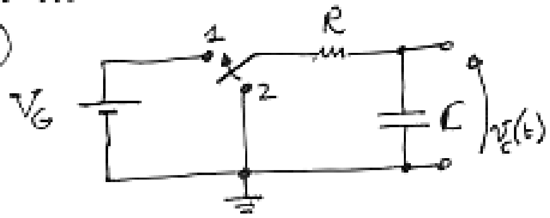
IL BIPOLO RC

In terza abbiamo visto come risponde a un'eccitazione a gradino di tensione (regime transitorio di carica e/o scarica) e a un'eccitazione a onda quadra. Quest'anno abbiamo studiato la risposta alla sinusoide, con il metodo grafico di Bode.
Vedremo successivamente come risponde a un impulso di tensione δ a una qualunque eccitazione, mediante il metodo delle $\mathcal{L}$-trasformate di Laplace.
Importante è comunque saper descrivere il comportamento di tale bipolo sia nel dominio del tempo che ~~nel~~ dominio della frequenza, evidenziandone le correlazioni.

ECCITAZIONE A GRADINO DI TENSIONE

1)

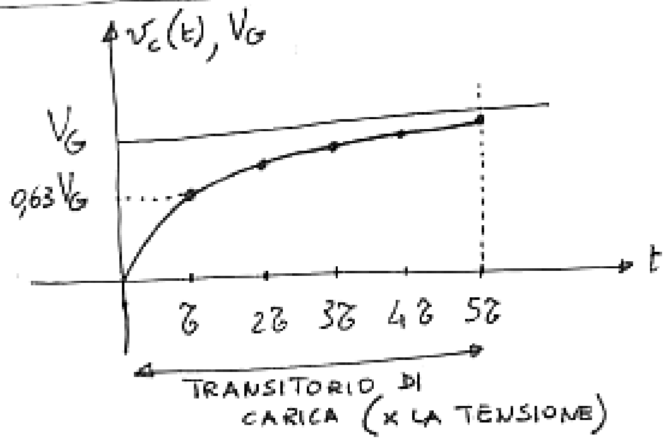


Se al tempo $t=0$ porto l'interruttore in posizione 1, sottopongo improvvisamente il bipolo RC alla tensione continua V_G. Se consideriamo per semplicità il condensatore inizialmente scarico, la legge con cui varia la tensione ai suoi capi è

$$\boxed{v_C(t) = V_G\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Parametro caratteristico di questa equazione è $\tau = RC \triangleq$ costante di tempo

τ è il numero di secondi dopo il quale v_C ha raggiunto il 63% del valore finale, che è V_G.



infatti $v_C(t=\tau) = V_G\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) =$
$= V_G\left(1 - e^{-1}\right) =$
$= V_G\left(1 - \frac{1}{e}\right) \cong 0{,}63 V_G$

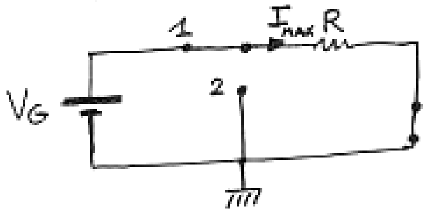
$$\begin{cases} v_C(t=2\tau) = 0{,}86\, V_G \\ v_C(t=3\tau) = 0{,}95\, V_G \\ \vdots \\ v_C(t=5\tau) = 0{,}993\, V_G \end{cases}$$

Dopo 5τ, il transitorio è virtualmente finito, essendo $v_C \simeq V_G$

Mentre la tensione sale, la corrente di carica scende esponenzialmente.

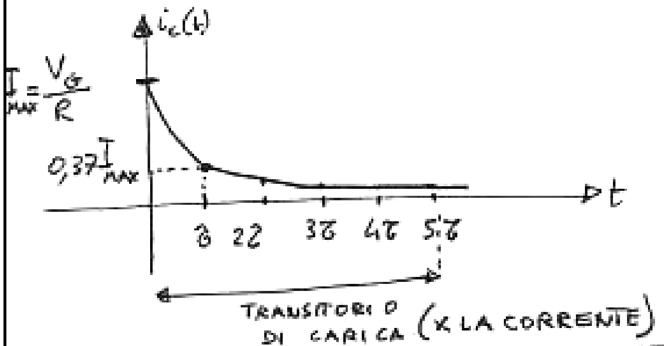
Infatti la corrente è max all'istante $t = 0^+$, ovvero portato l'interruttore in posizione 1, dato che il condensatore scarico, nei primissimi istanti, si comporta come un cortocircuito, mentre a transitorio finito sarà come un circuito aperto.

Perciò all'istante $t = 0^+$ la corrente nel circuito vale $I_{MAX} = \frac{V_G}{R}$.



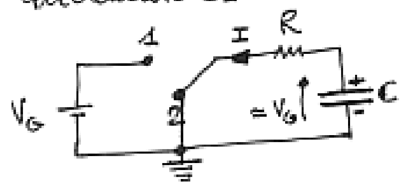
Man mano che il condensatore si carica e la tensione sulle sue armature sale, la resistenza del Condensatore aumenta e la corrente diminuisce, secondo la legge $\boxed{i_C(t) = I_{MAX} \cdot e^{-t/\tau}}$

$$\begin{cases} i_C(t=0^-) = 0 \\ i_C(t=0^+) = I_{MAX} \\ i_C(t=\tau) \cong 0{,}37\, I_{MAX} \\ i_C(t=2\tau) \simeq 0{,}14\, I_{MAX} \\ \vdots \\ i_C(t=5\tau) = 0{,}007\, I_{MAX} \end{cases}$$



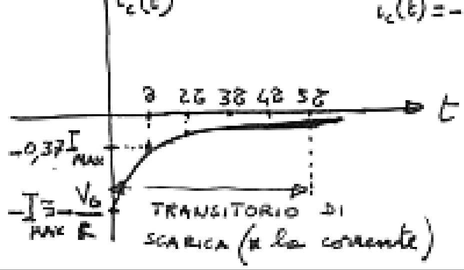
$\boxed{\text{τ è il tempo dopo il quale la corrente nel Condensatore è scesa al 37\% del valore iniziale, massimo}}$

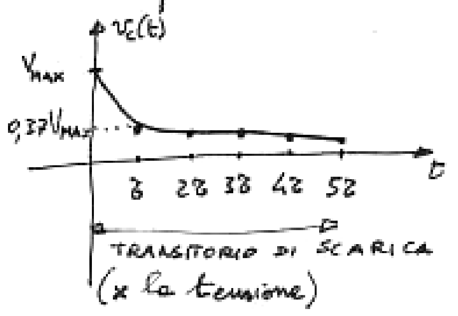
Quando porto il deviatore in posizione 2, avviene la scarica del condensatore. Se è passato sufficiente tempo, cioè se il condensatore si è caricato completamente, allora la d.d.p. ai suoi capi è $\simeq V_G$. Perciò la corrente di scarica è max all'inizio, e vale $I_{MAX} \cong -\frac{V_G}{R}$



(Segno − perché circola in verso opposto a quella di carica!)

$i_c(t) = -I_{MAX} \cdot e^{-t/\tau}$





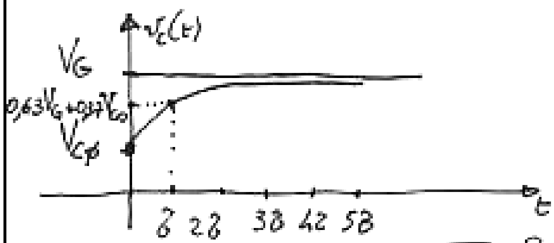
Se invece il Condensatore, durante la carica, parte da un valore iniziale non nullo, cioè mantiene una carica elettrica residua e la d.d.p. ai suoi capi è V_{C0}, la legge di carica è $v_C(t) \equiv v_{ist}(t) = V_{FIN} - (V_{FIN} - V_{INIZ})e^{-t/\tau}$

(istantaneo) dove $V_{FIN} \equiv V_G$
$V_{INIZ} \equiv V_{C0}$

cioè $v_C(t) = V_G - (V_G - V_{C0})e^{-t/\tau}$

come si vede, se $t = 0$ $v_C(0) = V_G - (V_G - V_{C0}) = V_{C0}$ ← valore iniziale

se $t = \tau$ $v_C(\tau) = V_G - (V_G - V_{C0})e^{-1} = V_G\left(1 - \frac{1}{e}\right) + V_{C0} \cdot \frac{1}{e} \cong 0{,}63V_G + 0{,}37V_{C0}$



In questo caso quindi la carica è più veloce

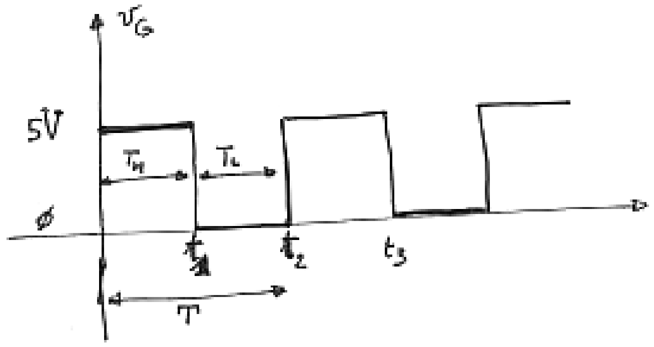
Analizzando τ e i grafici si deduce che quanto più piccola è τ, tanto più rapida sarà la carica. Infatti se $RC = 1$ [ms], $v_C(t)$ sarà circa $\simeq V_G$ dopo 5 [ms], ma se $RC = 1$ [s], la carica finirà solo dopo 5 [sec]!

Quindi per avere SISTEMA VELOCE → τ piccola
SISTEMA LENTO → τ grande.

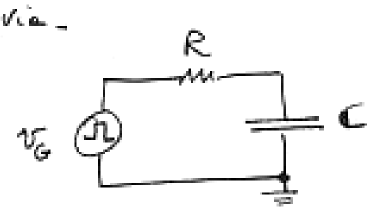
---

2) $\boxed{\text{sottoponendo RC a un'onda quadra TTL unipolare, } (0, +5V)}$

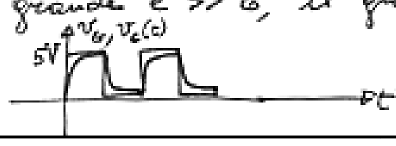
$\delta = 50\%$
$\left(T_H = T_L = \frac{T}{2}\right)$



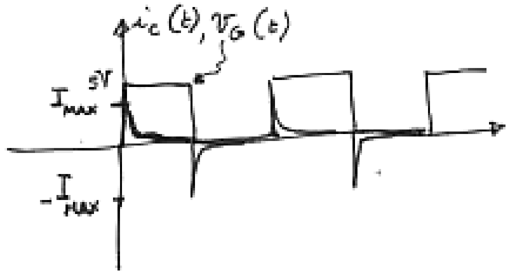
si ottiene una carica, seguita da una scarica e così via.



L'andamento di $v_C(t)$ dipende dal confronto tra T_H e τ: se $T_H \gg \tau$, durante il semiperiodo T_H il condensatore potrà caricarsi velocemente e completamente, se invece $T_H = \tau$, all'istante t_1 $v_C(t_1)$ sarà uguale al 63% di 5V. Se $T_H \ll \tau$, il condensatore non riuscirà a caricarsi, neppure parzialmente. Perciò in bassa frequenza, con T_H grande e $\gg \tau$, il grafico di v_C sarà quasi uguale a $v_G(t)$.



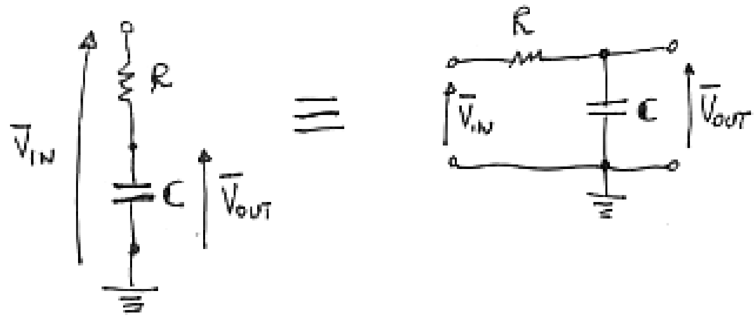
Più veloce è il sistema (piccola τ) e più bassa è la frequenza, meno differenze ci saranno tra le 2 curve. (A un certo punto non si vedrà più la salita esponenziale di v_C, le due curve coincideranno)
In tale situazione la corrente assume un andamento impulsivo:



cioè la corrente è sempre nulla, tranne che in corrispondenza dei fronti di salita e di discesa della tensione. Infatti la relazione esistente tra corrente e tensione in un condensatore afferma proprio che c'è corrente solo se c'è una variazione di tensione ai capi delle armature $i_C = C \dfrac{\Delta V_C}{\Delta t}$; facendo tendere a zero le variazioni ΔV e Δt, si passa al concetto di variazioni infinitesime e perciò di derivata: la corrente è proporzionale alla derivata della tensione applicata $i_C = C \dfrac{dv(t)}{dt}$.

---

(3) Nel dominio della frequenza il bipolo **RC** si comporta come un circuito selettivo nei confronti di f, cioè come un filtro. Se consideriamo $\overline{V}_{IN}$ la tensione applicata a tutto il bipolo e $\overline{V}_{OUT}$ la tensione ai capi di **C**, e se studiamo la risposta al regime sinusoidale, vediamo come tutto dipenda, di nuovo, dal parametro RC!



Infatti $\dfrac{1}{RC}$ è proprio la pulsazione di taglio, ovvero la pulsazione che separa la BANDA PASSANTE DA QUELLA ATTENUATA.

All'interno della B. PASSANTE, la $\overline{V}_{OUT}$ è quasi uguale alla $\overline{V}_{IN}$, IN BANDA ATTENUATA invece la $\overline{V}_{OUT}$ è sempre più piccola all'aumentare di ω. Il circuito è perciò un FILTRO PASSA-BASSO.
Oltre ad attenuare l'ampiezza della tensione, il circuito ne varia anche la fase: $\overline{V}_{OUT}$ è sempre in ritardo su $\overline{V}_{IN}$. In H.F. $|V_{OUT}| \simeq \emptyset$ e
$\angle V_{OUT} \simeq \angle V_{IN} - 90°$

Se visualizziamo all'oscilloscopio le due tensioni su 2 canali e ci poniamo alla frequenza di taglio $f_t = \frac{\omega_t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$ (regolando opportunamente il Gen. di funzioni), vediamo appunto che l'ampiezza di picco della $\bar{V}_{OUT} \equiv \bar{V}_C$ è $\simeq 70\% \ \bar{V}_{IN}$ e il grafico di $\bar{V}_{OUT}$ è spostato a destra, cioè in ritardo, di $\simeq 45°$. Se aumentiamo gradualmente la f, vedremo il grafico di $\bar{V}_{OUT}$ rimpicciolirsi sempre più e spostarsi verso destra fino a un max di 90° di sfasamento.

Allora come si legano i due discorsi? (DOMINIO DEL TEMPO e DOMINIO DELLA FREQUENZA)

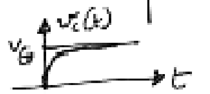
Tutto è legato al prodotto RC!

Più $\tau = RC$ è piccolo, più il circuito è veloce, abbiamo detto. (Cioè risponde velocemente all'eccitazione e la riproduce fedelmente)

Ma più τ è piccolo, più $f_t = \frac{1}{2\pi\tau}$ è grande, cioè più alta è la frequenza di taglio e più larga è la BANDA PASSANTE (nel caso ovviamente del PASSA-BASSO)

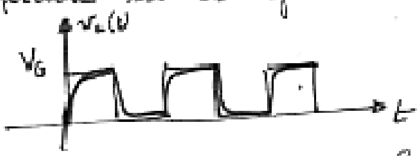
Quindi sono discorsi <u>equivalenti</u> i seguenti:

1) Il circuito è veloce.
2) Il transitorio di carica e scarica è breve.
3) La risposta al gradino è aperiodica (la v_C raggiunge velocemente la v_G, senza oscillazioni)



4) La risposta all'impulso è anch'essa aperiodica: in uscita ho un impulso che va a zero velocemente, senza oscillazioni.

5) La risposta all'onda quadra è circa un'onda quadra (piccole differenze in corrispondenza dei fronti di salita e di discesa)



6) Il circuito ha un polo in H.F.
7) La BANDA PASSANTE è LARGA
8) La frequenza di taglio è elevata.
9) La risposta alla sinusoide è praticamente la stessa sinusoide: se f_t è alta,

e se $f_{IN} < f_t$, allora la sinusoide che c'è ai capi del condensatore è praticamente uguale, in modulo e fase, alla tensione d'ingresso (ai capi di R e C).

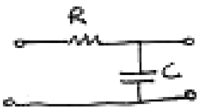
— o — o — o —

Definizioni della frequenza di taglio: $f_t = \frac{1}{2\pi RC}$

1) f_t è il limite tra BANDA PASSANTE e B. ATTENUATA
2) f_t è il reciproco della costante di tempo τ, diviso per 2π.
3) f_t è quel valore di f per cui $\begin{cases} |V_{OUT}| \cong 70\% \, |V_{IN}| \text{ e} \\ \angle V_{OUT} \cong \angle V_{IN} - 45° \end{cases}$
4) f_t è il valore di f che annulla il denominatore della f. di trasferimento $\bar{G} \triangleq \frac{\bar{V}_{OUT}}{\bar{V}_{IN}}$
5) f_t è il polo di $\bar{G}$.
6) f_t è il valore di f per cui $|G| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7$ (vedi p. 3)
7) f_t è il valore di f per cui $|Z_c| = R$ $\left(|Z_c| = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow |Z_c(\omega_t)| = \frac{1}{\frac{1}{RC} C} = R \right)$

— o — o —

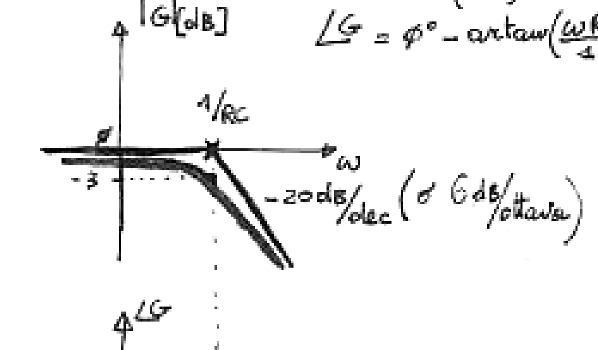
PASSA - BASSO

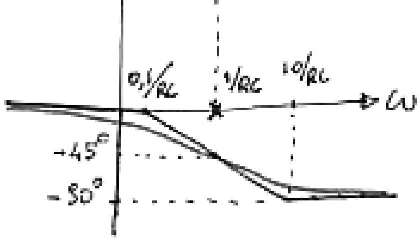


$\bar{G} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

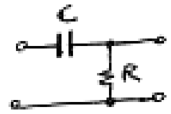
$|G| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

$\angle G = 0° - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right)$





PASSA - ALTO



$\bar{G} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

$|G| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

$\angle G = 90° - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right)$