

Nel corso del 3° anno abbiamo studiato i circuiti puramente resistivi e abbiamo calcolato la tensione tra 2 punti qualunque, le correnti nei vari rami, le cadute di tensione sulle varie R utilizzando le **Leggi di Kirchhoff**, il **Principio di sovrapposizione degli effetti**, il **Teorema di Thevenin**.

Abbiamo visto anche il comportamento in **transitorio** e a **regime** del Condensatore, nonché le relazioni tra $v(t)$ e $i(t)$.

Quest'anno vedremo cosa succede in un circuito RLC collegando in IN un generatore di tensione / corrente sinusoidale.

Si applica la **Legge di Ohm generalizzata**: $\bar{V} = \bar{Z} * \bar{I}$ e si utilizza il **FORMALISMO COMPLESSO**, cioè l'associazione di un vettore complesso a una sinusoidale, con le relative operazioni vettoriali complesse.

I parametri caratteristici di una sinusoidale possono essere molteplici, ma legati a queste 3 grandezze:

1. AMPIEZZA

- Valore max $V_{\max} \equiv V_p$
- Valore efficace $V_{\text{eff}} = V_{\max} / \sqrt{2}$
- Valor medio (in un semiperiodo) $V_m = 2 V_{\max} / \pi$

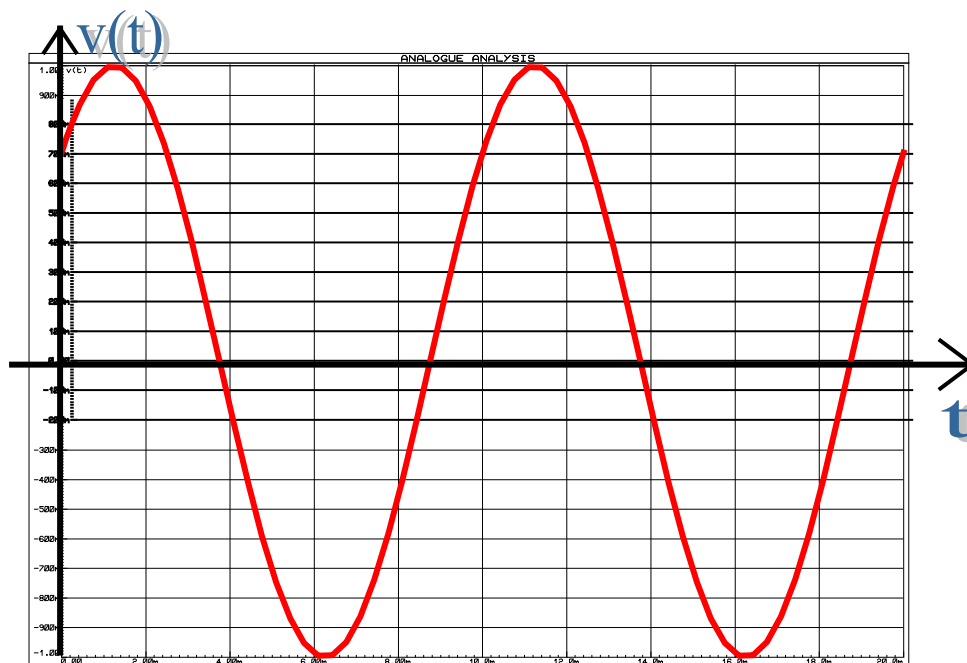
2. PERIODICITA'

- Periodo T [sec] $T = 1 / f = 2\pi / \omega$
- Frequenza f [Hz] $\omega = 2\pi f$
- Pulsazione ω [rad / sec]

3. FASE [] in gradi o radianti []

Esempio: $v(t) = 1 \sin(2\pi 100 t + 45^\circ)$ [V]

sinusoidale con $V_{\max} = 1$ [V], frequenza $f = 100$ [Hz], Periodo $T = 10$ [ms], fase iniziale = 45° di **anticipo**, ed essendo 45° pari a $360^\circ / 8$, ciò significa che la partenza della sinusoidale avviene $T / 8 = 1,25$ [ms] prima dell'istante $t = 0$.



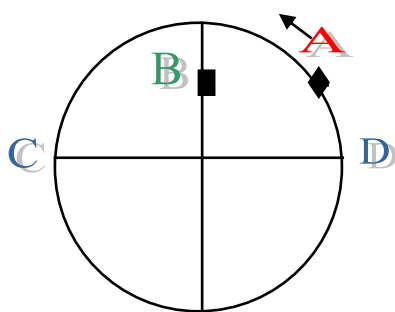
Per definire ω , bisogna ricordare il legame tra moto circolare uniforme e moto armonico \equiv sinusoidale / cosinusoidale

Consideriamo un punto **A** che si muova di moto **circolare** uniforme su una circonferenza, partendo dal punto **D** all'istante $t = 0$: la sua proiezione sul **diametro orizzontale** si muoverà verso il centro con moto **cosinusoidale**.

Infatti la distanza dal centro è inizialmente massima e pari al raggio del cerchio “trigonometrico” (il valore del raggio è posto per convenzione = 1).

Quando il punto sulla circonferenza ha fatto un quarto di giro ($90^\circ \equiv \pi/2$) la sua proiezione coincide col centro, cioè distanza 0, quando ha fatto mezzo giro ($180^\circ \equiv \pi$), il punto proiezione si trova alla distanza max negativa dal centro e così via.

Il punto **B** proiezione sul **diametro verticale** si muove invece di moto **sinusoidale**.



- Se p.e. il punto **A** ruota sulla circonferenza, partendo da **D**, con velocità angolare $\omega = 200 \pi$ [rad /sec], significa che compie 100 giri in 1 [sec], mentre il punto **B** percorre 100 volte il diametro verticale partendo dal centro.
- La sinusoide, che descrive la distanza di **B** rispetto al centro del cerchio, ha quindi una frequenza di 100 [Hz] (100 cicli in 1 sec) e Periodo di 10 [ms].
- In altre parole, in 10 [ms], **A** parte da **D** e ritorna in **D**, **B** parte dal centro, va su lungo il raggio, torna giù dalla parte opposta e ritorna al centro.
- Nei circuiti elettrici ad avere andamento sinusoidale è una tensione, una corrente o una potenza: la frequenza indica quante volte in 1 secondo viene raggiunto il valore max (e il minimo).
- Moltiplicando f per 2π , determino la **pulsazione** ω , cioè la velocità con cui la forma d'onda percorre l'asse ωt (tarato in gradi sessagesimali o in radianti), descrivendo un ciclo.
- Ricordiamo la definizione di **radiante**: angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio, per cui:

$$1 \text{ [rad]} = 360^\circ / 2\pi \approx 57^\circ$$

ASSOCIAZIONE TRA VETTORE COMPLESSO E SINUSOIDE

SINUSOIDE

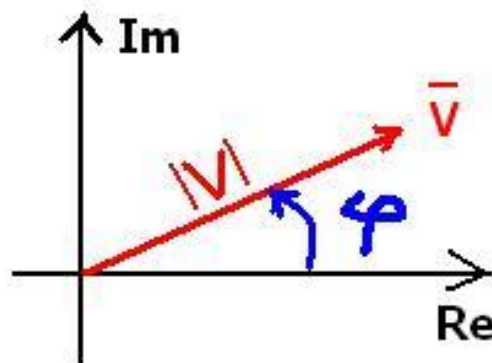
$$v(t) = V_{\max} \sin (2\pi f t \pm \varphi) \quad [V]$$

VETTORE COMPLESSO

$$\bar{V} = |V| e^{j\varphi} \quad [V]$$

ASSOCIAMO :

- IL MODULO DEL VETTORE AL **VALORE EFFICACE** ($V_{\max} / \sqrt{2}$) DELLA SINUSOIDE
- LA FASE DEL VETTORE (angolo formato dal vettore con l'asse Reale)
ALLA FASE INIZIALE DELLA SINUSOIDE



La pulsazione ω deve essere specificata a parte e si suppone che non varii nel passaggio del segnale attraverso il circuito.

Infatti in un circuito RLC passivo , data in IN una tensione / corrente sinusoidale avente una certa pulsazione ,si otterrà in OUT una tensione/corrente della stessa pulsazione, ma modificata, in genere, in ampiezza e fase .

A sfasare tensione e corrente tra loro e ,di conseguenza, grandezza in OUT rispetto a grandezza in IN, sono proprio gli elementi reattivi C e L , o meglio i fenomeni fisici che avvengono al loro interno :

- nel Condensatore , l'accumulo di cariche crea un Campo Elettrico che polarizza le molecole dell'isolante posto tra le armature e tale polarizzazione determina la risposta + o - lenta del C alle sollecitazioni elettriche in IN . (Si può dire che il C si oppone alle variazioni di tensione)
- nell ' induttore , la corrente " primaria" scorrendo nella bobina crea un Campo Magnetico che induce una corrente " secondaria" , che scorre in verso opposto alla corrente primaria. (L si oppone alle variazioni di corrente)

IMPEDENZA

Dato un bipolo, ne definiamo l'impedenza \bar{Z} come la **resistenza al variare della frequenza** :

➤ $Z_R = R$ non varia con la frequenza (non vero in HF)

➤ $\bar{Z}_C = 1 / j\omega C = -j 1/\omega C$ dove $X_C = - 1/\omega C$ è la **Reattanza Capacitiva**

varia in modo estremo :

- in continua C è un circuito aperto (resistenza infinita)
- in HF C è un corto circuito (resistenza zero)

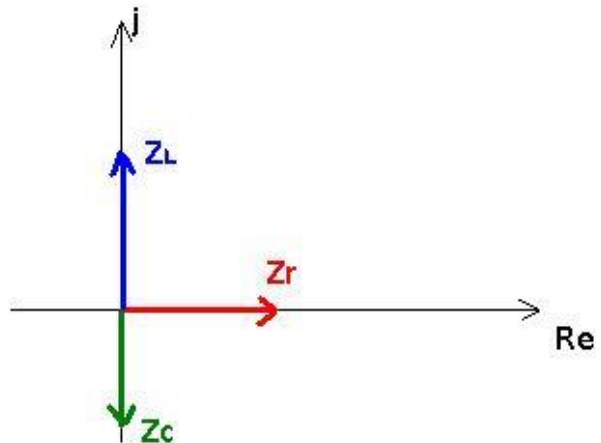
➤ $\bar{Z}_L = j\omega L$ dove $X_L = \omega L$ è la **Reattanza Induttiva**

varia in modo estremo :

- in continua L è un corto circuito (resistenza zero)
- in HF L è un circuito aperto (resistenza infinita)

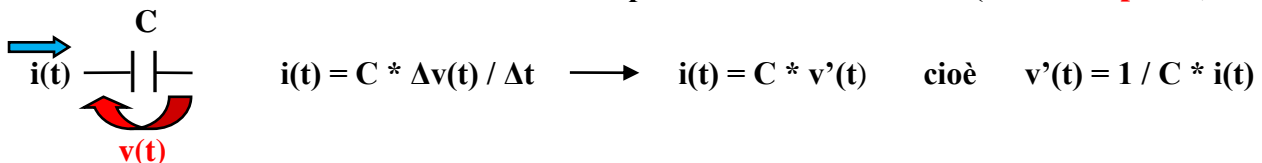
A queste impedenze possiamo associare dei vettori complessi :

- ◆ Z_R è reale (perciò giace su asse Re)
- ◆ \bar{Z}_C e \bar{Z}_L sono puramente immaginarie (giacciono su asse j)

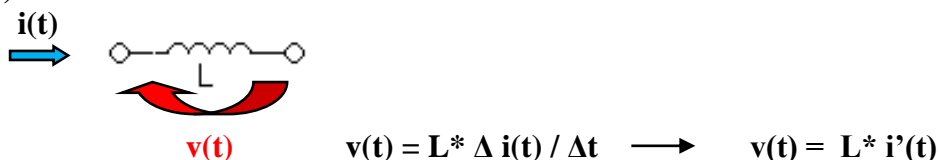


\bar{Z}_C e \bar{Z}_L si ricavano a partire dalle relazioni nel dominio del tempo tra $i(t)$ e $v(t)$:

- ◆ nel **CONDENSATORE**, la corrente è proporzionale alla derivata rispetto al tempo della tensione ; in altre parole , in un C c'è corrente solo se c'è **variazione** di tensione , per cui in regime di **tensione continua** non c'è corrente e il C ha perciò resistenza infinita (**circuito aperto**).



- ◆ nell' **INDUTTORE**, la tensione è proporzionale alla derivata rispetto al tempo della corrente ; in altre parole , in un L c'è tensione solo se c'è **variazione** di corrente , per cui in regime di **corrente continua** non c'è tensione ai capi dell' induttore, che ha perciò resistenza nulla (**corto circuito**).



Queste 2 relazioni **integro / differenziali**, valide nel **DOMINIO DEL TEMPO (DDT)** :

$$\blacksquare v_c'(t) = 1 / C * i(t)$$

$$\blacksquare v_L(t) = L * i'(t)$$

possono essere trasportate nel **DOMINIO DELLA FREQUENZA / PULSAZIONE (DDF)** applicando la teoria delle TRASFORMATE DI FOURIER, in particolare i 2 teoremi

- Teorema della Derivata
- Teorema dell' Integrale

◆ derivare una grandezza rispetto al tempo, nel DDT, equivale a **moltiplicare** la sua Trasformata per $j\omega$

◆ integrare una grandezza rispetto al tempo, nel DDT, equivale a **dividere** la sua Trasformata per $j\omega$

$$j\omega \bar{V}_c(j\omega) = 1 / C * \bar{I}(j\omega)$$

$$\bar{V}_L(j\omega) = L * j\omega * \bar{I}(j\omega)$$

Facendo il rapporto tra \bar{V} e \bar{I} otteniamo :

$$\bar{V}_c(j\omega) / \bar{I}(j\omega) \equiv \bar{Z}_c(j\omega) = 1 / j\omega C$$

$$\bar{V}_L(j\omega) / \bar{I}(j\omega) \equiv \bar{Z}_L(j\omega) = j\omega L$$

FILTRI - DEFINIZIONI

1.

- Un filtro è un circuito elettrico **selettivo** nei confronti della frequenza dei segnali applicati in ingresso.
- In altre parole, segnali di diversa frequenza non sono elaborati allo stesso modo.
- Si individua una Banda di frequenze, detta **Banda Passante**, in cui il **Modulo** del Guadagno di tensione del filtro, cioè il **rapporto tra $|V_{out}|$ e $|V_{in}|$** , è quasi costante (in realtà compreso tra G_{max} e $0.7G_{max}$).
- Al di fuori di questa banda, i segnali sono attenuati, in misura sempre maggiore quanto più ci si allontana dalla B.Passante.
- I segnali sono altresì sfasati, fuori dalla Banda Passante, cioè la tensione V_{out} sarà in **ritardo** o in **anticipo** sulla V_{in} , a seconda del tipo di filtro.

2. Ci sono 2 categorie di Filtri :

- F. Passivi (composti solo da R, L, C) : $G_{max} = 1$ (0 dB)
- F. Attivi (c'è anche un amplificatore, p.e. un A.O.) : $G_{max} > 1$

Ogni categoria è composta da 4 tipi di filtri :

- F. Passa - basso
- F. Passa - alto
- F. Passa – banda
- F. Elimina – banda (NOTCH Filter)

3. L'**Ordine** di un filtro dipende dal n° di componenti **reattivi indipendenti** presenti nel circuito.

4. Frequenza di taglio

(per Filtri di qualunque Ordine) :

- E' la frequenza che separa la Banda Passante (Banda Chiara) dalla Banda Attenuata (Banda Scura)

(per Filtri del 1° Ordine) :

- E' la frequenza per cui il Modulo del Guadagno si riduce **al 70%** del valore max (o si riduce **del 30%**)
- E' la frequenza per cui il Modulo del Guadagno si riduce **di 3 dB** rispetto al valore max
Per $f = f_t \rightarrow |G| = |G_{max}| / \sqrt{2} = 0.7 |G_{max}|$ oppure $|G|_{dB} = 20 \text{Log} |G_{max}| - 3$ [dB]
- E' la frequenza per cui la Fase del Guadagno vale $\pm 45^\circ$ (anticipo [**segno +**] per il Passa- Alto, ritardo [**segno -**] per il Passa-Basso)
- E' la frequenza per cui il modulo della reattanza capacitiva / induttiva uguaglia la resistenza, cioè $R = 2\pi f * L = 1/2\pi f * C$

$$5. \text{ Impedenza} \rightarrow \bar{Z} = \bar{V} / \bar{I} = \underset{\text{Resistenza}}{\bar{R}} + j \underset{\text{Reattanza}}{\bar{X}}$$

Resistenza R : rapporto tra tensione e corrente in un Resistore . E' un n° Reale , con qualunque tipo di regime . I componenti resistivi possono solo dissipare energia elettrica .

Reattanza X : è la resistenza al variare della frequenza dei componenti reattivi , cioè Induttori e Condensatori .

I componenti reattivi non dissipano energia ma la conservano (energia del campo elettrostatico per il condensatore, del campo magnetico per l'induttore) .

Induttori e condensatori hanno un'impedenza reattiva, cioè puramente immaginaria

$$\bar{Z}_L = j\omega L \quad \bar{Z}_C = 1 / j\omega C$$

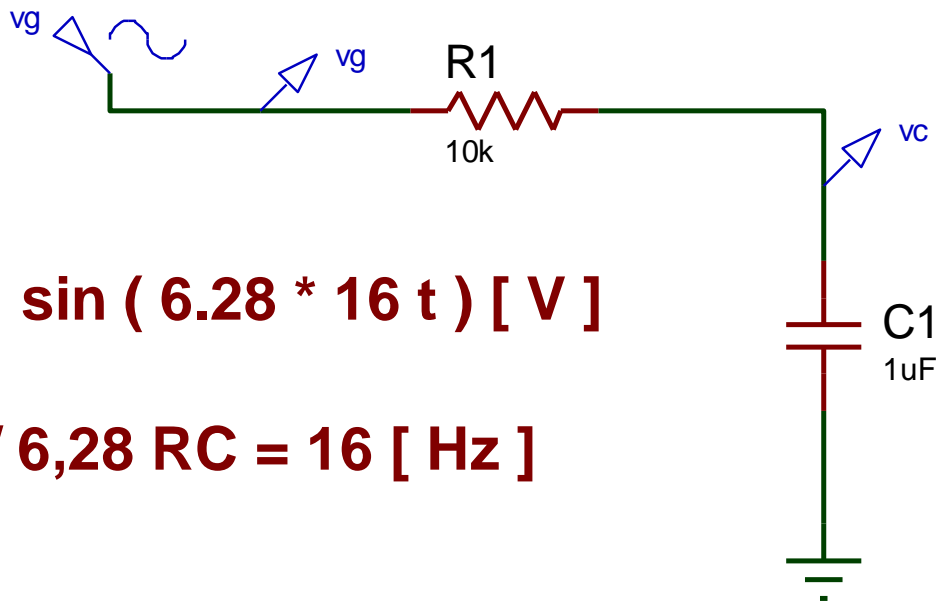
il che significa che l'ampiezza del rapporto tra \bar{V} e \bar{I} dipende dalla frequenza di lavoro e che \bar{V} e \bar{I} sono sfasate di 90° (\bar{V} in anticipo su \bar{I} nell' Induttore , \bar{V} in ritardo su \bar{I} nel Condensatore)

6. Indipendenza : 2 o più componenti sono indipendenti se non sono direttamente in serie o in parallelo ;

infatti 2 induttori in serie sono equivalenti a un unico induttore : $L_{eq} = L1+L2$

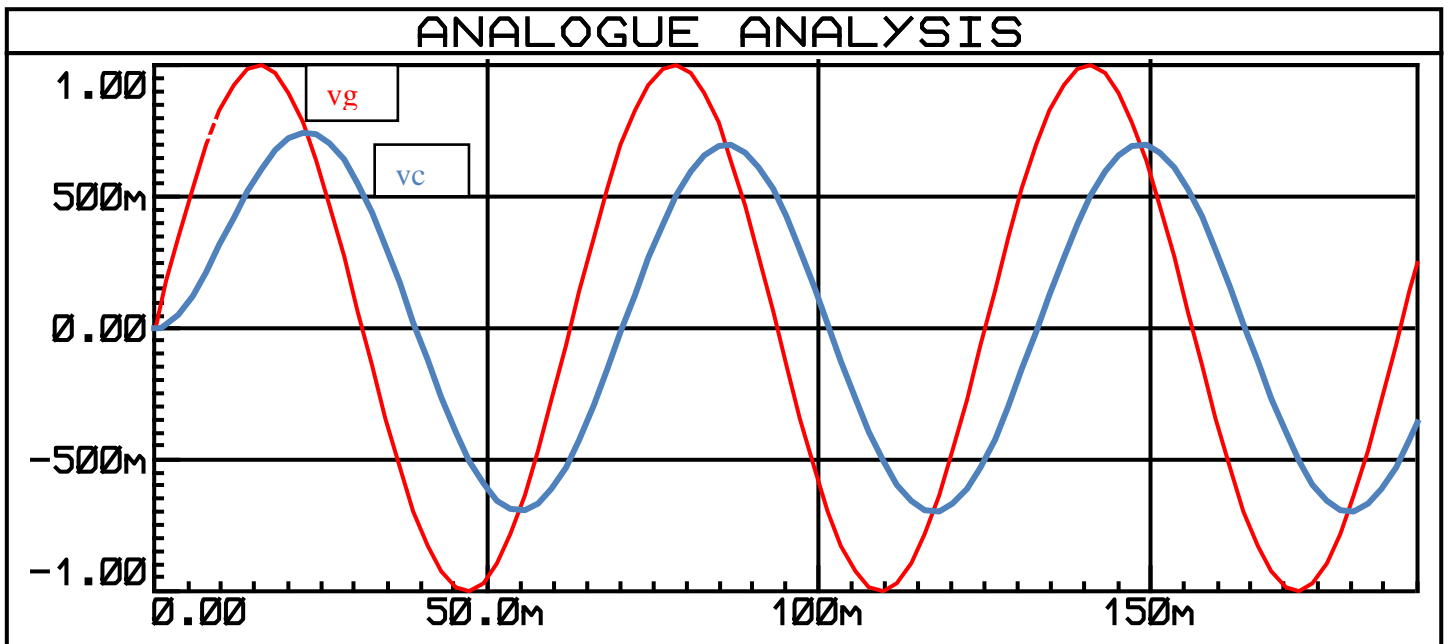
mentre 2 condensatori in parallelo sono equivalenti a un unico condensatore : $C_{eq} = C1+C2$

FILTRO RC PASSA - BASSO PASSIVO, 1° ORDINE



$$v_g = 1 \sin (6.28 * 16 t) [V]$$

$$f_t = 1 / 6,28 RC = 16 [Hz]$$



$$\bar{G}(j\omega) = \bar{V}_{out} / \bar{V}_{in} = \bar{Z}_c / (R + \bar{Z}_c) = 1 / 1 + j\omega RC$$

$$|G| = 1 / \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \quad |G(j0)| = 1 \rightarrow 0 [dB]$$

$$G(j\infty) = 0 \rightarrow -\infty [dB] \quad |G(j\omega_t)| = 1 / \sqrt{2} \rightarrow -3 [dB]$$

$$\text{Fase di } G = - \arctan (\omega RC)$$

Fase (per $\omega = 0$) = 0°
Fase (per $\omega \rightarrow \infty$) = -90°
Fase (per $\omega = \omega_t$) = -45°

