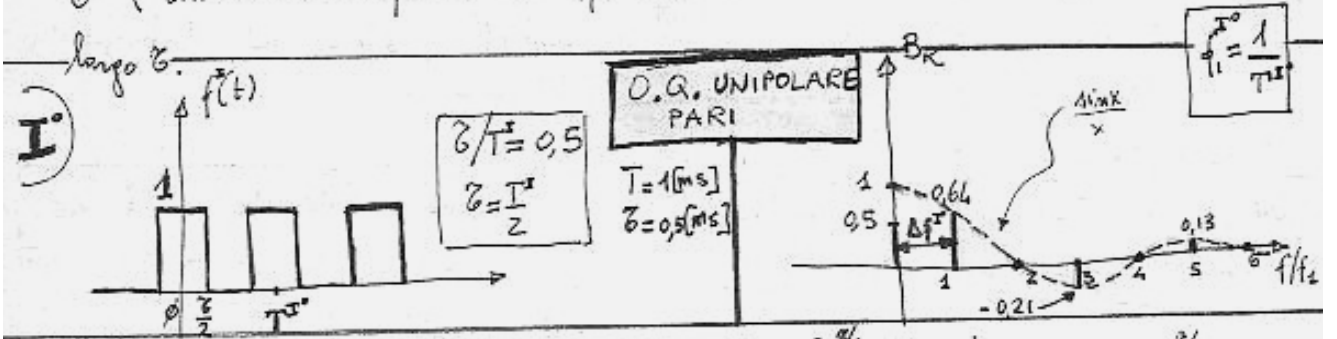


SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER DI ONDE RETTANGOLARI

Consideriamo una $f(t)$ periodica (onda quadra).

Vediamo cosa succede allo spettro aumentando T e mantenendo costante τ (diminuendo perciò $\delta = \frac{\tau}{T}$, fino ad arrivare all'impulso rettangolare



$C_0 = 1 \cdot \frac{\tau}{T} = 0,5$; $A_k = 0 \quad \forall k$; $B_k = \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} 1 \cdot \cos(k\omega t) dt = \frac{4}{k\omega T} [\sin(k\omega t)]_0^{\tau/2}$

[L'inviluppo dei coeff. dei coseni ha l'andamento di $\frac{\sin x}{x}$; si annulla per $f = \frac{k}{\tau} = 2, 4, 6, \dots$]

$B_k = \frac{4}{k\omega T} \sin(k\omega \frac{\tau}{2}) = \frac{4}{k\omega T} \sin(k\omega \frac{\tau}{2}) = \frac{\sin(k\omega \tau/4)}{k\omega \tau/4}$

$B_k = \frac{\sin(k \frac{2\pi T}{T} \frac{\tau}{4})}{k \frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{4}} = \frac{\sin(k \pi/2)}{k \pi/2}$

$B_1 = \frac{2}{\pi} = 0,64$	$B_3 = -\frac{2}{3\pi} = -0,21$	$B_5 = \frac{2}{5\pi} = 0,13$
$B_2 = 0$	$B_4 = 0$	$B_6 = 0$ etc.

$f(t) = 0,5 + 0,64 \cos(2\pi f_1 t) - 0,21 \cos(3 \cdot 2\pi f_1 t) + 0,13 \cos(5 \cdot 2\pi f_1 t) + \dots$

Come si vede dallo spettro dei B_k , il 1° lobo si annulla già per $k=2$, per cui contiene solo riga; la fondamentale, ($\Delta f = 1[\text{KHz}]$)

Se ora raddoppiamo T cosa succede? ($\tau = \text{cost}$)

$T^{II} = 2T^{I}$

$\delta = \frac{\tau}{2T} = 0,25$ per cui $C_0 = 1 \cdot \frac{\tau}{2T} = 0,25$

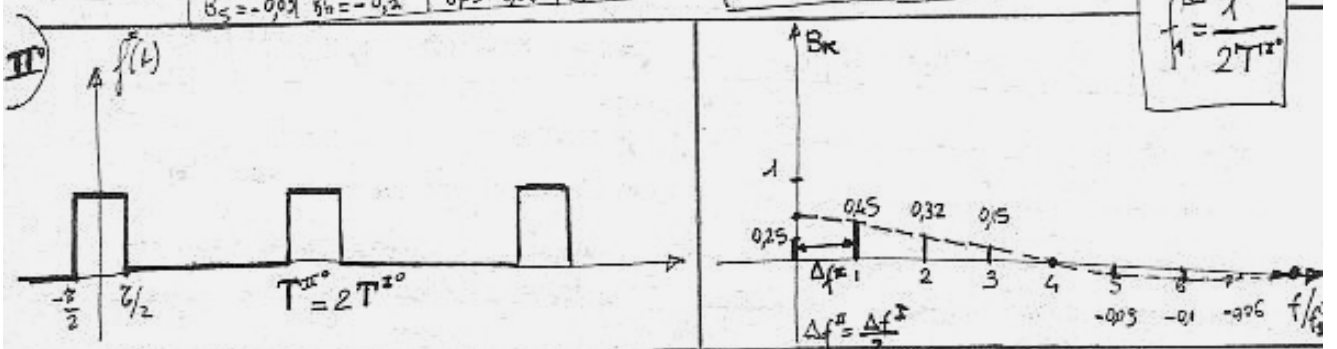
$B_k = \frac{2\tau \sin(k\omega \tau/2)}{k\omega \tau/2} = 2 \cdot \frac{1}{4} \frac{\sin(k \frac{2\pi T}{T} \frac{\tau}{2})}{k \frac{2\pi T}{T} \frac{\tau}{2}} = \frac{\sin(k \pi/2)}{k \pi/4}$

$\tau = \frac{T}{4}$

$B_1 = 0,45$	$B_2 = 0,32$	$B_3 = 0,15$	$B_4 = 0$
$B_5 = -0,09$	$B_6 = -0,1$	$B_7 = -0,06$	$B_8 = 0$

$B_k = 0,5 \frac{\sin(k \pi/2)}{k \pi/4}$

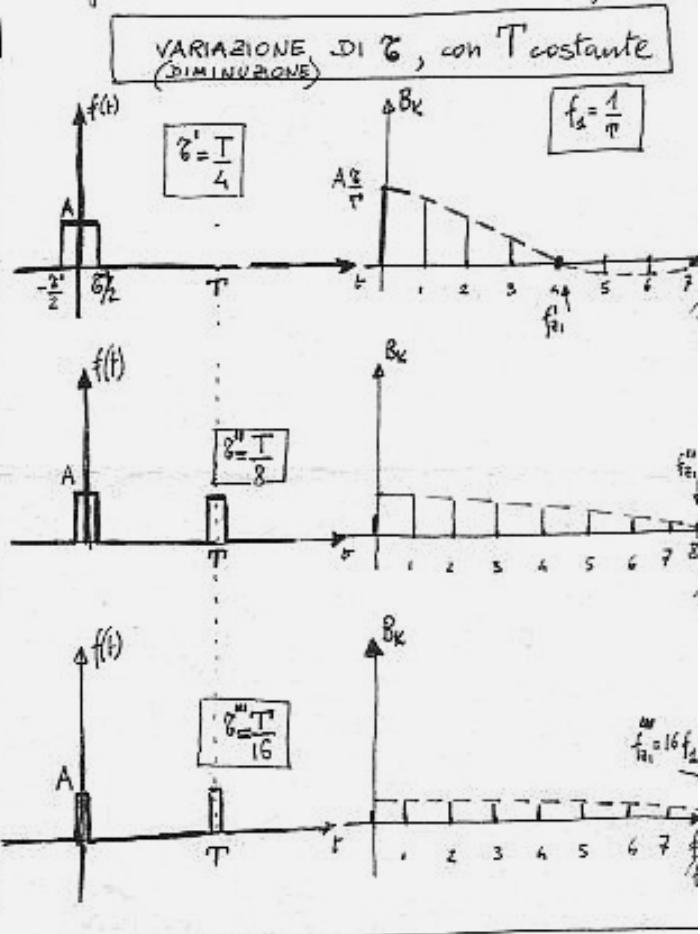
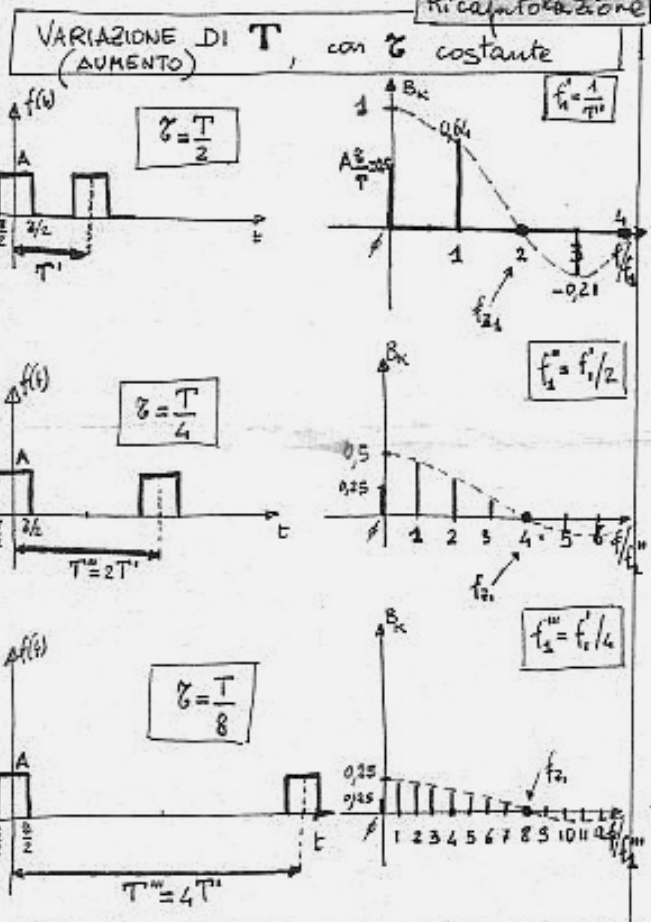
$f_1^{II} = \frac{1}{2T^{II}}$



Il 1° lobo si annulla per $k=4$ e contiene 3 righe; l'altezza delle righe si è ridotta e la distanza tra le righe si è dimezzata. ($\Delta f = 500[\text{Hz}]$)

Se modifichiamo il valore di ζ ^(diminuzione), mantenendo costante T , succede che il duty-cycle $\left(\frac{\zeta}{T}\right)$ si riduce, ma non cambia la distanza tra le righe, per cui lo spettro rimane sempre a righe. L'involuppo è sempre del tipo $\frac{\sin x}{x}$; ciò che cambia è l'altezza delle righe (diminuzione) e l'ampiezza dei lobi, soprattutto del primo. Infatti gli zeri dell'involuppo si hanno per i valori di f pari a $\frac{k}{\zeta}$ ($\frac{1}{\zeta}, \frac{2}{\zeta}, \frac{3}{\zeta}, \dots$) e se ζ diminuisce, ovviamente questi zeri si spostano verso destra, sull'asse f .

Ricapitolazione



L'espressione dei B_k è $\left[2A \frac{\zeta}{T} \right] \frac{\sin(k\pi \frac{\zeta}{T})}{k\pi \frac{\zeta}{T}}$

Come si vede, la distanza tra le righe diminuisce, mentre il primo zero dell'involuppo cade nello stesso punto dell'asse f . Lo spettro tende a diventare continuo, per $T \rightarrow \infty$.

La distanza tra le righe non cambia (il valore di $f_1 = \frac{1}{T}$ è costante), ma cambia il valore degli zeri dell'involuppo ($f_2 = \frac{1}{\zeta}$); f_2 cade sempre più a destra e il primo lobo contiene perciò più righe. Lo spettro rimane a righe.