

SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER DI SEGNALI PERIODICI DIGITALI

Prima parte

Realizzazione di onde quadre e rettangolari mediante il loro sviluppo in serie di Fourier

Sono stati realizzati alcuni tipi di onde quadre e rettangolari mediante il loro sviluppo in serie di Fourier, utilizzando il software di simulazione ISIS 7 Professional. Per ciascuna è poi stato tracciato, tramite lo stesso software, lo spettro delle ampiezze di Fourier e il diagramma rappresentante le armoniche impiegate nello sviluppo e il segnale ottenuto dalla loro somma.

A livello circuitale, sono state impiegate alcune configurazioni lineari dell'amplificatore operazionale di tensione: il sommatore invertente, la invertente fondamentale e il sommatore non invertente. Si presentano singolarmente i vari casi considerati:

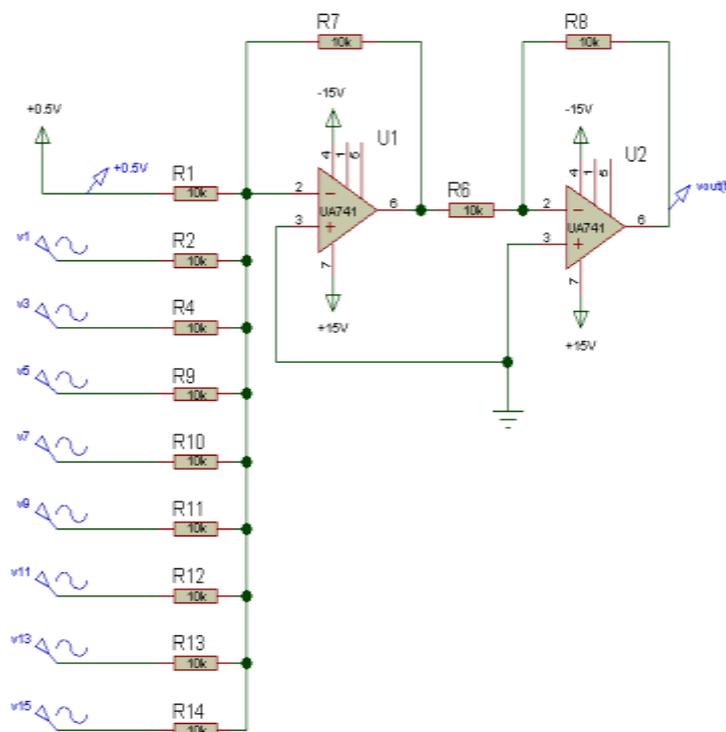
ONDA QUADRA PARI UNIPOLARE POSITIVA

Analizzando le caratteristiche del segnale, si può dire che:

- poiché è pari, le sue armoniche saranno esclusivamente dei coseni (ossia funzioni pari);
- poiché è unipolare e positiva, esso assumerà valor medio non nullo nel periodo e ciò significa che nel suo sviluppo di Fourier è presente anche una componente continua C_0 .

Per realizzare l'obiettivo, sono state utilizzate distintamente due reti circuitali:

1° rete



Il primo stadio consiste in un amplificatore operazionale di tensione configurato come sommatore invertente (con resistenze d'ingresso uguali) che effettua la somma pura (il guadagno è unitario) delle armoniche inviategli in ingresso; lo stadio successivo (amplificatore operazionale di tensione nella configurazione invertente fondamentale) effettua solamente, avendo guadagno unitario, il rifasamento del segnale in uscita dal primo stadio. In ingresso al primo stadio sono state inviate l'armonica fondamentale e altre sette componenti armoniche aventi frequenze multiple della fondamentale e una componente continua C_0 ; i rispettivi coefficienti di Fourier sono stati determinati con le note formule:

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt$$

Svolgendo in forma letterale, utilizzando le tecniche del calcolo integrale, le suddette formule si ottengono:

$$C_0 = \frac{V_{MAX}}{2}$$

$$B_k = \frac{2V_{MAX}}{k\pi} \text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Ponendo arbitrariamente $V_{max} = 1 \text{ [V]} \rightarrow C_0 = 0.5 \text{ [V]}$

Per diversi valori di k , si ottengono i seguenti valori di B_k :

$$B_1 = +0.64 \text{ (} f_{\text{fond}} = 100 \text{ [Hz])}$$

$$B_6 = 0 \text{ (} f = 600 \text{ [Hz])}$$

$$B_{11} = -0.058 \text{ (} f = 1.1 \text{ [kHz])}$$

$$B_2 = 0 \text{ (} f = 200 \text{ [Hz])}$$

$$B_7 = -0.09 \text{ (} f = 700 \text{ [Hz])}$$

$$B_{12} = 0 \text{ (} f = 1.2 \text{ [kHz])}$$

$$B_3 = -0.21 \text{ (} f = 300 \text{ [Hz])}$$

$$B_8 = 0 \text{ (} f = 800 \text{ [Hz])}$$

$$B_{13} = +0.049 \text{ (} f = 1.3 \text{ [kHz])}$$

$$B_4 = 0 \text{ (} f = 400 \text{ [Hz])}$$

$$B_9 = +0.07 \text{ (} f = 900 \text{ [Hz])}$$

$$B_{14} = 0 \text{ (} f = 1.4 \text{ [kHz])}$$

$$B_5 = +0.13 \text{ (} f = 500 \text{ [Hz])}$$

$$B_{10} = 0 \text{ (} f = 1 \text{ [kHz])}$$

$$B_{15} = -0.0424 \text{ (} 1.5 \text{ [kHz])}$$

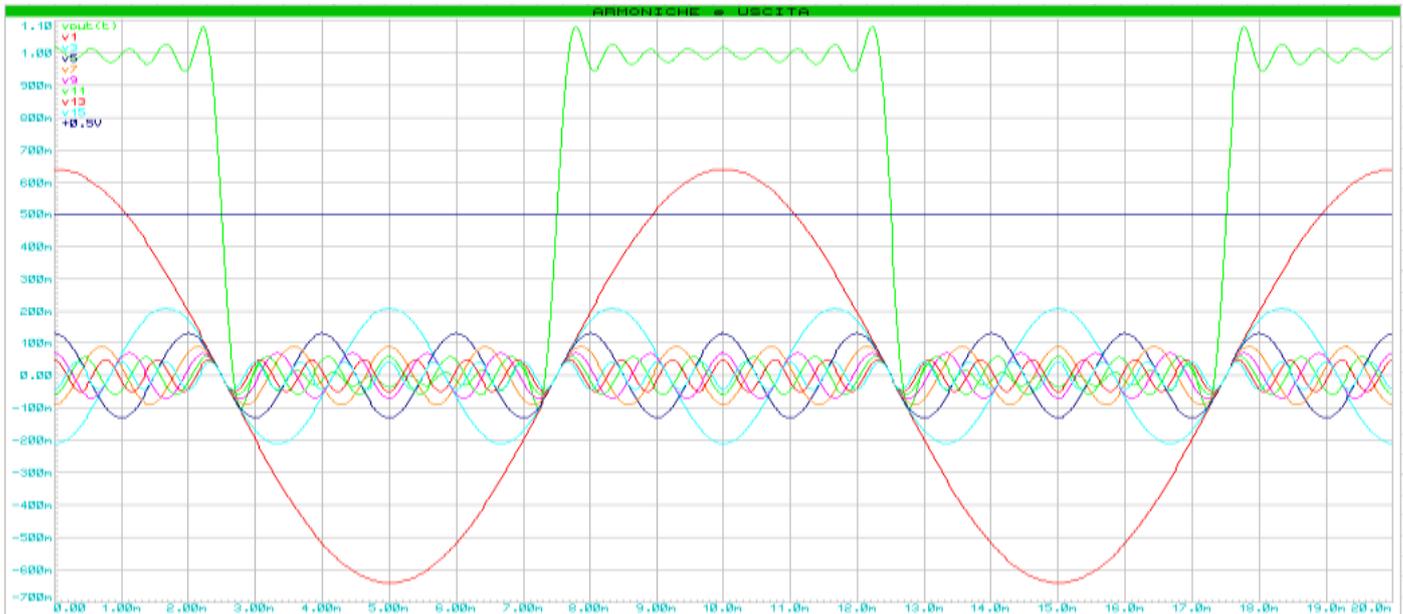
Sono state inviate in ingresso al primo stadio solamente le componenti armoniche a frequenza dispari (nello stesso modo si è operato per tracciare lo spettro delle ampiezze di Fourier e il diagramma analogico).

Lo sviluppo in serie di Fourier può essere così approssimato (senza contare le armoniche con ampiezza nulla):

$$v(t) = 0.5 + 0.64 \cos(\omega_0 t) - 0.21 \cos(3\omega_0 t) + 0.13 \cos(5\omega_0 t) - 0.09 \cos(7\omega_0 t) + 0.07 \cos(9\omega_0 t) - 0.058 \cos(11\omega_0 t) + 0.049 \cos(13\omega_0 t) - 0.0424 \cos(15\omega_0 t)$$

Si presentano i grafici ottenuti:

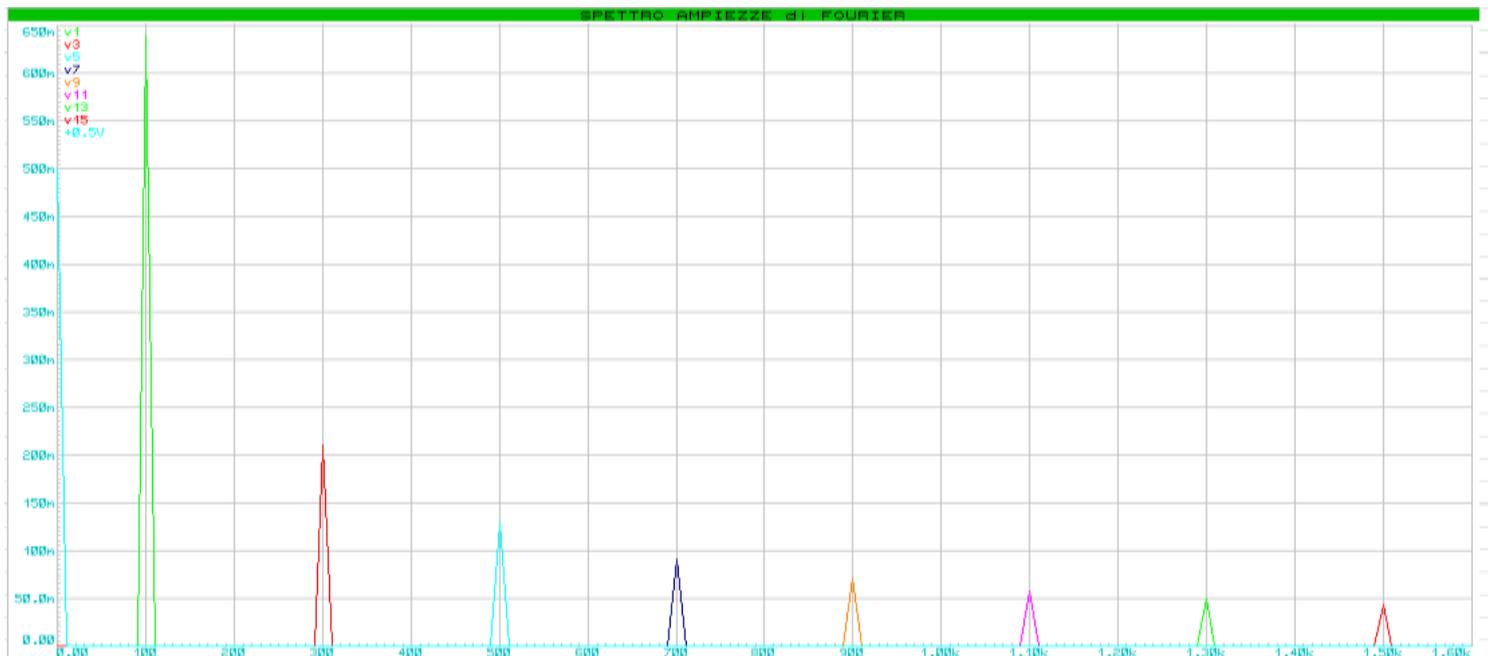
Diagramma analogico



Esaminando questo diagramma, si nota che:

- l'armonica fondamentale (cosinusoide rossa a frequenza minore delle altre) determina la frequenza del segnale d'uscita dal primo stadio (rifasato poi al secondo stadio);
- nei punti in cui le varie armoniche sono in fase fra loro, sono situati i fronti di salita e di discesa del segnale d'uscita;
- il segnale d'uscita non è propriamente un'onda quadra, dal momento che i suoi livelli superiori e inferiori non sono rettilinei. Tuttavia, aumentando il numero delle armoniche in ingresso al primo stadio, è possibile ottenere un segnale che si avvicina di più a un'onda quadra. Inoltre, il segnale d'uscita rispetta le caratteristiche di parità, unipolarità e positività.

Spettro delle ampiezze di Fourier

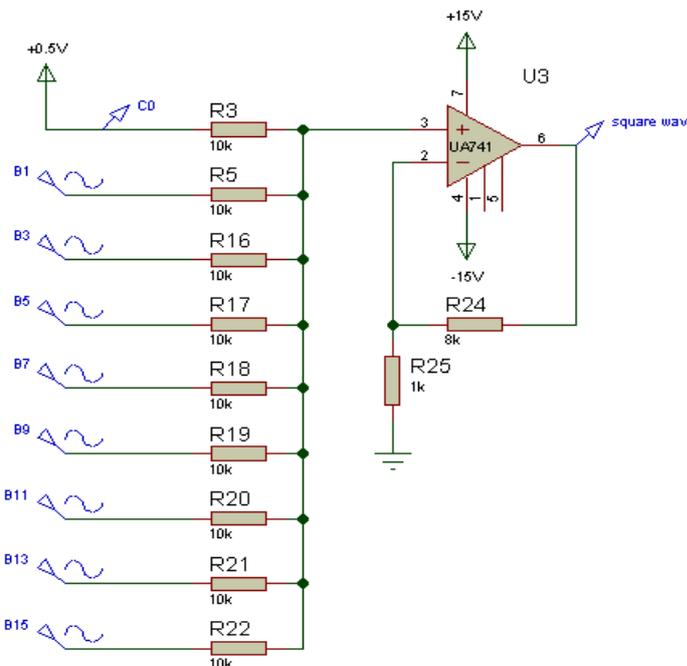


Lo spettro delle ampiezze mostra le ampiezze delle armoniche considerate e le loro frequenze, multiple dispari della frequenza fondamentale, rappresentate in modulo (lo spettro reale è invece costituito anche da ampiezze negative, come osservato nel calcolo dei coefficienti di Fourier delle armoniche, modulate dalla funzione $B_k = V_{max} * [\text{sen}(k\pi\delta) / k\pi\delta]$, dove δ è il duty-cycle dell'onda, che nel caso specifico è del 50%)⁽¹⁾; nello spettro, non figurano le ampiezze delle armoniche aventi frequenze multiple pari della frequenza fondamentale, dal momento che tali segnali non sono stati considerati in simulazione, poiché aventi coefficienti di Fourier nulli.

(1) Come detto, questa è una rappresentazione in modulo dello spettro delle ampiezze di Fourier poiché, nello spettro reale, le ampiezze negative vengono rappresentate come tali; ciascuna ampiezza (positiva e negativa) è modulata dalla già menzionata funzione $B_k = V_{max} * [\text{sen}(k\pi\delta) / k\pi\delta]$. Questa funzione presenta un massimo assoluto nel punto di coordinate (0;1) e ha un andamento considerabile come oscillante smorzato; le aree sottese a tale funzione (ossia quelle delimitate dal suo grafico, dall'asse dei tempi e dalle rette parallele all'asse delle ampiezze passanti per gli istanti temporali presso i quali sono situati gli zeri della funzione stessa) sono dette **lobi**. Trattandosi di un'onda quadra, in ciascun lobo è contenuta una "colonna" dello spettro delle ampiezze di Fourier.

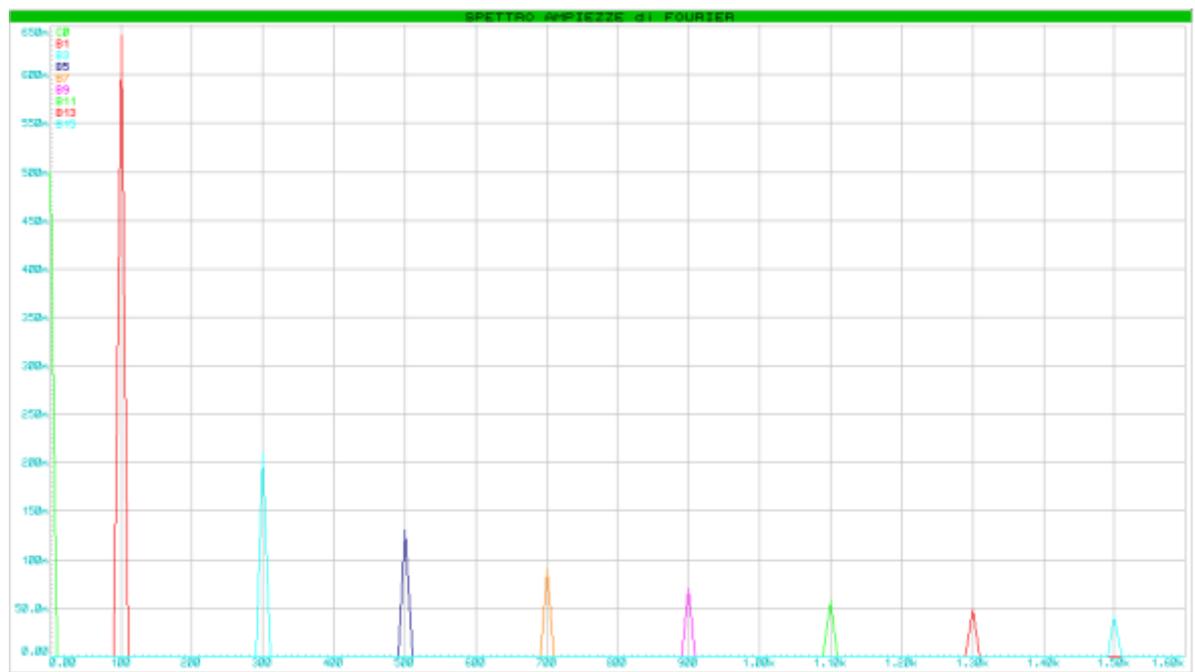
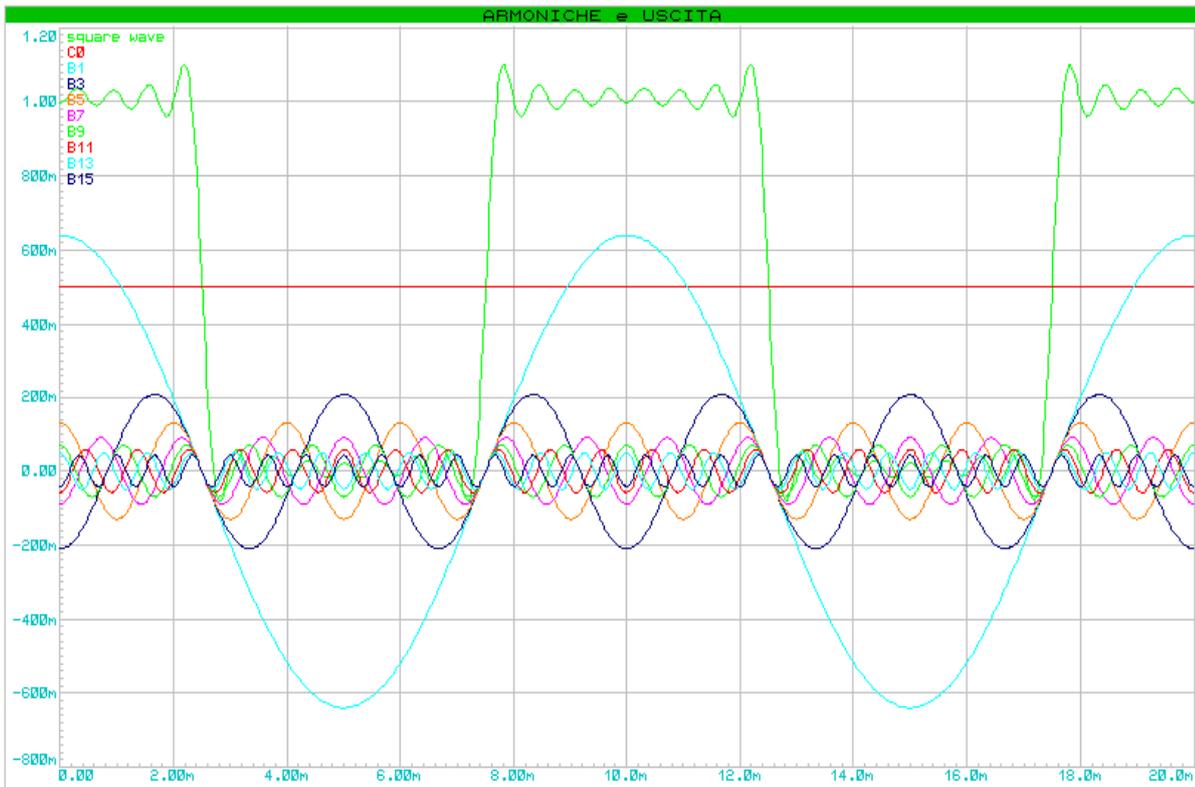
II° rete

La seconda rete circuitale utilizzata è composta da un unico stadio composto da un amplificatore operazionale di tensione configurato come sommatore non invertente (con resistenze d'ingresso uguali):



Il vantaggio di utilizzare questa seconda rete sta nel fatto che in essa viene impiegato un solo stadio, poiché non è necessario rifasare il segnale in uscita dal sommatore, essendo quest'ultimo in configurazione non invertente. L'unico elemento di cui si deve tenere conto è il fattore di attenuazione d'ingresso (in questo caso uguale a 9) che deve essere necessariamente compensato da un adeguato guadagno d'anello numericamente uguale al fine di ottenere la somma pura delle componenti d'ingresso.

Si presentano i grafici ottenuti (le considerazioni a essi relative ricalcano quelle esposte per la prima rete):

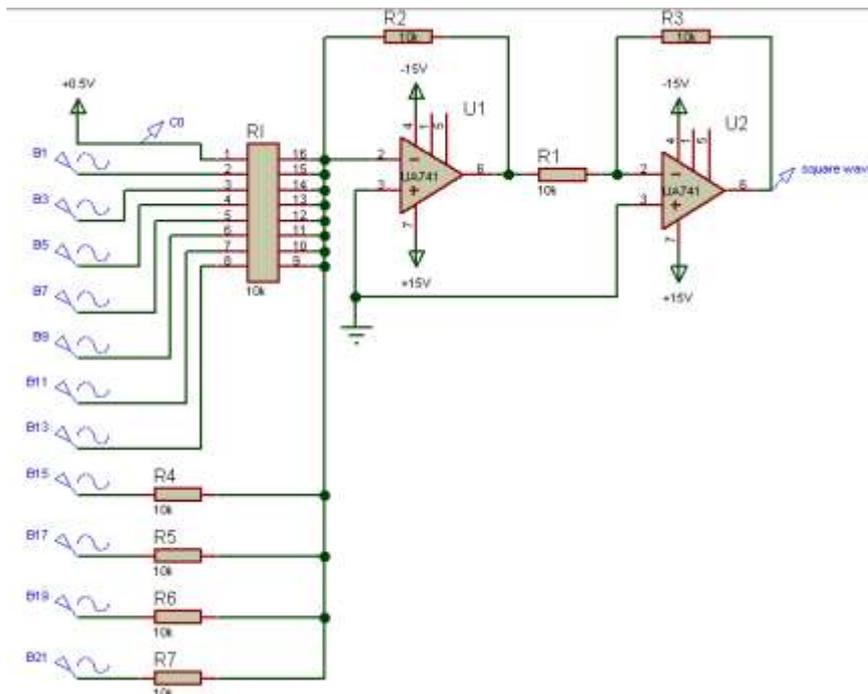


ONDA QUADRA PARI BIPOLARE NON ALTERNATA

Analizzando le caratteristiche della forma d'onda, si può affermare che:

- poiché è pari, le sue armoniche saranno esclusivamente dei coseni (ossia funzioni pari);
- poiché è bipolare, essa assumerà sia valori positivi sia valori negativi;
- poiché non è alternata, essa assumerà valori massimi e minimi numericamente diversi. Per lo stesso motivo, nel suo sviluppo di Fourier è presente anche la componente continua C_0 .

1° rete



Questa prima rete a due stadi è analoga a quella utilizzata per la prima onda con la sola differenza che in questo secondo caso sono state utilizzate, oltre alla fondamentale, dieci armoniche, i cui coefficienti di Fourier sono stati calcolati utilizzando le formule note e le tecniche del calcolo integrale:

$$C_0 = V_{pp} \frac{\tau}{T_0} + V_{min}, \text{ dove } \frac{\tau}{T_0} = \text{duty-cycle dell'onda quadra.}$$

(si considera l'onda unipolare: se ne calcola il valore picco-picco, lo si moltiplica per il duty-cycle e al valore ottenuto si aggiunge il valore minimo di tensione assunto dal segnale).

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt$$

Svolgendo la seconda formula si ottiene:

$$B_k = \frac{6}{k\pi} * \frac{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\frac{\pi}{2}}$$

Ponendo $V_{\max} = +2$ [V] e $V_{\min} = -1$ [V] $\rightarrow V_{pp} = V_{\max} - V_{\min} = +3$ [V],

da cui, applicando l'apposita formula $\rightarrow C_0 = 0.5$

Per diversi valori di k , si ottengono i seguenti coefficienti B_k (si riportano solo i coefficienti delle armoniche con frequenza multipla dispari della frequenza fondamentale, ossia quelle inviate in ingresso, assieme alla componente C_0 , al primo stadio):

$$B_1 = +1.91 \text{ (} f_{\text{fond}} = 100 \text{ [Hz])}$$

$$B_{13} = +0.147 \text{ (} 13f_{\text{fond}} = 1.3 \text{ [kHz])}$$

$$B_3 = -0.636 \text{ (} 3f_{\text{fond}} = 300 \text{ [Hz])}$$

$$B_{15} = -0.127 \text{ (} 15f_{\text{fond}} = 1.5 \text{ [kHz])}$$

$$B_5 = +0.382 \text{ (} 5f_{\text{fond}} = 500 \text{ [Hz])}$$

$$B_{17} = +0.112 \text{ (} 17f_{\text{fond}} = 1.7 \text{ [kHz])}$$

$$B_7 = -0.273 \text{ (} 7f_{\text{fond}} = 700 \text{ [Hz])}$$

$$B_{19} = -0.101 \text{ (} 19f_{\text{fond}} = 1.9 \text{ [kHz])}$$

$$B_9 = +0.212 \text{ (} 9f_{\text{fond}} = 900 \text{ [Hz])}$$

$$B_{21} = +0.091 \text{ (} 21f_{\text{fond}} = 2.1 \text{ [kHz])}$$

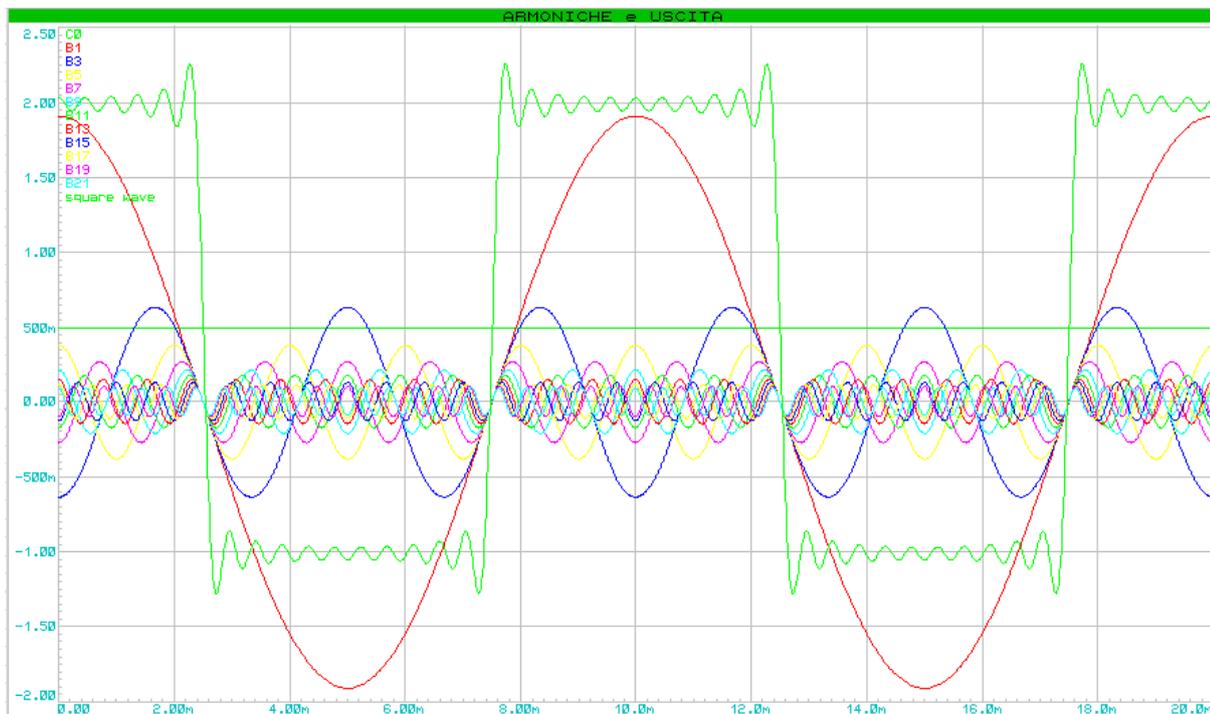
$$B_{11} = -0.174 \text{ (} 11f_{\text{fond}} = 1.1 \text{ [kHz])}$$

Con questo numero di componenti armoniche si può così approssimare, tenendo conto anche della componente continua C_0 , lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra considerata:

$$v(t) = 0.5 + 1.91 \cos(\omega_0 t) - 0.636 \cos(3\omega_0 t) + 0.382 \cos(5\omega_0 t) - 0.273 \cos(7\omega_0 t) + 0.212 \cos(9\omega_0 t) - \\ + 0.174 \cos(11\omega_0 t) + 0.147 \cos(13\omega_0 t) - 0.127 \cos(15\omega_0 t) + 0.112 \cos(17\omega_0 t) - 0.101 \cos(19\omega_0 t) + \\ + 0.091 \cos(\omega_0 t)$$

Si presentano i grafici ottenuti in simulazione:

Diagramma analogico

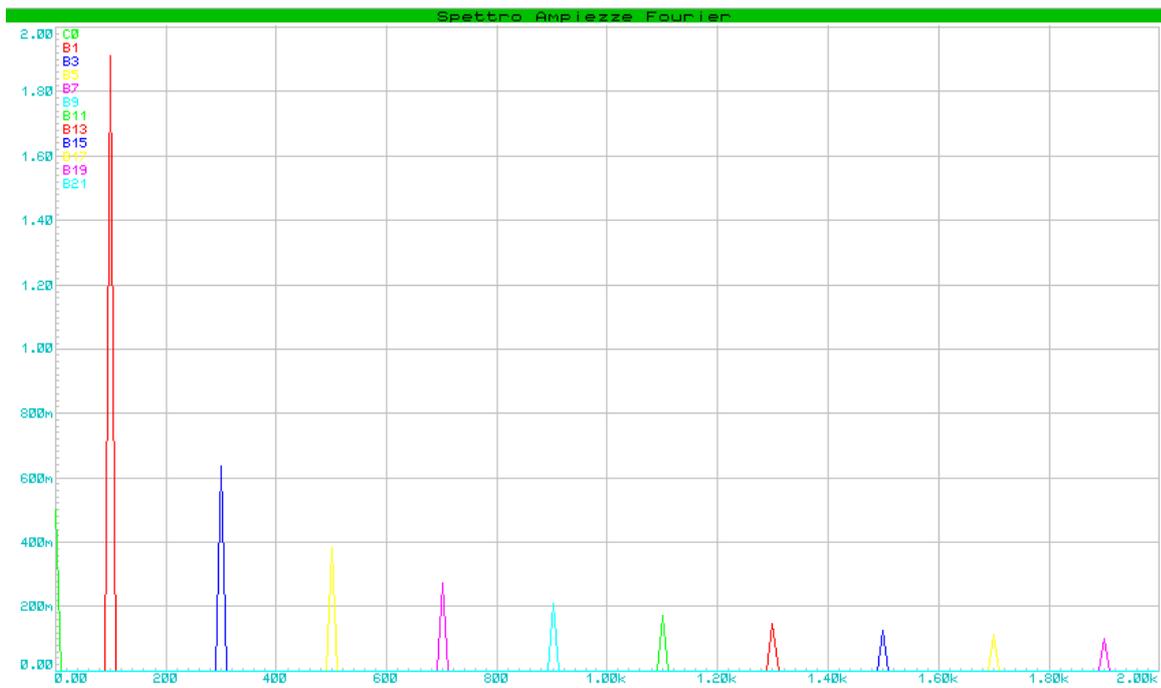


Analizzando il presente diagramma analogico, si osserva ancora che:

- l'armonica fondamentale (cosinusoide rossa a frequenza minore delle altre) determina la frequenza del segnale d'uscita (la pseudo onda quadra in verde) dal primo stadio (rifasato poi al secondo stadio);
- nei punti in cui le varie armoniche sono in fase fra loro, sono situati i fronti di salita e di discesa del segnale d'uscita;
- il segnale d'uscita non è propriamente un'onda quadra, dal momento che i suoi livelli superiori e inferiori non sono rettilinei. Tuttavia, aumentando il numero delle armoniche in ingresso al primo stadio, è possibile ottenere un segnale che si avvicina di più all'onda quadra desiderata. Inoltre, il segnale d'uscita rispetta le caratteristiche di parità e bipolarità. Va anche evidenziato che, come desiderato, il segnale d'uscita non è alternato.

Confrontando questo diagramma analogico con quello tracciato per il tipo di onda quadra precedente, si nota che questo secondo diagramma mostra un segnale d'uscita molto più simile al segnale desiderato rispetto allo stesso diagramma presentato nel primo caso (va tenuto ovviamente conto che si tratta di onde quadre aventi caratteristiche diverse) e ciò è dovuto all'aver inviato in ingresso al primo stadio un numero maggiore di armoniche.

Spettro della ampiezze di Fourier

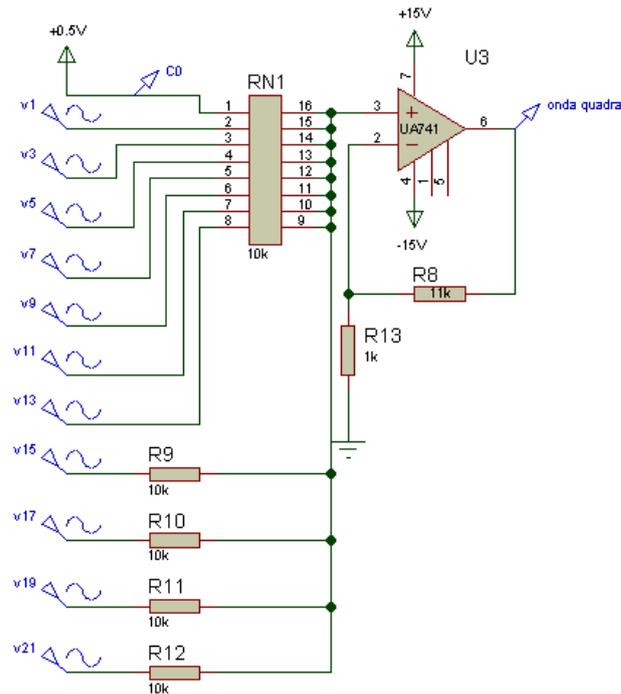


Il presente spettro delle ampiezze di Fourier mostra, in modulo, l'ampiezza delle armoniche utilizzate e le loro frequenze, con queste ultime multiple dispari ciascuna della frequenza fondamentale. Non figurano le armoniche con frequenze multiple pari della frequenza fondamentale, poiché non utilizzate in quanto aventi coefficienti di Fourier nulli.

Riguardo alla rappresentazione dello spettro reale, le considerazioni sono analoghe a quelle relative al precedente tipo di onda quadra considerato.

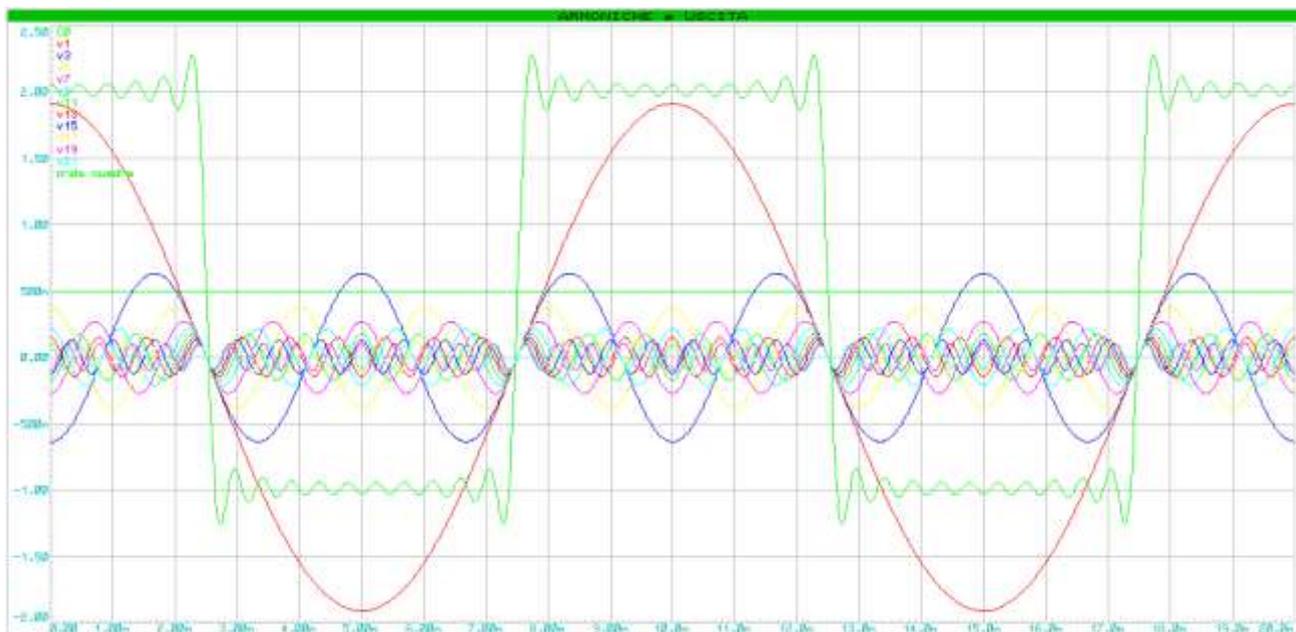
II° rete

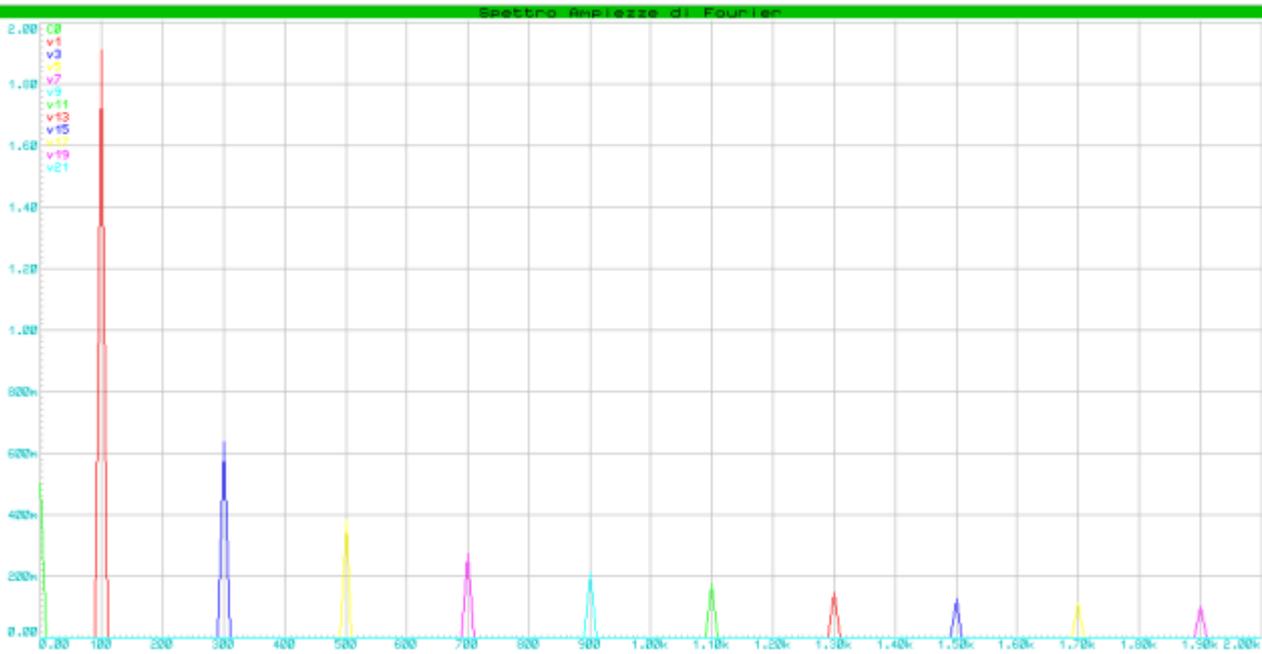
Anche per questo tipo di onda quadra è stata una seconda rete che permette di realizzarla, composta da un unico stadio composto da un amplificatore operazionale di tensione configurato come sommatore non invertente:



Il vantaggio di utilizzare questa seconda rete sta nel fatto che in essa viene impiegato un solo stadio, poiché non è necessario rifasare il segnale in uscita dal sommatore, essendo quest'ultimo in configurazione non invertente. L'unico elemento di cui si deve tenere conto è il fattore di attenuazione d'ingresso (in questo caso uguale a 12) che deve essere necessariamente compensato da un adeguato guadagno d'anello numericamente uguale al fine di ottenere la somma pura delle componenti d'ingresso.

Si presentano i grafici ottenuti (le considerazioni a essi relative ricalcano quelle esposte per la prima rete):



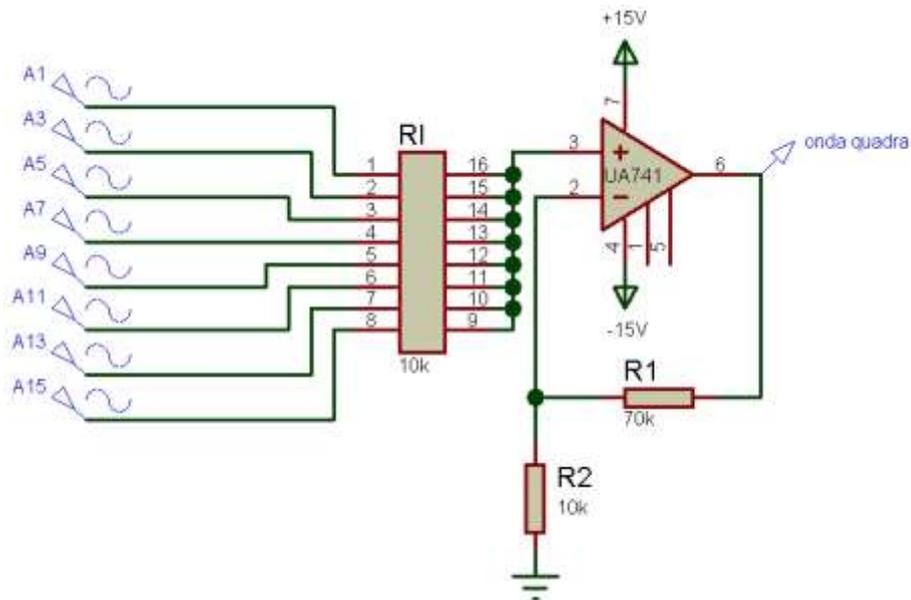


ONDA QUADRA DISPARI BIPOLARE ALTERNATA

Considerando le caratteristiche della forma d'onda, si può affermare che:

- poiché è dispari, le sue armoniche saranno esclusivamente dei seni (ossia funzioni dispari);
- poiché è bipolare, essa assumerà sia valori positivi sia valori negativi;
- poiché è alternata, essa assumerà valori massimi e minimi numericamente uguali. Per lo stesso motivo, nel suo sviluppo di Fourier non è presente la componente continua C_0 .

Si riporta soltanto la rete a stadio unico, poiché più vantaggiosa per i motivi già esposti:



In ingresso alla rete sono state inviate, oltre all'armonica fondamentale, sette armoniche aventi frequenze multiple dispari della frequenza dell'armonica fondamentale, i cui coefficienti di Fourier sono stati determinati tramite le seguenti formule, derivanti dalle formule generali:

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt$$

dalla quale deriva

$$A_k = \frac{V_{MAX}}{k\pi} [1 + \cos(k2\pi) - 2\cos(k\pi)]$$

Poiché

$$\cos(k2\pi) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

la formula per calcolare i coefficienti di Fourier A_k diventa la seguente:

$$A_k = \frac{V_{MAX}}{k\pi} [1 + 1 - 2\cos(k\pi)]$$

da cui

$$A_k = \frac{2V_{MAX}}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)]$$

Ponendo $V_{MAX} = +1[V]$ e utilizzando quest'ultima formula, per diversi valori di k si ottengono i seguenti risultati (si riportano solo i coefficienti di Fourier delle armoniche a frequenza dispari):

$$A_1 = +1.273 \text{ (} f_{\text{fond}} = 100 \text{ [Hz])}$$

$$A_7 = +0.182 \text{ (} 7f_{\text{fond}} = 700 \text{ [Hz])}$$

$$A_{13} = +0.098 \text{ (} 13f_{\text{fond}} = 1.3 \text{ [kHz])}$$

$$A_3 = +0.424 \text{ (} 3f_{\text{fond}} = 300 \text{ [Hz])}$$

$$A_9 = +0.141 \text{ (} 9f_{\text{fond}} = 900 \text{ [Hz])}$$

$$A_{15} = +0.085 \text{ (} 15f_{\text{fond}} = 1.5 \text{ [kHz])}$$

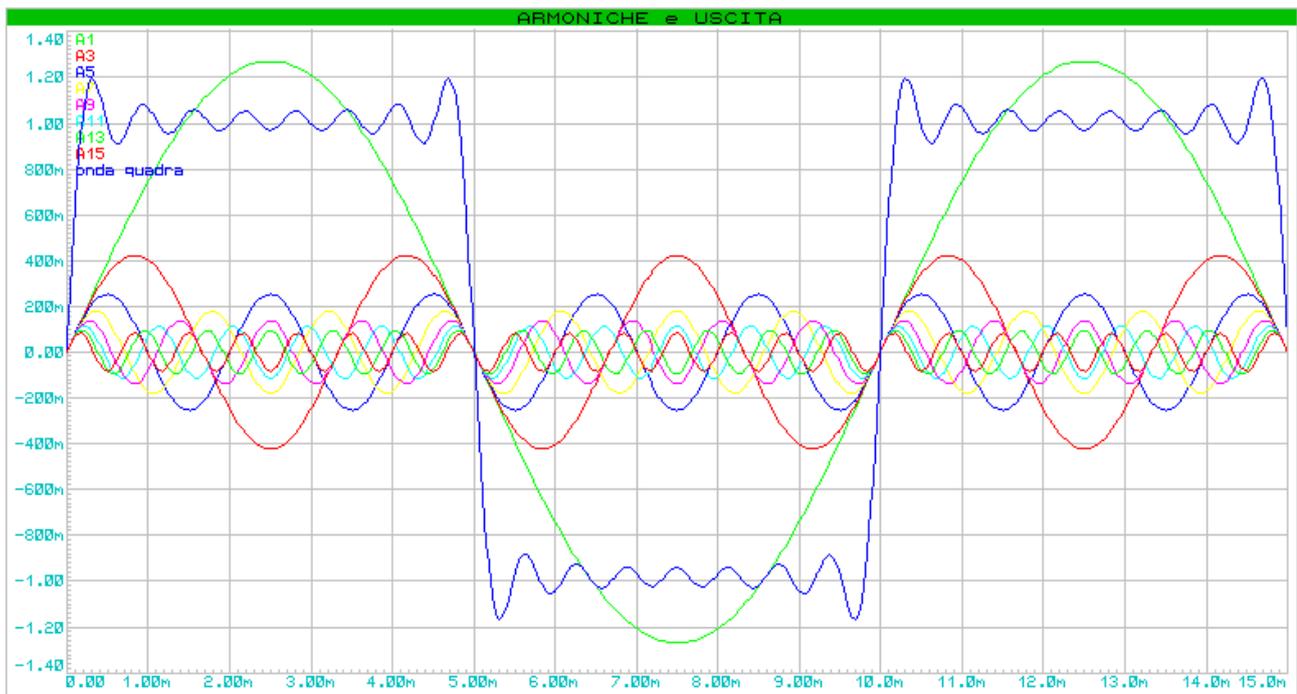
$$A_5 = +0.255 \text{ (} 5f_{\text{fond}} = 500 \text{ [Hz])}$$

$$A_{11} = +0.116 \text{ (} 11f_{\text{fond}} = 1.1 \text{ [kHz])}$$

Lo sviluppo di Fourier di quest'onda quadra può essere così approssimato:

$$v(t) = +1.273\text{sen}(\omega_0 t) + 0.424\text{sen}(3\omega_0 t) + 0.255\text{sen}(5\omega_0 t) + 0.182\text{sen}(7\omega_0 t) + 0.141\text{sen}(9\omega_0 t) + 0.116\text{sen}(11\omega_0 t) + 0.098\text{sen}(13\omega_0 t) + 0.085\text{sen}(15\omega_0 t)$$

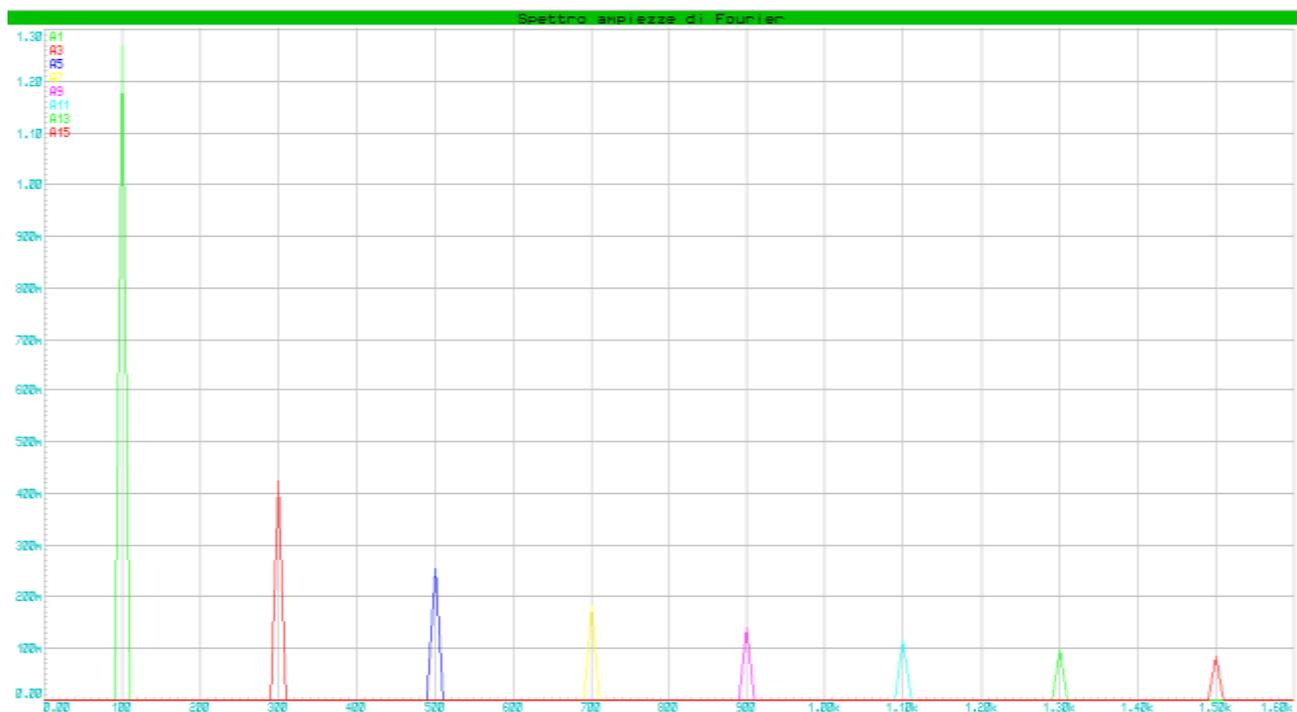
Si presentano i grafici ottenuti:



Dal grafico si osserva che:

- l'armonica fondamentale (sinusoide verde a frequenza minore delle altre) determina la frequenza del segnale d'uscita (la pseudo onda quadra in blu);
- nei punti in cui le varie armoniche sono in fase fra loro, sono situati i fronti di salita e di discesa del segnale d'uscita;
- il segnale d'uscita non è propriamente un'onda quadra, dal momento che i suoi livelli superiori e inferiori non sono rettilinei. Tuttavia, aumentando il numero delle armoniche in ingresso, è possibile ottenere un segnale che si avvicina di più all'onda quadra desiderata;
- il segnale d'uscita rispetta le caratteristiche di disparità e bipolarità e inoltre è alternato.

Spettro delle ampiezze di Fourier



Il presente spettro delle ampiezze di Fourier mostra, in modulo, l'ampiezza delle armoniche utilizzate e le loro frequenze, con queste ultime multiple dispari ciascuna della frequenza fondamentale. Non figurano le armoniche con frequenze multiple pari della frequenza fondamentale, poiché non utilizzate in quanto aventi coefficienti di Fourier nulli.

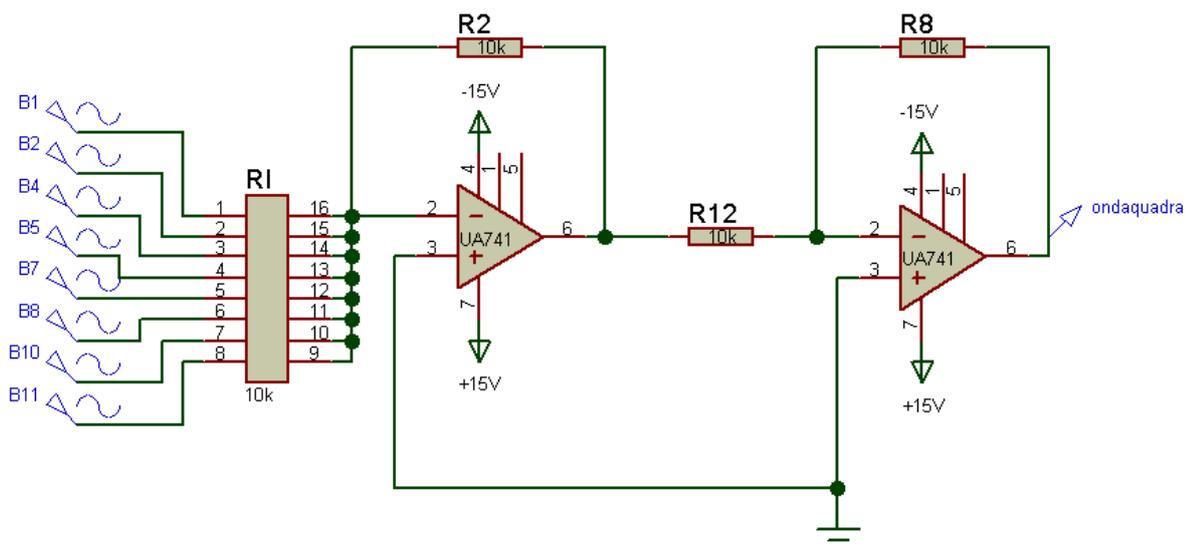
Relativamente alla rappresentazione dello spettro reale, le considerazioni sono analoghe a quelle relative ai precedenti tipi di onda quadra considerati.

ONDA RETTANGOLARE PARI BIPOLARE NON ALTERNATA

In ultima analisi, è stata realizzata un'onda rettangolare con un duty-cycle del 33%. Per questa realizzazione si presenta solamente la rete a due stadi precedentemente utilizzata; ma prima di presentare la rete si riportano alcune osservazione meritatamente al tipo di onda:

- poiché è pari, le sue armoniche saranno esclusivamente dei coseni (ossia funzioni pari);
- poiché è bipolare, essa assumerà sia valori positivi sia valori negativi;
- poiché non è alternata, essa assumerà valori massimi e minimi numericamente diversi. Per lo stesso motivo, nel suo sviluppo di Fourier è presente anche la componente continua C_0 .

Ecco lo schema della rete circuitale impiegata:



In ingresso alla rete sono state inviate, oltre all'armonica fondamentale, sette armoniche aventi frequenze multiple dispari della frequenza dell'armonica fondamentale, i cui coefficienti di Fourier sono stati determinati tramite le seguenti formule, derivanti dalle formule generali:

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt$$

dalla quale si ricava

$$B_k = \frac{6}{k\pi} \text{sen} \left(k \frac{\pi}{3} \right)$$

Lo stesso risultato è ottenibile utilizzando un'altra formula generale riguardante una generica onda rettangolare pari:

$$B_k = 2V_{pp} \frac{\tau}{T_0} * \frac{\text{sen}\left(k\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}{k\pi \frac{\tau}{T_0}}$$

Infatti, ponendo le seguenti caratteristiche dell'armonica fondamentale

$$f_{\text{fond}} = 33 \text{ [Hz]}$$

$$V_{\text{MAX}} = +2 \text{ [V]}$$

$$V_{\text{min}} = -1 \text{ [V]}$$

si ha

$$B_k = \left(2 * 3 * \frac{1}{3}\right) * \frac{\text{sen}\left(k\pi * \frac{1}{3}\right)}{k\pi * \frac{1}{3}} = \frac{6}{k\pi} \text{sen}\left(k \frac{\pi}{3}\right)$$

La componente continua C_0 ha valore nullo (ciò confuta quanto affermato in precedenza):

$$C_0 = V_{pp} \frac{\tau}{T_0} + V_{\text{min}}, \text{ dove } \frac{\tau}{T_0} = \text{duty-cycle dell'onda.}$$

Coi valori numerici dati,

$$C_0 = V_{pp} \frac{\tau}{T_0} + V_{\text{min}} = \left(3 * \frac{1}{3}\right) - 1 = 0$$

Per diversi valori di k, si ricavano i seguenti valori di B_k :

$$B_1 = 1.65 \text{ (} f_{\text{fond}} = 33 \text{ [Hz])}$$

$$B_5 = -0.330 \text{ (} 5f_{\text{fond}} = 165 \text{ [Hz])}$$

$$B_{10} = -0.165 \text{ (} 10f_{\text{fond}} = 330 \text{ [Hz])}$$

$$B_2 = 0.830 \text{ (} 2f_{\text{fond}} = 66 \text{ [Hz])}$$

$$B_7 = 0.240 \text{ (} 7f_{\text{fond}} = 231 \text{ [Hz])}$$

$$B_{11} = 0.150 \text{ (} 11f_{\text{fond}} = 363 \text{ [Hz])}$$

$$B_4 = -0.410 \text{ (} 4f_{\text{fond}} = 132 \text{ [Hz])}$$

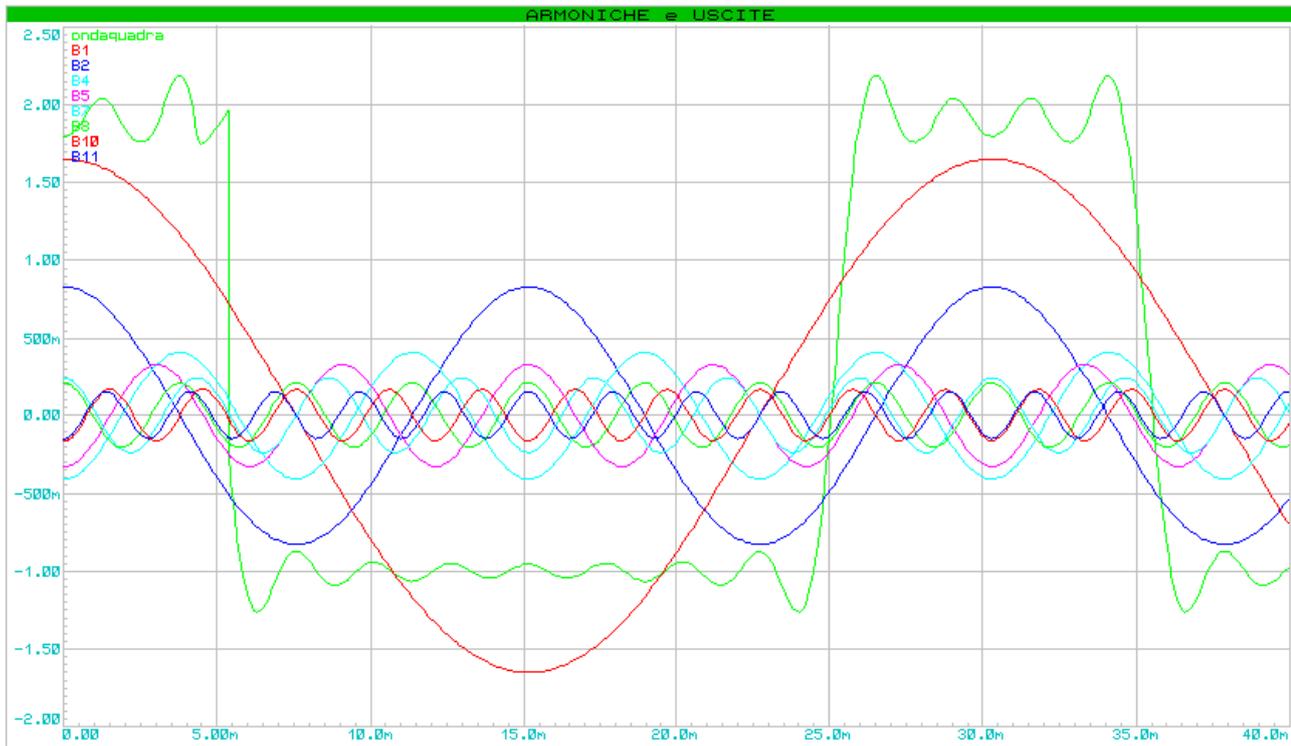
$$B_8 = 0.207 \text{ (} 8f_{\text{fond}} = 264 \text{ [Hz])}$$

Lo sviluppo di Fourier di quest'onda quadra può essere così approssimato:

$$v(t) = 1.65 \cos(\omega_0 t) + 0.83 \cos(2\omega_0 t) - 0.41 \cos(4\omega_0 t) - 0.33 \cos(5\omega_0 t) + 0.24 \cos(7\omega_0 t) + 0.207 \cos(8\omega_0 t) - 0.165 \cos(10\omega_0 t) - 0.150 \cos(11\omega_0 t)$$

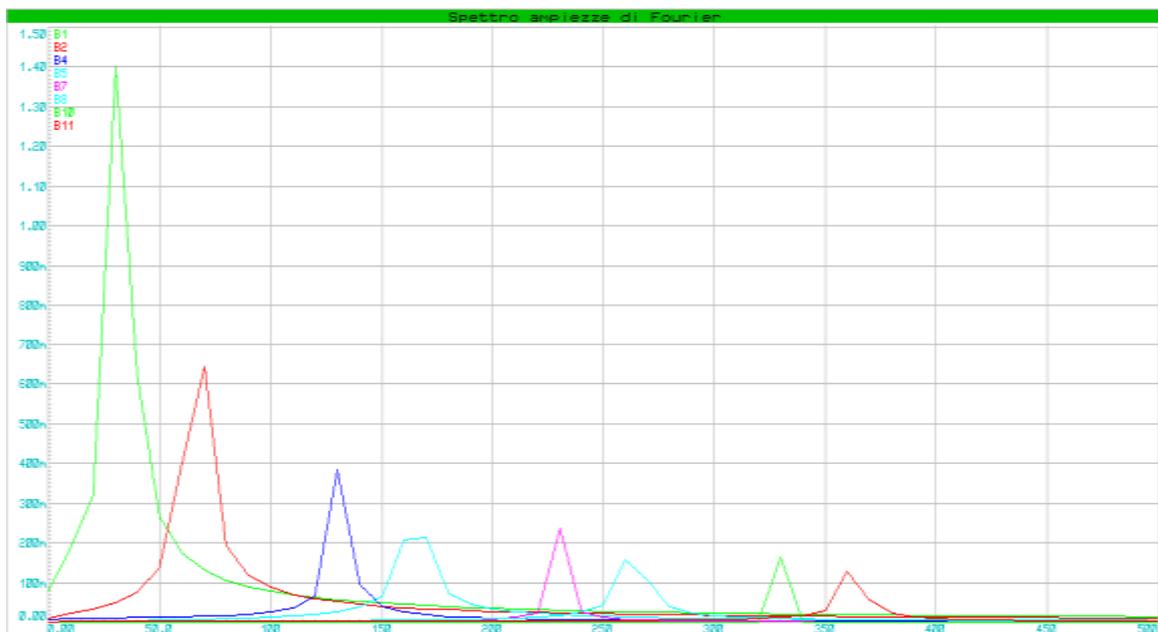
Ecco i grafici ottenuti:

Diagramma analogico



- l'armonica fondamentale (sinusoide rossa a frequenza minore delle altre) determina la frequenza del segnale d'uscita (la pseudo onda rettangolare in verde);
- nei punti in cui le varie armoniche sono in fase fra loro, sono situati i fronti di salita e di discesa del segnale d'uscita;
- il segnale d'uscita non è propriamente un'onda rettangolare, dal momento che i suoi livelli superiori e inferiori non sono rettilinei. Tuttavia, aumentando il numero delle armoniche in ingresso, è possibile ottenere un segnale che si avvicina di più all'onda quadrata desiderata;
- il segnale d'uscita rispecchia le caratteristiche progettuali.

Spettro delle ampiezze di Fourier



Il presente spettro delle ampiezze di Fourier mostra, in modulo, l'ampiezza delle armoniche utilizzate e le loro frequenze, con queste ultime multiple dispari ciascuna della frequenza fondamentale. Non figurano le armoniche con frequenze multiple dispari della frequenza fondamentale, poiché non utilizzate in quanto aventi coefficienti di Fourier nulli.

Relativamente alla rappresentazione dello spettro reale, le considerazioni sono analoghe a quelle relative ai precedenti tipi di onde realizzati.

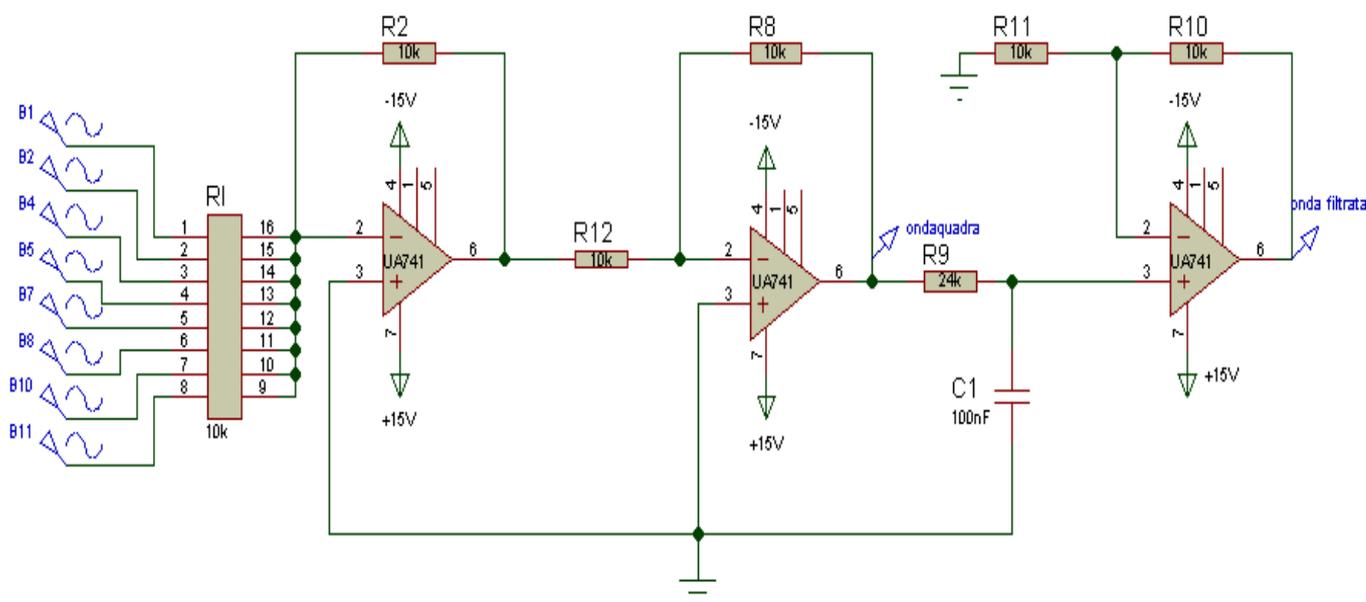
Seconda parte

STUDIO DELL'INFLUENZA DI UNA RETE FILTRANTE ATTIVA SU UN SEGNALE PERIODICO DIGITALE REALIZZATO MEDIANTE IL PROPRIO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

In seconda fase, è stata studiata l'influenza di una rete filtrante attiva su un segnale periodico digitale realizzato tramite il proprio sviluppo in serie di Fourier.

A tal proposito, è stata presa in considerazione l'ultima forma d'onda realizzata:

si presenta la rete circuitale con collegato in un uscita un filtro attivo passa-basso RC del 1° ordine non invertente:

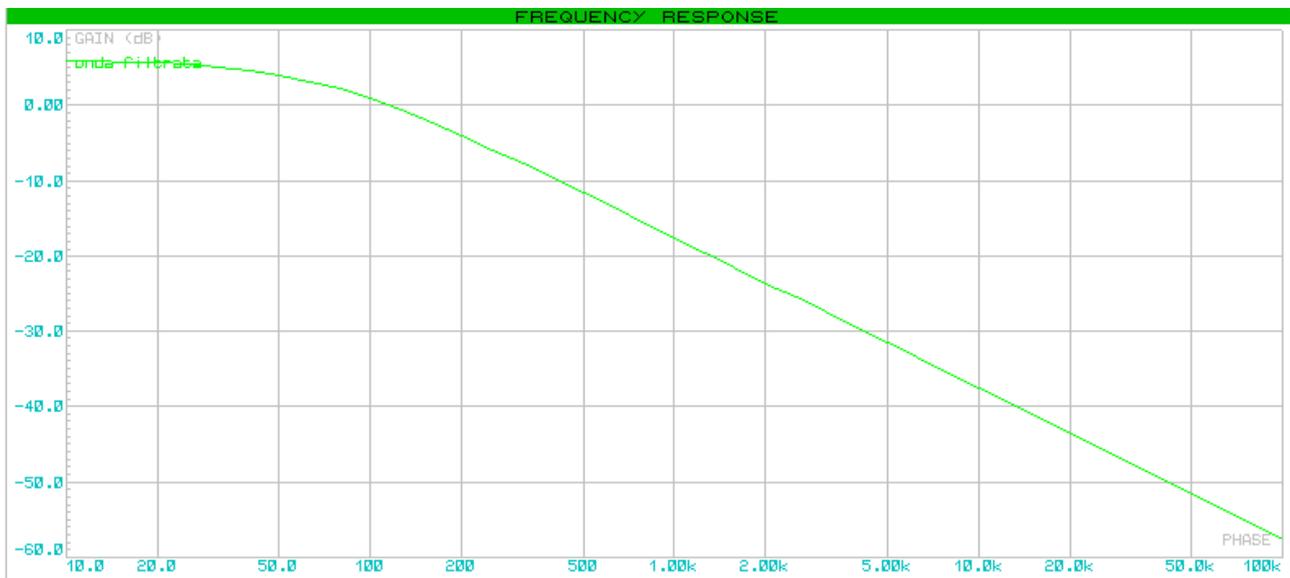


Il filtro in questione ha una frequenza di taglio avente valore numerico pari al doppio della frequenza dell'armonica fondamentale ($f_t = 2f_{fond} \rightarrow f_t = 66 \text{ [Hz]}$) e un guadagno statico alle basse frequenze di +6 [dB] (rapporto d'anello = 2).

Ponendo arbitrariamente il valore del condensatore $C = 100 \text{ [nF]}$, si ricava il valore della resistenza d'ingresso

$$R_9 = \frac{1}{2\pi f_t C} = \frac{1}{2\pi * 66[\text{Hz}] * 100[\text{nF}]} \sim 24 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

Per rigore, si illustra anche il diagramma di Bode del modulo della funzione di risposta in frequenza del filtro attivo in esame (pendenza della curva = 20 [dB/dec]):



Il filtro, agendo in modo selettivo nei confronti delle frequenze delle armoniche che compongono la forma d'onda realizzata nella rete a due stadi, attenua maggiormente le armoniche aventi frequenza maggiore della frequenza di taglio, oltre introdurre uno sfasamento sulle loro forme d'onda.

Conoscendo l'espressione del modulo e della fase della funzione di risposta in frequenza della rete filtrante, è possibile calcolare l'attenuazione e lo sfasamento che ciascuna armonica subisce attraversando il filtro:

$$|G(j\omega)| = \left(1 + \frac{R_{10}}{R_{11}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_9 C_1)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg(\omega R_9 C_1)$$

Per i valori di pulsazione, ricavabili da quelli di frequenza, delle armoniche impiegate, si ottengono i rispettivi valori di attenuazione e sfasamento di ciascuna armonica (i valori di attenuazione non sono espressi in [dB]):

$ G(j\omega_0) = 1.8$	$\angle G(j\omega_0) = -26^\circ$
$ G(j2\omega_0) = 1.4$	$\angle G(j2\omega_0) = -45^\circ$
$ G(j4\omega_0) = 0.9$	$\angle G(j4\omega_0) = -63^\circ$
$ G(j5\omega_0) = 0.7$	$\angle G(j5\omega_0) = -68^\circ$
$ G(j7\omega_0) = 0.6$	$\angle G(j7\omega_0) = -74^\circ$
$ G(j8\omega_0) = 0.5$	$\angle G(j8\omega_0) = -76^\circ$
$ G(j10\omega_0) = 0.39$	$\angle G(j10\omega_0) = -79^\circ$
$ G(j11\omega_0) = 0.36$	$\angle G(j11\omega_0) = -80^\circ$

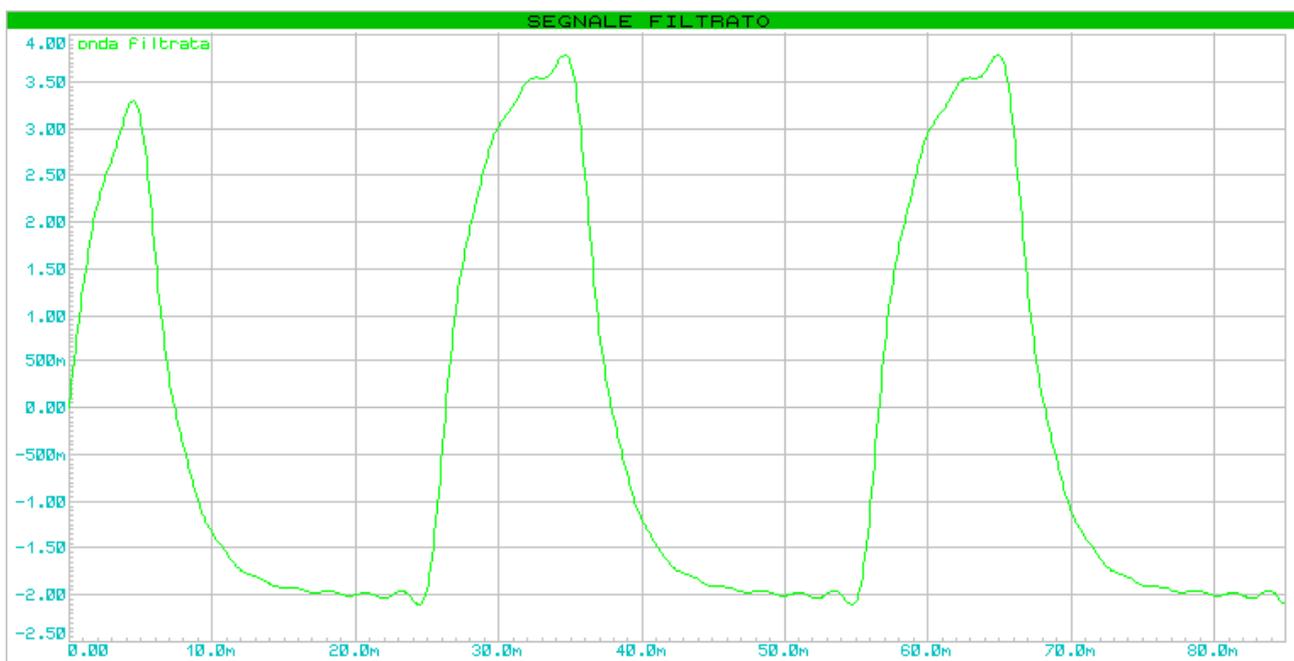
Lo sviluppo in serie di Fourier del segnale, tenendo conto delle attenuazioni e dagli sfasamenti introdotti dal filtro, è il seguente, dove i nuovi coefficienti di Fourier sono dati dal prodotto dei coefficienti originari moltiplicati per l'attenuazione introdotta dal filtro):

$$v^*(t) = 1.65 * 1.8 \cos(\omega_0 t - 26^\circ) + 0.83 * 1.4 \cos(2\omega_0 t - 45^\circ) - 0.41 * 0.9 \cos(4\omega_0 t - 63^\circ) - 0.33 * 0.7 \cos(5\omega_0 t - 68^\circ) + 0.24 * 0.6 \cos(7\omega_0 t - 74^\circ) + 0.207 * 0.5 \cos(8\omega_0 t - 76^\circ) - 0.165 * 0.39 \cos(10\omega_0 t - 79^\circ) - 0.150 * 0.36 \cos(11\omega_0 t - 80^\circ)$$

Svolgendo i calcoli:

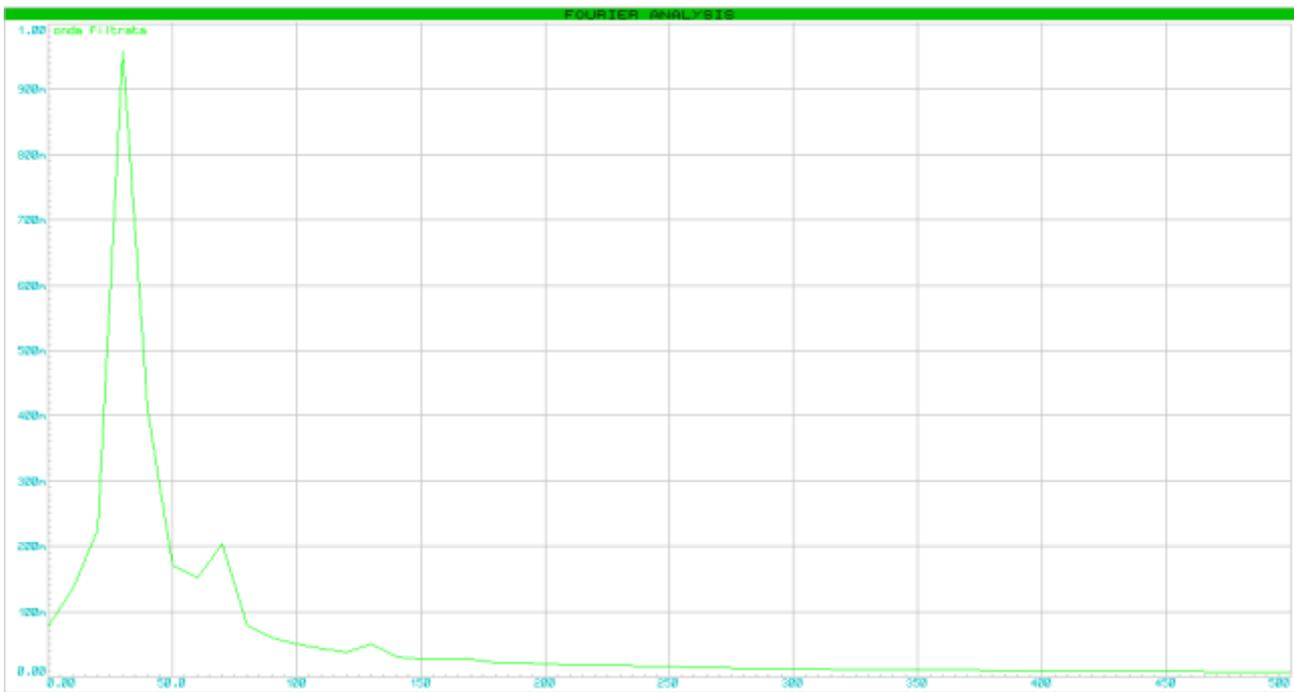
$$v^*(t) = 2.97 \cos(\omega_0 t - 26^\circ) + 1.162 \cos(2\omega_0 t - 45^\circ) - 0.369 \cos(4\omega_0 t - 63^\circ) - 0.231 \cos(5\omega_0 t - 68^\circ) + 0.144 \cos(7\omega_0 t - 74^\circ) + 0.104 \cos(8\omega_0 t - 76^\circ) - 0.064 \cos(10\omega_0 t - 79^\circ) - 0.054 \cos(11\omega_0 t - 80^\circ)$$

Ecco come si presenta l'andamento dell'onda rettangolare dopo aver attraversato la rete filtrante:



Il segnale rappresentato assomiglia all'onda rettangolare originaria, anche se è evidente la conseguenza dell'azione del filtro sulla sua forma d'onda; si nota che i fronti che collegano i fronti del segnale sopra raffigurato sono riconducibili agli andamenti esponenziali dei transitori di carica e scarica del condensatore posto nella rete RC.

Lo spettro delle ampiezze di Fourier dell'onda "filtrata" è il seguente:



Si nota che è presente una sola ampiezza significativa a una frequenza compresa fra gli 0 e i 50 [Hz]; si evidenzia anche che, per $f > 50$ [Hz], le ampiezze (come precedentemente affermato e matematicamente dimostrato) risultano sempre più attenuate, conseguenza della selettività del filtro nei confronti della frequenza per valori di essa superiori alla frequenza di taglio del filtro stesso (che ricordiamo essere pari a 66 [Hz], ossia il doppio della frequenza dell'armonica fondamentale).