Gruppo 8 *Locarno, Fenu*
29/01/14

Serie di Fourier

Introduzione:
Ogni segnale periodico può essere rappresentato da una somma infinita convergente di seni e coseni dalla frequenza multipla della frequenza del segnale che si vuole ottenere e con un'ampiezza che, sul lungo termine, tende a diminuire fino a zero.
La formula fondamentale che esprime questa importante relazione è la seguente:

$$f(t)=C_0+\sum_{K=1}^{+\infty} A_k\cdot\sin(K\omega t)+\sum_{K=1}^{+\infty} B_k\cdot\cos(K\omega t)$$

Dove C_0 è il termine costante (valor medio o offset) e A_k e B_k sono i coefficienti di Fourier. Questi valori sono calcolati come segue

$$C_0=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(t)\,dt$$ dove T è il periodo del segnale

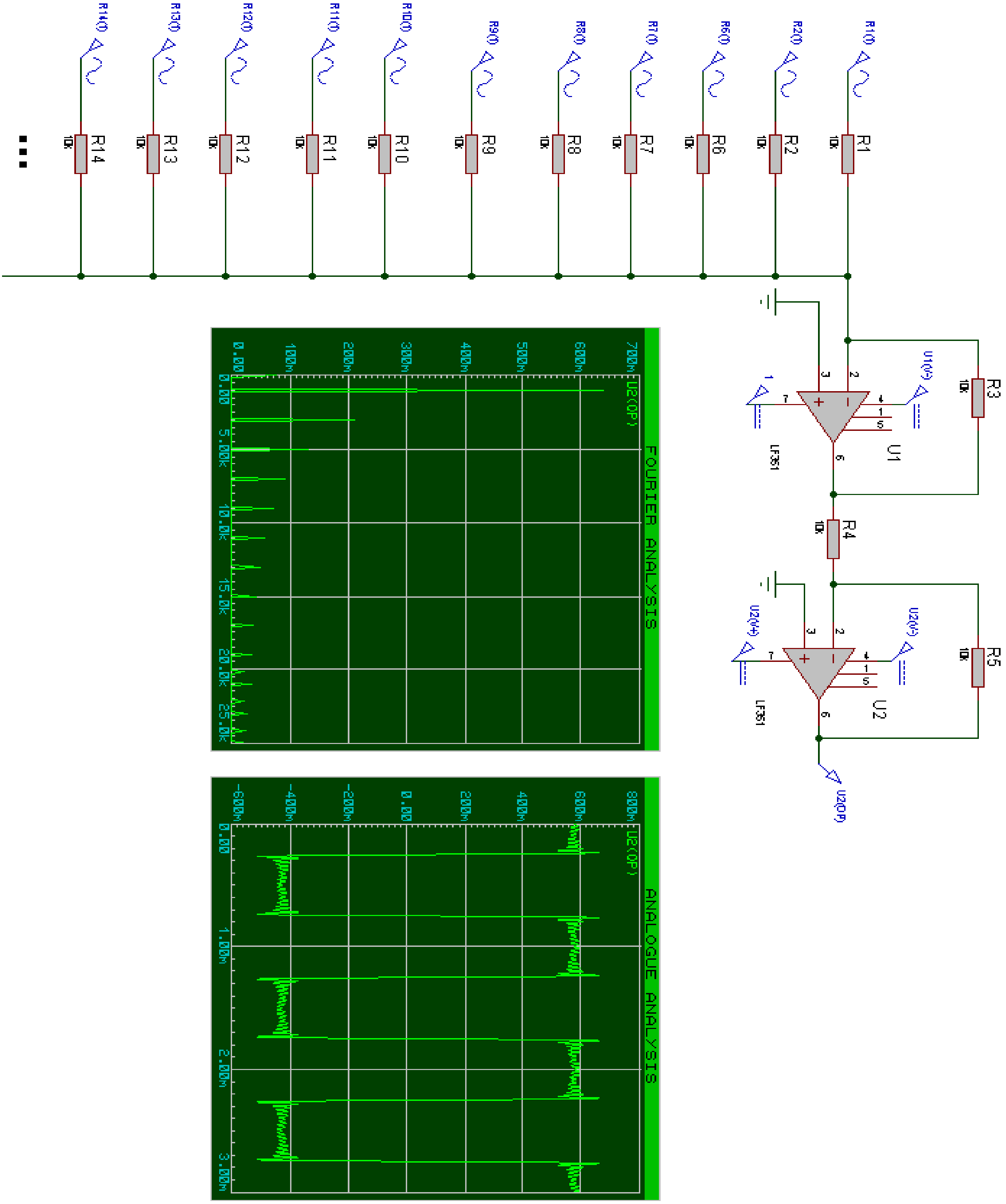
$$A_k=\frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\sin(K\omega t)\,dt$$ dove $\frac{2}{T}$ è il semiperiodo del segnale

$$B_k=\frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\cos(K\omega t)\,dt$$ dove $\frac{2}{T}$ è il semiperiodo del segnale

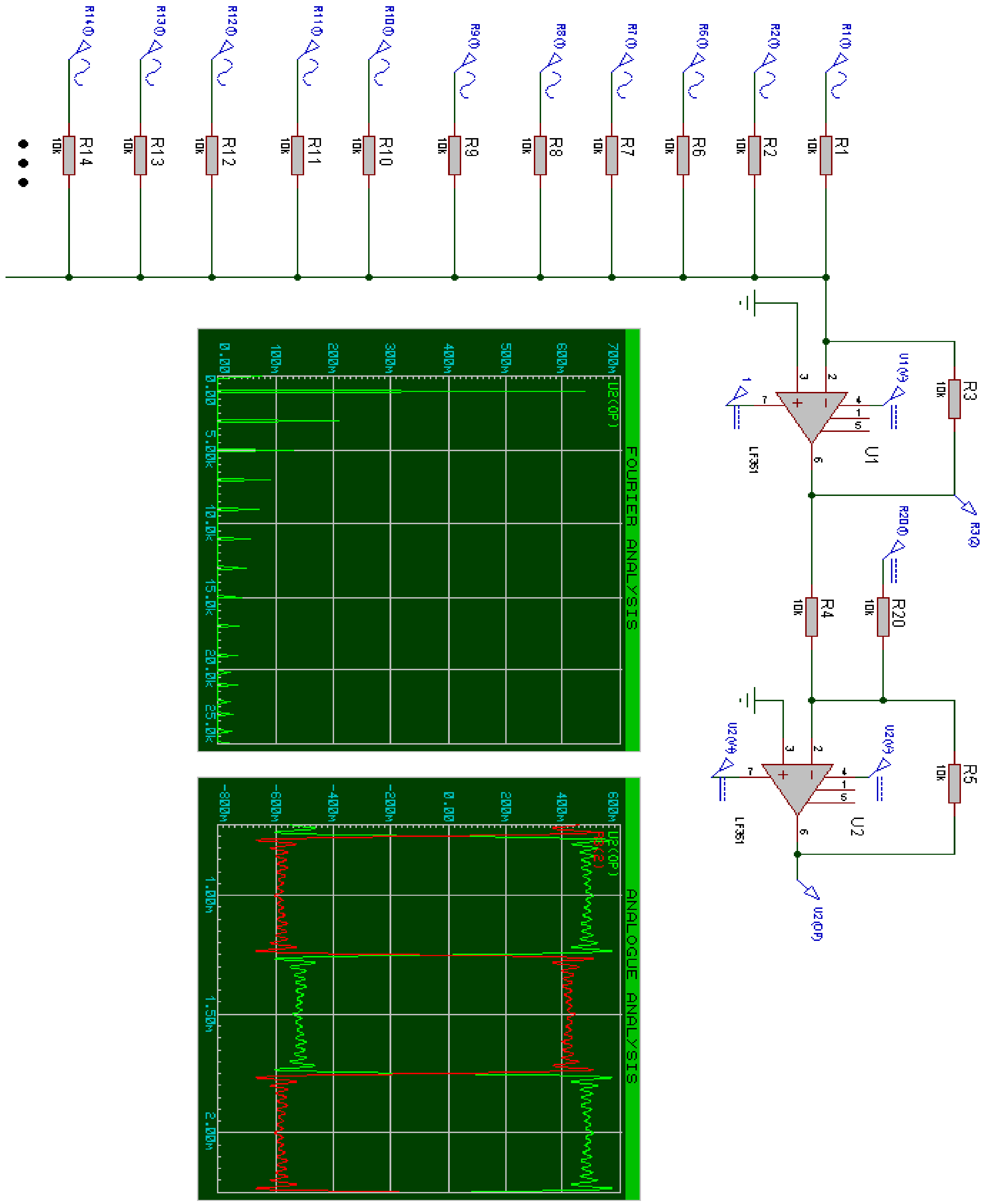
In laboratorio abbiamo applicato queste formule, potendo ricavare dei risultati interessanti.

Esercizi:

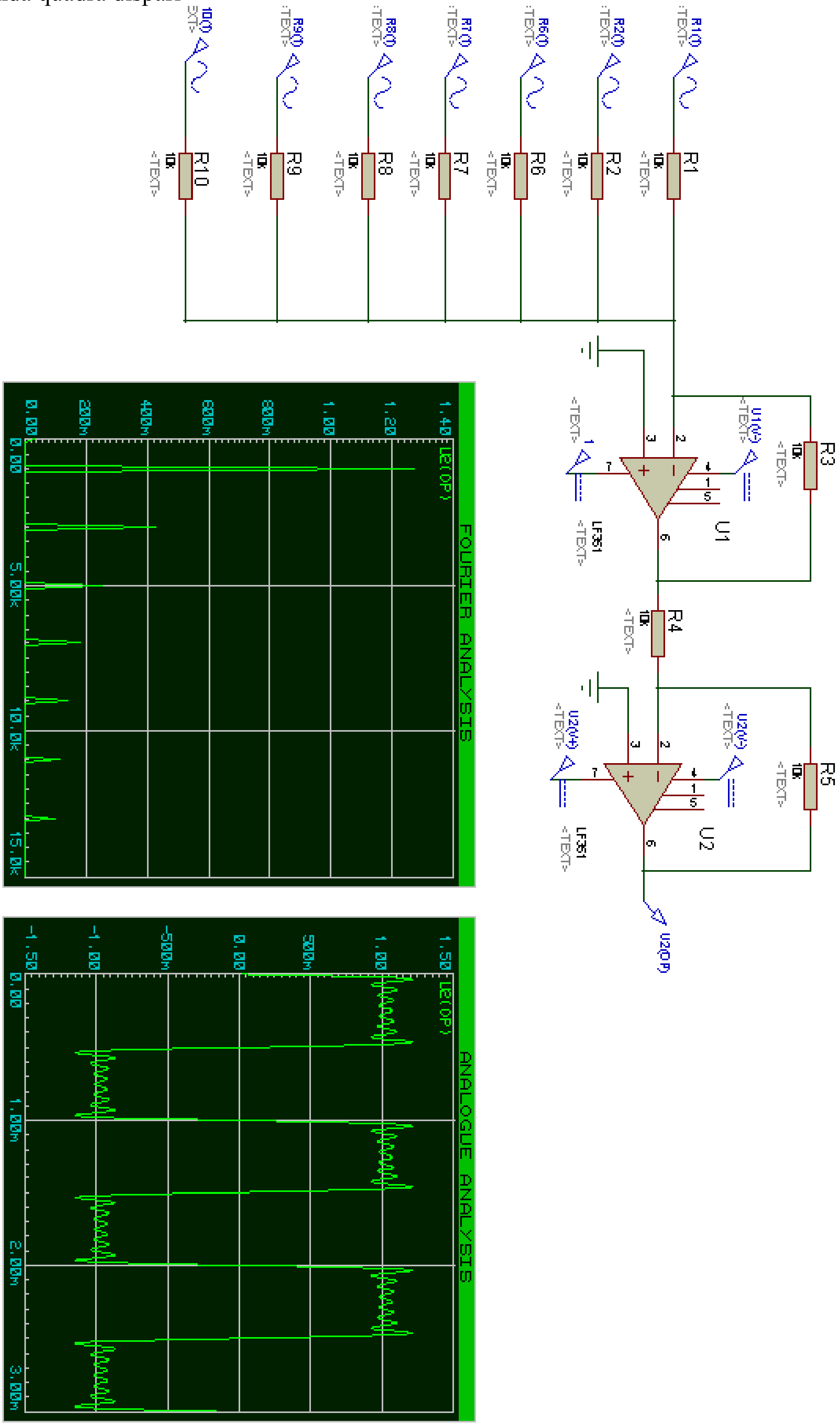
1) Onda quadra pari



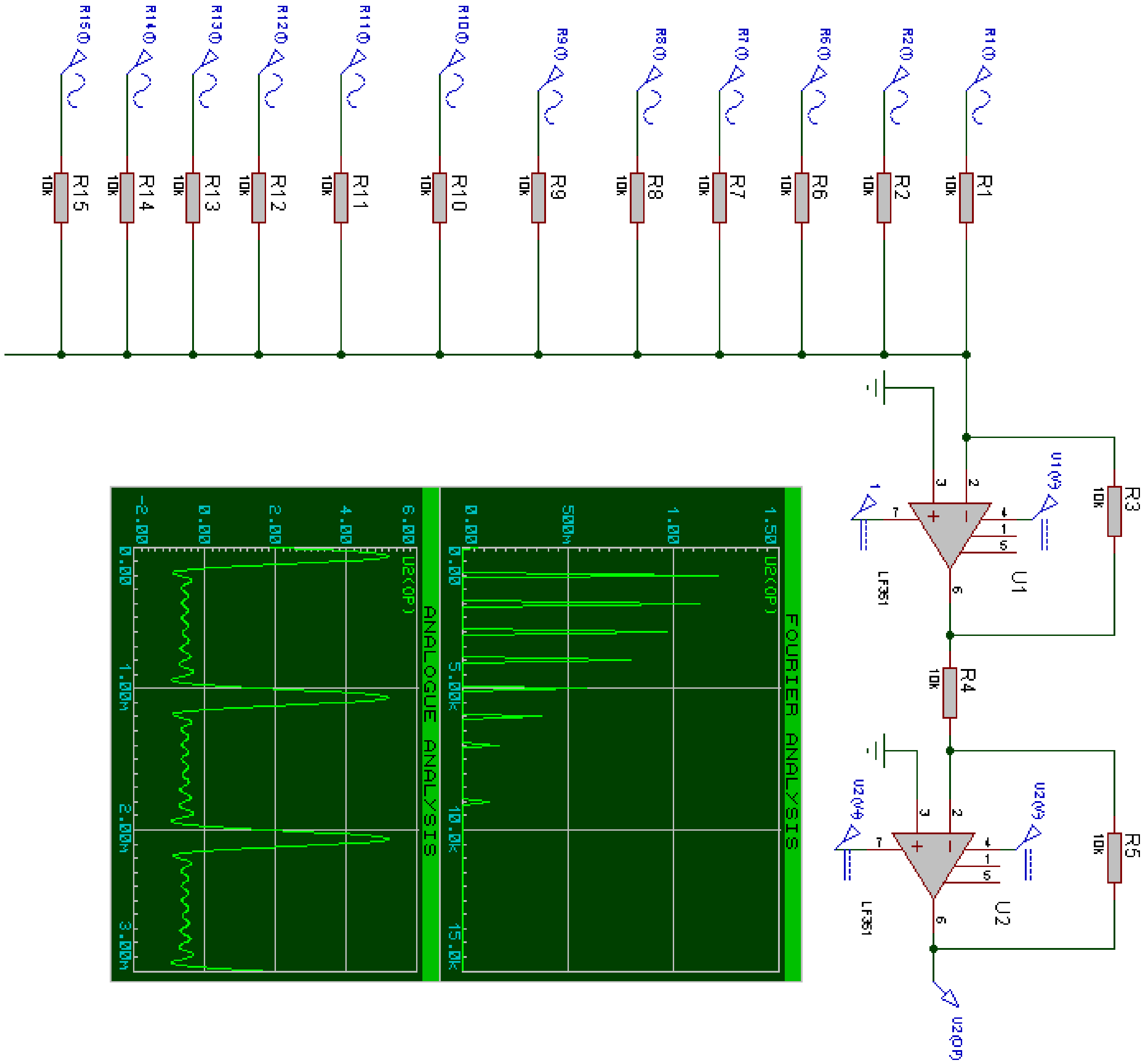
2) Onda quadra pari (con offset)



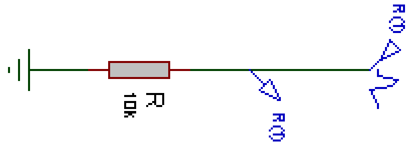
3) Onda quadra dispari

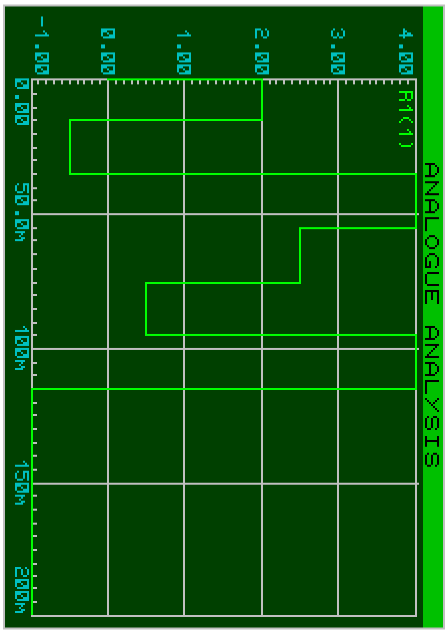


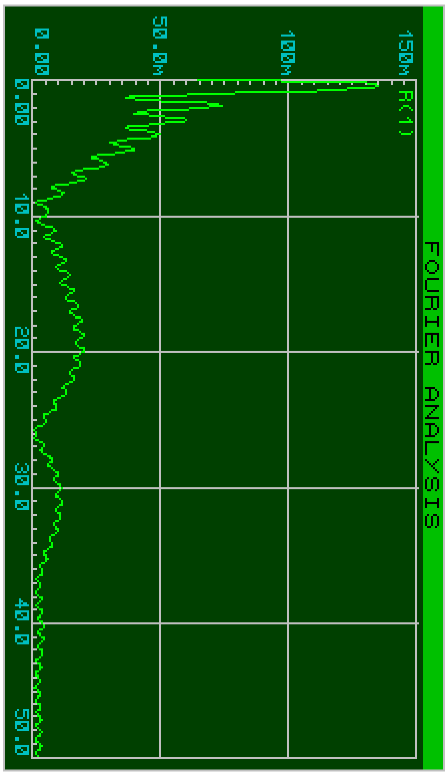
4) Impulso nè pari ne dispari

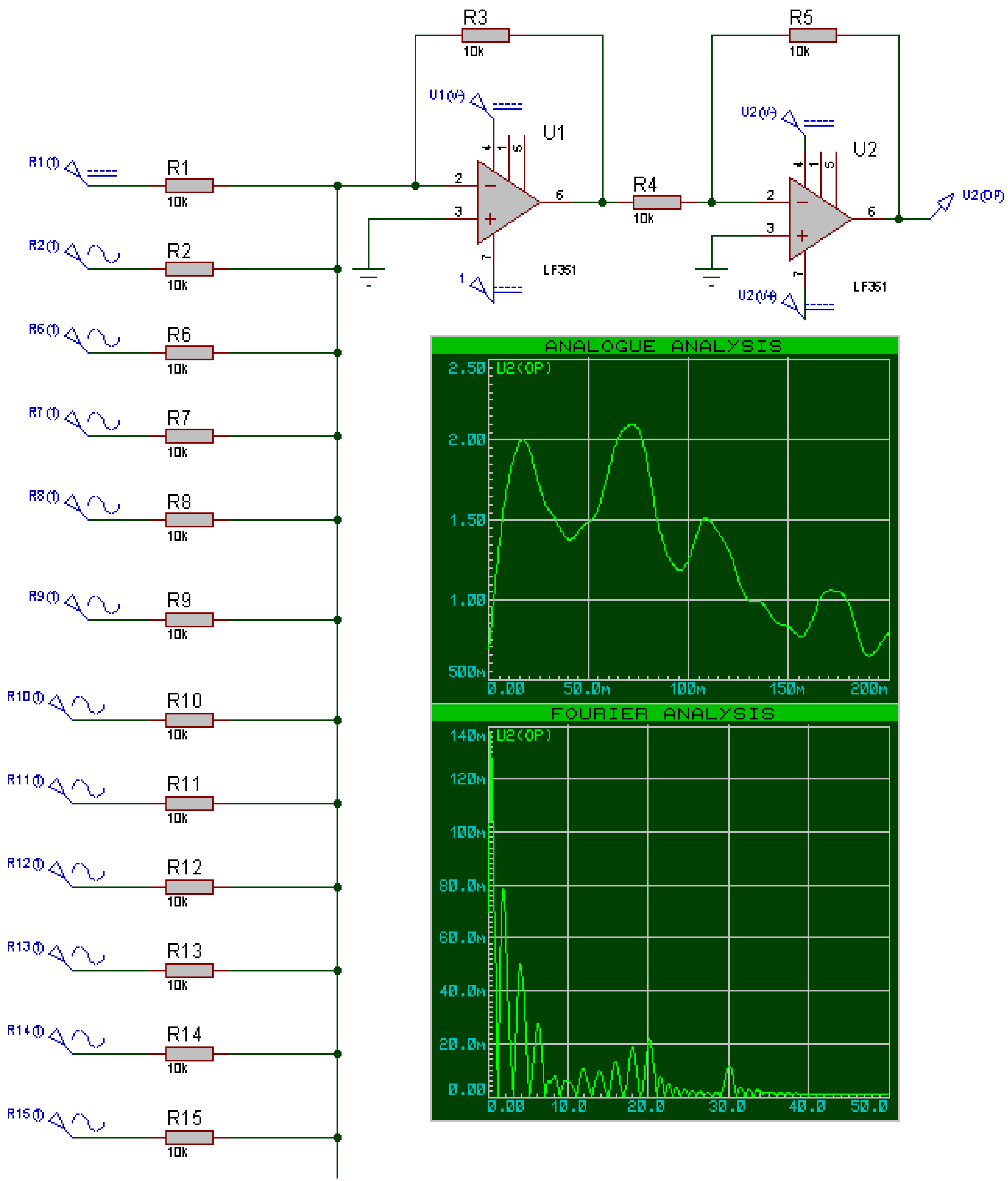


5) Segnale aperiodico



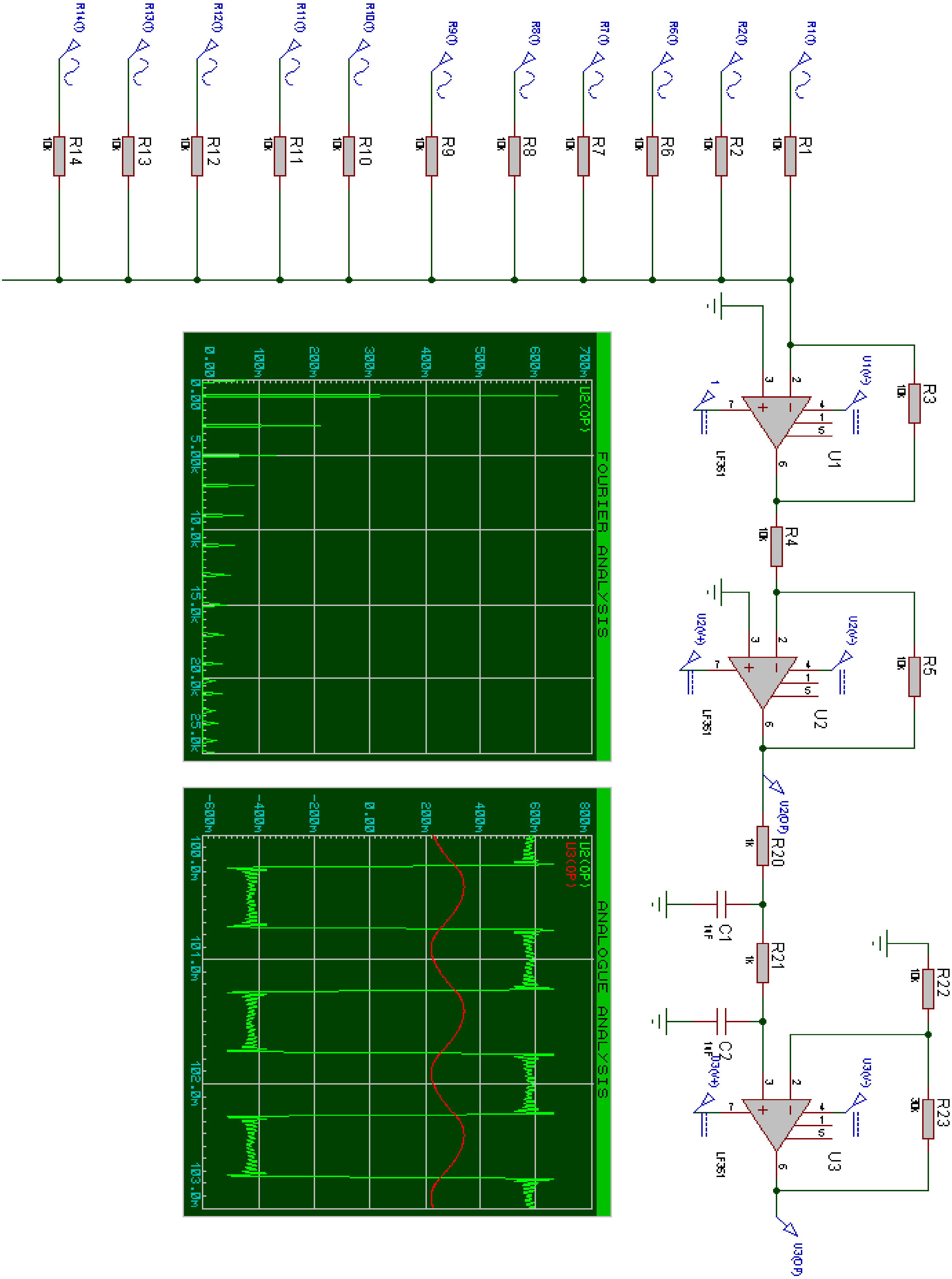






R3
10k
R5
10k
U1
U2
R4
10k
LF351
LF351
U2(OP)
R1
R2
R6
R7
R8
R9
R10
R11
R12
R13
R14
R15
ANALOGUE ANALYSIS
FOURIER ANALYSIS
U2(OP)

6) Segnale filtrato



Spiegazioni e formule:

1) Onda quadra pari

Abbiamo sommato una quantità piuttosto elevata di coseni (la precisione massima si avrebbe solo con un numero infinito di armoniche) per i quali sono stati calcolati frequenza e ampiezza.
I coseni sono simulabili come seni sfasati di 90°.
Il valore medio della funzione (C_0) è nullo, essendo il segnale alternato.

$$B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(K \omega t) dt = \frac{2\text{Vpp}}{K \pi} \cdot \sin(K \pi \frac{\tau}{T}) = \frac{2}{K \pi} \cdot \sin(K \frac{\pi}{2})$$

2) Onda quadra pari con offset

Dal momento che l'esercizio precedente, nonostante non prevedesse un offset, mostrava un'uscita piuttosto traslata verticalmente rispetto all'uscita desiderata (effetto dovuto probabilmente all'offset dell'operazionale), abbiamo recuperato l'offset nel secondo stadio aggiungendo una componente continua. La componente continua è anche visualizzabile nello spettro del segnale a frequenza nulla. Con l'offset risultante di 80 [mV], i valori rientrano nel range desiderato (-500[mV] / 500[mV]).

3) Onda quadra dispari

Abbiamo calcolato i coefficienti A_k per le componenti sinusoidali.

$$A_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(K \omega t) dt = \frac{Vpp}{K \pi} \cdot (1 - \cos(K \pi)) = \frac{2}{K \pi} \cdot (1 - \cos(K \pi))$$

Il valore medio anche in questo caso è nullo. Si noti che l'offset che si è presentato nei casi precedenti, in questa simulazione non è apparso.

4) Impulso nè pari nè dispari

Abbiamo voluto simulare l'invio di un byte TTL compatibile in cui il primo bit è a livello logico alto e gli altri sette sono al livello logico basso. Il segnale non è nè pari nè dispari e pertanto abbiamo dovuto calcolare le varie componenti C_0, A_k e B_k.

$$C_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt = \frac{5}{8}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(K \omega t) dt = \frac{5}{K \pi} \cdot (1 - \cos(K \frac{\pi}{4}))$$

$$B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(K \omega t) dt = \frac{5}{K \pi} \cdot \sin(K \frac{\pi}{4})$$

Ad ogni frequenza possono esserci al massimo due armoniche sfasate tra di loro; se analizziamo lo spettro del segnale, vediamo che le altezze non corrispondono a nessuno dei due valori calcolati. Infatti, le ampiezze che si visualizzano sullo spettro sono le componenti delle sinusoidi "equivalenti" per ogni frequenza. Per l'appunto, si può anche utilizzare la formula:

$$f(t) = C_0 + \sum_{K=1}^{+\infty} C_k \cdot \sin(K \omega t + \varphi_k)$$

Dove C_k è l'ampiezza della sinusoide ottenuta sommando i due fasori corrispondenti alle componenti seno e coseno e φ_k è la fase della stessa.

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\varphi_k = \arctan(\frac{B_k}{A_k})$$

Utilizzando questa notazione, dovremo in ogni caso utilizzare due grafici (ampiezza e fase in funzione della frequenza) per descrivere i segnali che compongono lo spettro dell'impulso risultante.

5) Segnale aperiodico

Abbiamo provato a creare un segnale aperiodico grazie allo strumento "Generatore di tensione PWLIN", che permette di disegnare il segnale desiderato che verrà poi riprodotto in uscita.
É necessario collegare il generatore ad una resistenza per poter studiare il suo andamento nel tempo, per un'esigenza del programma di simulazione.
Abbiamo quindi scelto arbitrariamente alcune componenti che sembravano, ad occhio, fondamentali, studiandone l'ampiezza. Infine, abbiamo sommato delle sinusoidi con tali ampiezze e studiato il segnale in uscita per vedere quanto fosse simile a quello desiderato. Si può notare che il segnale è solo simile a quello iniziale, riportando all'incirca i picchi fondamentali ma risultando comunque molto distorto. Notiamo anche che lo spettro del segnale PWLIN è continuo e non composto da una somma limitata di armoniche; questo è perchè si tratta di un segnale non periodico la cui riproduzione fedele dovrebbe contenere altrettante infinite sinusoidi.

6) Segnale filtrato

Abbiamo preso la prima simulazione fatta (onda quadra pari) e l'abbiamo inviata in un filtro passa basso attivo di secondo ordine (avente guadagno statico pari a 3) con frequenza di taglio pari alla frequenza del segnale stesso. Nonostante sfasata e presetante un notevole offset, l'uscita del filtro è decisamente la sinusoide "fondamentale", poichè tutte le altre componenti armoniche sono state notevolmente attenuate (ricordiamo che i filtri di secondo ordine attenuano di 40dB/dec).
Tale studio del segnale è da tenere in considerazione quando si lavora con una trasmissione dati su un mezzo fisico (rappresentabile generalmente come, appunto, un filtro passa basso).

Conclusioni:

Lo studio delle serie di Fourier risulta molto utile per studiare il comportamento del segnale una volta attraversato un mezzo trasmissivo (filtro) che non solo attenua alcune componenti in maggior modo rispetto ad altre, ma che sfasa anche tutte queste componenti. Diventa evidente la necessità di una banda larga per una trasmissione efficace tra due DTE (senza distorsioni che rendono illeggibili i dati).
In generale, l'esperienza di laboratorio è stata molto utile anche per l'applicazione pratica della formula data, non ancora dimostrabile con gli strumenti matematici a nostra disposizione.