opera delle costanti primarie distribuite R, L, G, C. Su un segnale TTL il margine di rumore è molto limitato (0,4[V]) per cui è preferibile inviare in linea altri tipi di segnali, analogici.

LE MODULAZIONI NUMERICHE SONO di 3 tipi:

- AMPIEZZA: MODULANTE DIGITALE SU PORTANTE SINUSOIDALE (ASK)
- FREQUENZA: MOD. DIGIT. " " (FSK)
- FASE: " " " " (PSK)

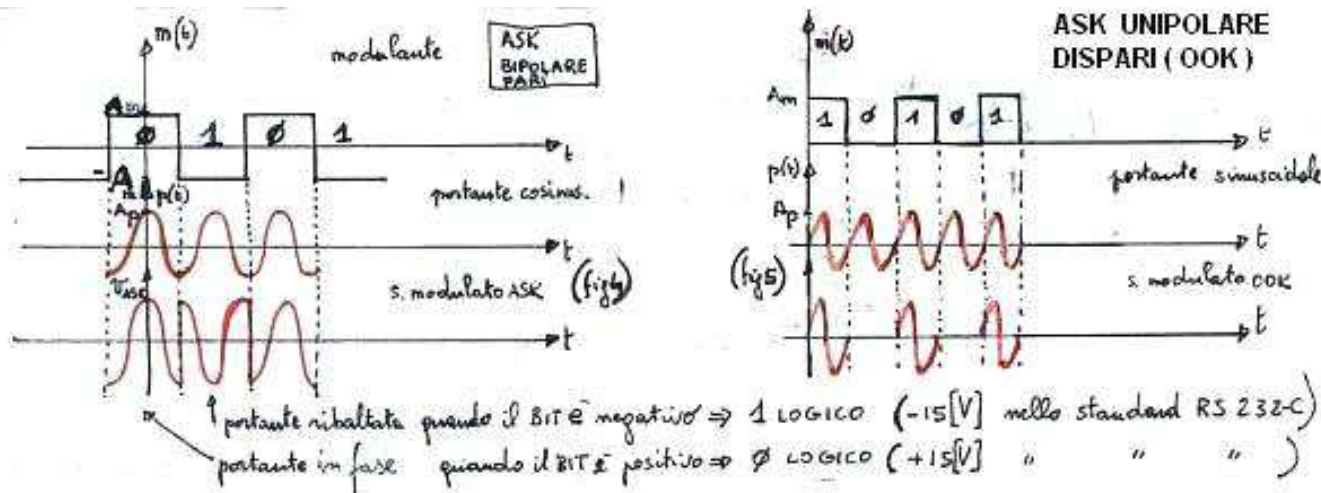
ASK

2 TIPI

- ASK BIPOLARE
- ASK UNIPOLARE (ON/OFF KEY)

Il modulatore effettua il prodotto tra il segn. digitale e la portante A_p cos ω_p t.

Si tratta quindi un caso particolare della DSB-SC e DSB-TC. -34-



Per ottenere lo spettro, bisogna moltiplicare ogni componente armonica del segnale digitale per la portante:

$$m(t) = \left[\frac{4A_m}{\pi} \cos(2\pi f_s t) - \frac{4A_m}{3\pi} \cos(2\pi \cdot 3f_s t) + \frac{4A_m}{5\pi} \cos(2\pi \cdot 5f_s t) + \dots \right]$$

modulante ASK BIPOLARE pari (fig 4)

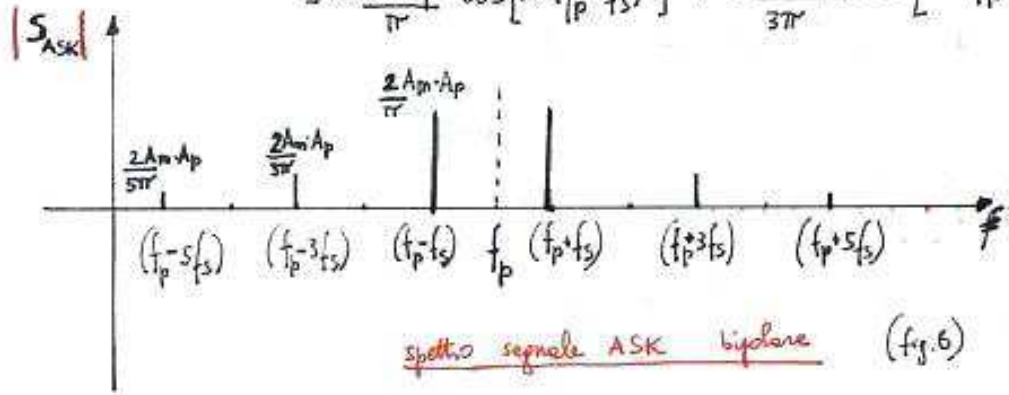
$$v_{ASK}(t) = m(t) \cdot p(t) = \left[\dots \right] \cdot A_p \cos(2\pi f_p t)$$

(DSB-SC)

WERNER

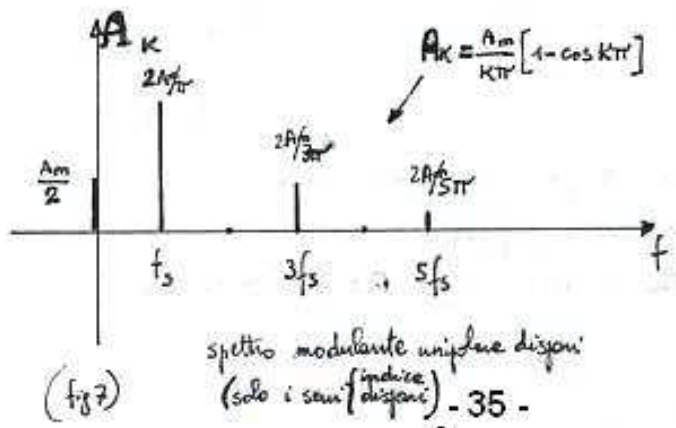
$$v_{ASK}(t) = \frac{4A_m \cdot A_p}{\pi} \cos(2\pi f_s t) \cdot \cos(2\pi f_p t) + \dots =$$

$$= \frac{2A_m \cdot A_p}{\pi} \cos[2\pi(f_p \pm f_s)t] + \frac{2A_m \cdot A_p}{3\pi} \cos[2\pi(f_p \pm 3f_s)t] + \dots$$



$$m(t) = \frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \sin(2\pi f_s t) + \frac{2A_m}{3\pi} \sin(2\pi \cdot 3f_s t) + \frac{2A_m}{5\pi} \sin(2\pi \cdot 5f_s t) + \dots$$

modulante (ASK UNIPOLARE) (fig 5) (OOK)



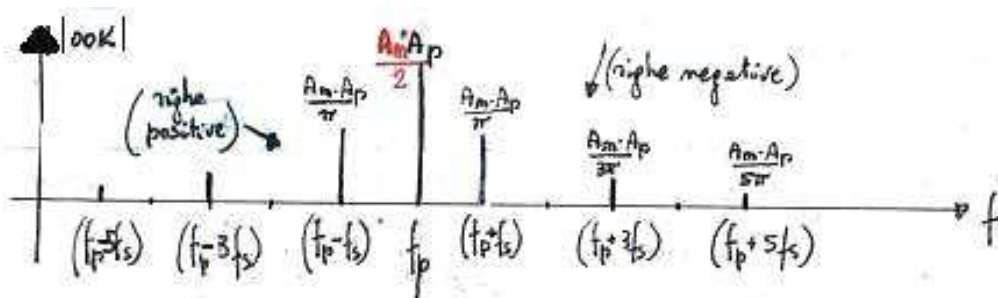
Moltiplicando $m(t) \cdot p(t)$ si ottiene

$$v_{OOK} = \left[\frac{A_m}{2} + \frac{2A_m}{\pi} \sin(2\pi f_s t) + \dots \right] \cdot A_p \sin(2\pi f_p t)$$

$$= \frac{A_m A_p}{2} \sin(2\pi f_p t) + \frac{2A_m A_p}{\pi} \sin(\dots) \sin(\dots) + \dots$$

$$= \dots + \frac{A_m \cdot A_p}{\pi} \cos[2\pi(f_p - f_s)t] - \frac{A_m \cdot A_p}{\pi} \cos[2\pi(f_p + f_s)t] + \dots$$

(portante) 2 righe laterali (positiva ed sx, negativa ed dx)



spettro s. modulato OOK.

(fig. 8)

Come si vede i due spettri sono molto simili.

FSK

si usa per Tx DATI su linea commutata, HD o FD, tx asincrona, velocità fino a 1200 [BIT/sec]

Ai 2 bits vengono associate due sinusoidi di pari ampiezza e diversa freq.

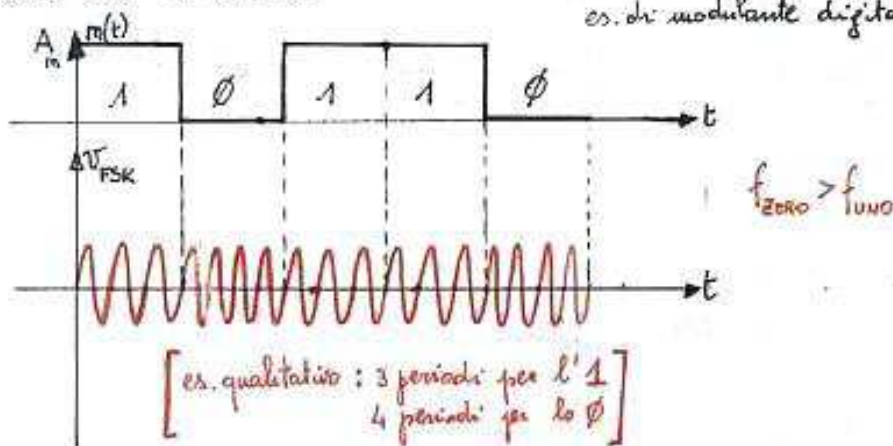
$\phi \rightarrow$ freq. superiore

1 \rightarrow " inferiore

È un caso particolare della modulazione FM: in questo caso la modulante è digitale anziché sinusoidale (o analogica, composta da più frequenze);

di conseguenza la frequenza della portante non varia con continuità, ma bruscamente tra 2 valori.

es. di modulante digitale



Per determinare lo spettro di v_{FSK} bisogna dunque esprimere la pulsazione

$$\omega_{FSK} = \omega_p + k_f m(t) \quad \text{e determinare l'angolo } \chi_{FSK} = \int \omega_{FSK} dt = \omega_p t + k_f \int m(t)$$

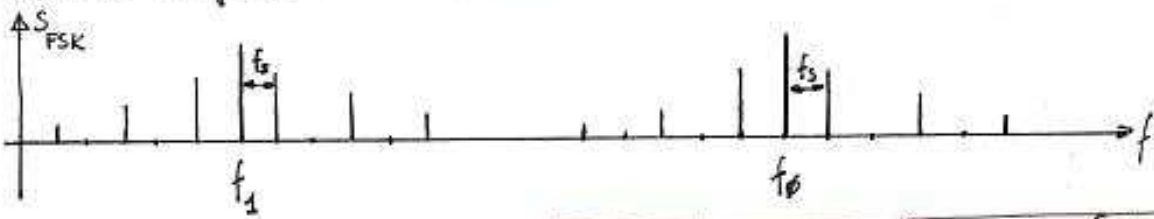
Come si ricordava, nel caso analogico $m(t) = A_m \cos \omega_m t$, e ciò provoca il ricorso alle curve di Bessel e alle formule di Werner.

Lo spettro in quel caso era composto da molte armoniche, a cavallo della f_p e distanti $\pm f_m, \pm 2f_m, \pm 3f_m, \dots$ e di ampiezza dipendente da A_m e ω_m .

Ora bisogna sviluppare il segnale digitale e ripetere i calcoli per ogni riga dello spettro di tale segnale. Si ottiene uno spettro FSK molto esteso.

Tutto questo nel caso che si usi un modulatore analogico. - 36 -

c'è anche un tipo di modulatore digitale che opera in altro modo: il segnale FSK è ottenuto dalla sovrapposizione di 2 segnali ASK a frequenze diverse. Ecco lo spettro del s. modulato

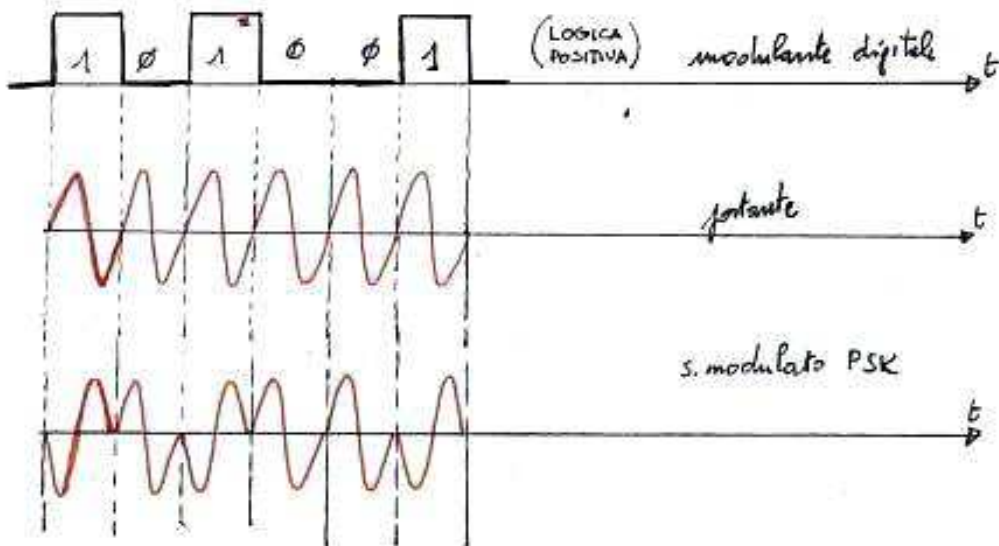


PSK per Tx dati sincrona fino a 9600 [BIT/sec], su linea commutata/dedicata, HD o FD.

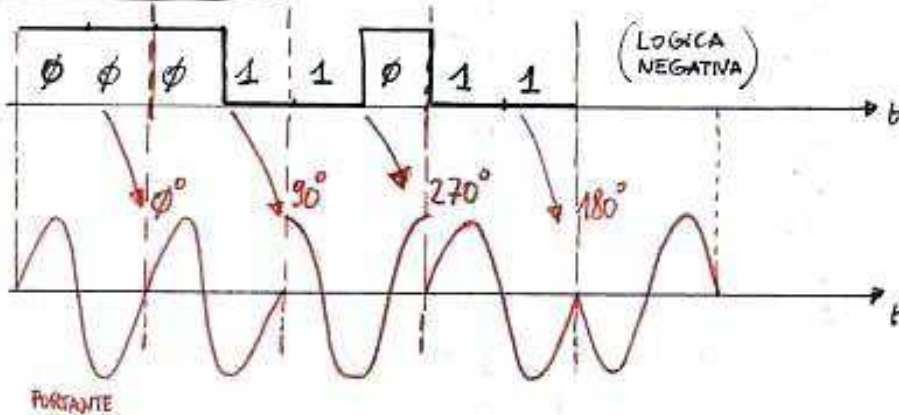
2-PSK
1200 [BIT/sec]

\Rightarrow fase $0^\circ \Rightarrow$ BIT 0
fase $180^\circ \Rightarrow$ BIT 1

La portante mantiene ampiezza e frequenza costanti, e varia la fase.



4-PSK differenziale 2400 [BIT/sec] \Rightarrow 1200 [BAUD/sec]



DIBIT (00, 01, 11, 10)	FASE
00	0°
01	90°
11	270°
10	180°

[una data coppia di bit provoca un anticipo di fase del segnale relativo alla coppia precedente. -37.]

8-PSK → 4800 [Bit/sec]

→ 1600 [BAUD/sec] ≡ velocità di modulazione.

TRIBIT ($Q_3 Q_2 Q_1$)	FASE
001	0°
000	45°
010	90°
011	135°
111	180°
110	225°
100	270°
101	315°

Q-PSK 9600 [Bit/sec] ⇒ 2400 [BAUD/sec]

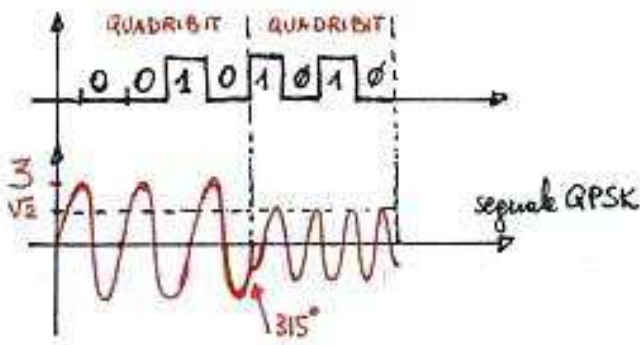
16 segnali diversi per ogni codice : $Q_3 Q_2 Q_1$ determinano il salto di fase
 Q_0 determina l'ampiezza del segnale

Ci sono 4 possibili ampiezze : $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 3, 5$

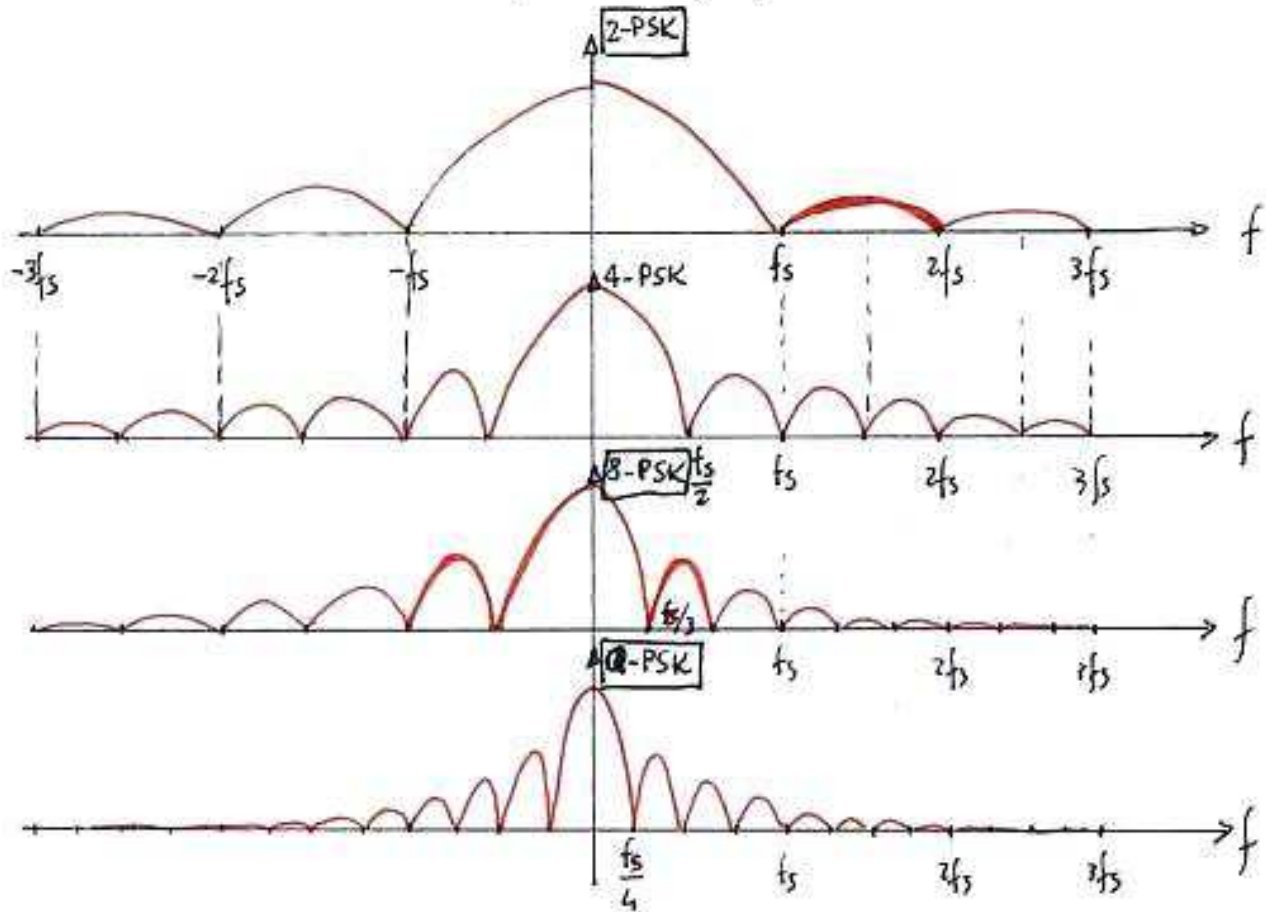
I segnali con sfasamenti pari a $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ hanno due possibili ampiezze (3,5) e individuano 4 coppie di quadribit.

I segnali con sfasamenti pari a $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ hanno 2 possibili ampiezze ($\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$) e individuano le altre 4 coppie di quadribit.

$Q_3 Q_2 Q_1 Q_0$	Ampiezza portante	Fase portante
0 0 1 0	3	0°
0 0 1 1	5	0°
0 0 0 0	$\sqrt{2}$	45°
0 0 0 1	$3\sqrt{2}$	45°
0 1 0 0	3	90°
0 1 0 1	5	90°
0 1 1 0	$\sqrt{2}$	135°
0 1 1 1	$3\sqrt{2}$	135°
1 1 1 0	3	180°
1 1 1 1	5	180°
1 1 0 0	$\sqrt{2}$	225°
1 1 0 1	$3\sqrt{2}$	225°
1 0 0 0	3	270°
1 0 0 1	5	270°
1 0 1 0	$\sqrt{2}$	315°
1 0 1 1	$3\sqrt{2}$	315°



Confronto tra gli spettri



Spettri ottenuti considerando i segnali digitali come successione di 0 e 1, per cui

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2T_{\text{BIT}}}$$

Si vede come gli spettri si "stringano", consentendo il transito dei segnali nella banda telefonica, a velocità via via più alte.

MODEM FSK

V.21

300 BIT/sec.

FD su 2 fili

Si divide la Banda in 2 sottobande : la + bassa per trasmettere, la + alta per ricevere.

In ciascuna sottobanda, l'1 e ϕ e' rappresentato dalle freq. + basse.

CH 1 (ORIGINATE)

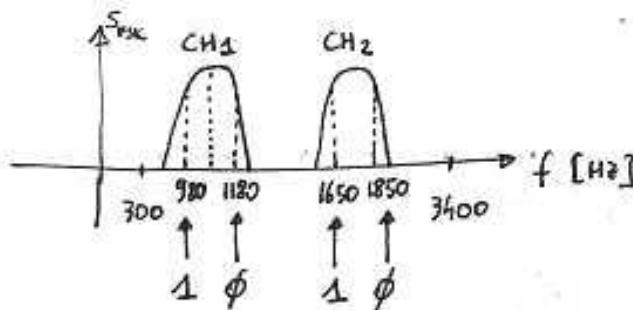
1 \Rightarrow 980 [Hz]

$\phi \Rightarrow$ 1180 [Hz]

CH 2 (ANSWER)

1 \rightarrow 1650 [Hz]

$\phi \rightarrow$ 1850 "



MODEM PSK

V.22

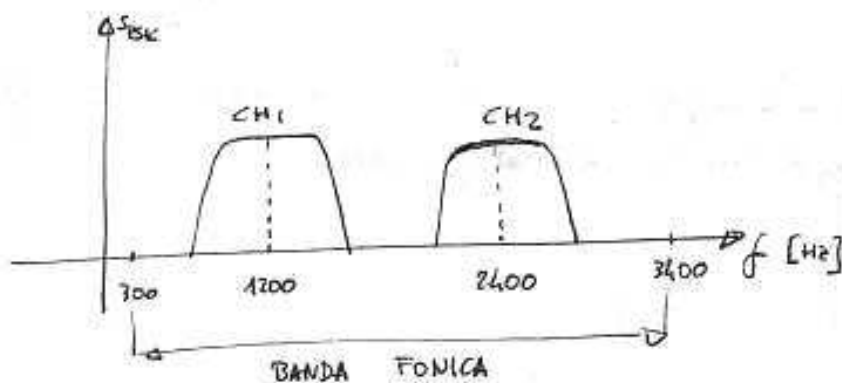
600 / 1200 [BIT/sec]

FD su 2 fili

2PSK / 4PSK

CH 1 \rightarrow freq. portante 1200 [Hz]

CH 2 \rightarrow " " 2400 [Hz]



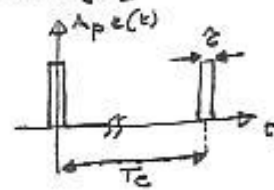
PAM DSB - TC

$$p(t) = A_p z(t) = 6 z(t)$$

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) = 3 \cos(2\pi 100 t) \text{ [V]}$$

$$\beta/T_c = 0,2$$

$$\begin{cases} T_c = 0,5 \text{ [ms]} \\ f_c = 2000 \text{ [Hz]} \end{cases}$$



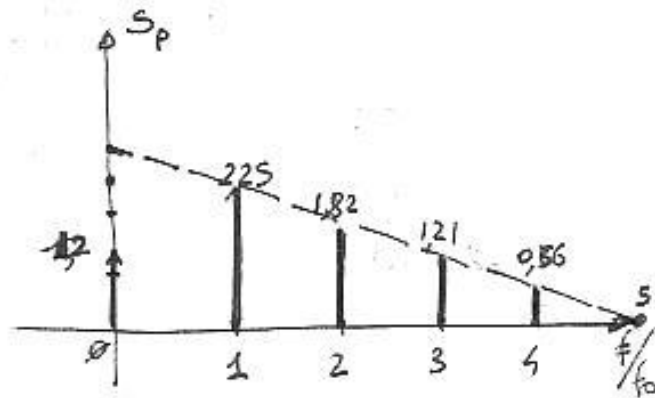
$$v_{PAM}(t) = [m(t) + A_p] z(t) = [3 \cos(2\pi 100 t) + 6] z(t) = 6 z(t) + 3 \cos(2\pi 100 t) \cdot z(t)$$

sviluppo di $A_p \cdot z(t)$: $C_0 = 6 \cdot \frac{1}{5} = 1,2 \text{ [V]}$

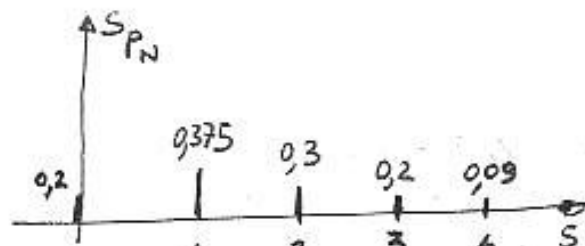
$$B_k = 2 A_p \frac{\beta}{T_c} \frac{\sin(k\pi \beta/T_c)}{k\pi \beta/T_c} = \frac{2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{5}}{k\pi/5} \frac{\sin(k\pi/5)}{k\pi/5} = \frac{12}{k\pi} \sin(k\pi/5)$$

partenza in sviluppo: 2,4

$$\begin{cases} B_1 \approx \frac{12}{\pi} \cdot 0,58 \approx 2,25 \text{ [V]} \\ B_2 = \frac{12}{2\pi} \cdot 0,95 \approx 1,82 \\ B_3 \approx 1,21 \\ B_4 \approx 0,56 \\ B_5 = 0 \end{cases}$$



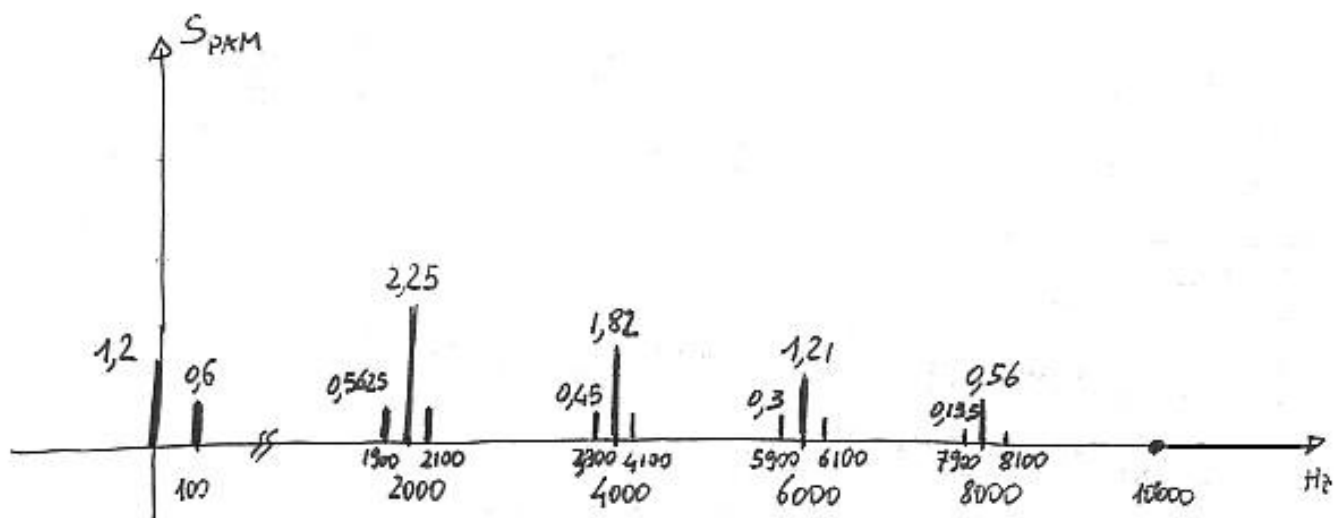
spetro portante: $6 z(t)$



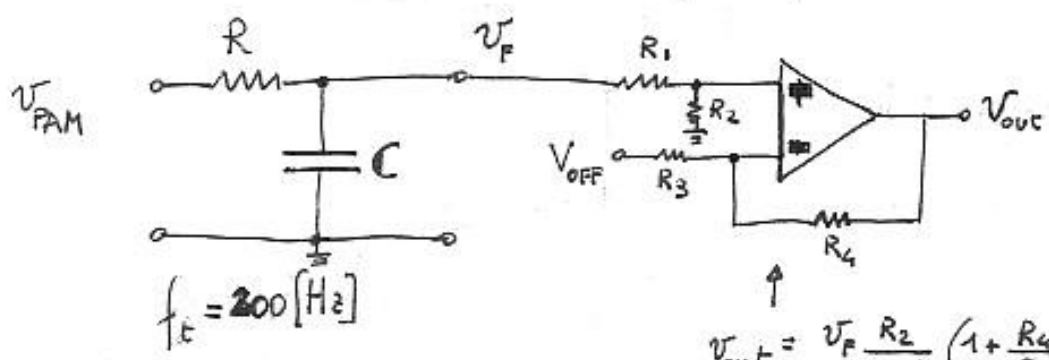
spetro portante unitaria: $z(t)$

$$v_{PAM} = [1,2 + 2,25 \cos(2\pi 2000 t) + 1,82 \cos(2\pi 4000 t) + \dots] + [0,2 + 0,375 \cos(2\pi 2000 t) + \dots] z(t)$$

$$= \text{portante} + \text{modulante attenuata del fattore } \beta/T_c + \text{righe laterali SX \& DX}$$



Per ricostruire il segnale: Filtro passa-basso ^{seguito da A. differenziale} con guadagno 5 e recupero offset (+1,2 V)



$$V_F = [0,6 \cos(2\pi \cdot 100t) + 1,2] [V]$$

$$V_{out} = V_F \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) - V_{OFF} \frac{R_4}{R_3}$$

$$\text{se } \begin{cases} R_1 = R_3 \\ R_2 = R_4 \end{cases}$$

$$V_{out} = (V_F - V_{OFF}) \frac{R_4}{R_3}$$

$$\text{se } \begin{cases} V_{OFF} = 1,2 [V] \\ \frac{R_4}{R_3} = 5 \end{cases} \Rightarrow V_{out} = [0,6 \cos(2\pi \cdot 200t) + 1,2] - 1,2 \cdot 5 = 3 \cos(2\pi \cdot 200t)$$

Dimensionamento del filtro: $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 200 \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi \cdot 200 \cdot C}$

pongo $C = 1 [\mu F] \Rightarrow R = \frac{10^6}{2\pi \cdot 200} \approx 796 [\Omega]$

Calcolo dell'attenuazione delle righe a 1900 e 2000 [Hz]:
 a 2000 [Hz] $\Rightarrow G = -20 [dB] \Rightarrow 2,25/10 = 0,225 [V] \Rightarrow 0,225 \cos(2\pi \cdot 2000t)$
 e 1900 " $\Rightarrow G = -20 \log \frac{1900}{200} = -19,5 [dB] \Rightarrow 0,5625 \cdot 0,105 \approx 0,059 \Rightarrow 0,06 \cos(2\pi \cdot 1900t)$