

# FILTRI - DEFINIZIONI

1. Un filtro è un circuito elettrico selettivo nei confronti della frequenza dei segnali applicati in ingresso.
  - In altre parole , segnali di diversa frequenza non sono elaborati allo stesso modo
  - Si individua una Banda di frequenze, detta Banda Passante, in cui il Modulo del Guadagno di tensione del filtro, cioè il rapporto tra  $|V_{out}|$  e  $|V_{in}|$  , è quasi costante ( in realtà compreso tra  $G_{max}$  e  $0.7 G_{max}$  ).
  - Al di fuori di questa banda , i segnali sono attenuati , in misura sempre maggiore quanto più ci si allontana dalla B.Passante .
  - I segnali sono altresì sfasati , fuori dalla Banda Passante , cioè la tensione  $V_{out}$  sarà in ritardo o in anticipo sulla  $V_{in}$  , a seconda del tipo di filtro.
2. La Frequenza di taglio è la  $f$ . che separa la **Banda Passante ( Banda Chiara )** dalla **Banda Attenuante ( Banda Scura )**.

$$\begin{aligned} |G| \text{ dB} &= 20 \text{ Log } [ |G_{max}| / \sqrt{2} ] = 20 \text{ Log } |G_{max}| - 20 \text{ Log } \sqrt{2} = \\ &= 20 \text{ Log } |G_{max}| - 3 \text{ [ dB ]} \end{aligned}$$

### 3. Ci sono 2 categorie di Filtri :

- F. passivi ( composti solo da R, L, C )
- F. Attivi

( c'è anche un amplificatore , p.e. un A.O. )

Ogni categoria è composta da 4 tipi di filtri :

- F. Passa - basso
- F. Passa - alto
- F. Passa – banda
- F. Elimina – banda

### 4. L' **Ordine** di un filtro dipende dal n° di componenti reattivi indipendenti presenti nel circuito.

L' ordine è anche il massimo fra i gradi dei 2 polinomi presenti a Numeratore e Denominatore della **Funzione di Trasferimento ( F.d.t. )**

## 5. Indipendenza :

2 o più componenti sono indipendenti se non sono direttamente in serie o in parallelo , infatti :

- n induttori in serie sono equivalenti a un unico induttore avente Induttanza :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

- n condensatori in parallelo sono equivalenti a un unico condensatore avente Capacità

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

6. La Funzione di Trasferimento ( FdT ) è la funzione , nel Dominio di  $j\omega$  , che esprime il legame tra una grandezza di OUT (  $V$  o  $I$  ) e una omologa grandezza di IN , in un circuito elettrico :

$$\bar{G}(j\omega) = \bar{V}_{out} / \bar{V}_{in}$$

**Condizione di fisica realizzabilità : nella FdT la differenza tra i gradi dei polinomi a Numeratore e Denominatore è , al max , 1 .**

7. Impedenza  $\rightarrow Z = V / I = R + jX \leftarrow$  Reattanza

$\uparrow$   
**Resistenza**

**Resistenza R** : rapporto tra tensione e corrente in un Resistore .  
E' un n° Reale , con qualunque tipo di regime ( è un ' approssimazione !  
I componenti resistivi possono solo dissipare energia elettrica

**Reattanza X** : è la resistenza, al variare della frequenza ,dei componenti reattivi , cioè Induttori e Condensatori .

I componenti reattivi non dissipano energia ma la conservano  
(energia del campo elettrostatico per il condensatore, del campo magnetico per l'induttore )

- Induttori e condensatori hanno un'impedenza reattiva , cioè puramente immaginaria .

$$\overline{Z_L} = j\omega L$$

$$\overline{Z_C} = 1 / j\omega C$$

il che significa che l'ampiezza del rapporto tra  $V$  e  $I$  dipende dalla frequenza di lavoro e che  $V$  e  $I$  sono sfasate di  $90^\circ$

(  $V$  in anticipo su  $I$  nell'induttore ,  $V$  in ritardo su  $I$  nel condensatore )

# La teoria dei filtri

I filtri per radiofrequenza impiegati comunemente negli impianti d'antenna si possono dividere in quattro tipologie:

- **passa-basso**
- **passa-alto**
- **passa-banda**
- **elimina banda (notch)**

e sono costituiti da condensatori, fissi o variabili, e bobine (induttanze) d'opportuno valore, collegati tra loro secondo uno schema opportuno.

- Il filtro **passa-basso** attenua i segnali di frequenza **superiore** ad una certa frequenza di taglio, che è definita sulla base dei valori di capacità , induttanza e resistenza presenti nel circuito.
- Il filtro passa-alto attenua i segnali di frequenza **inferiore** ad una certa frequenza di taglio.
- Il filtro passa-banda è una combinazione di un filtro passa-alto con un filtro passa-basso.
- Il filtro elimina banda, detto anche notch, è una combinazione di filtri che attenuano fortemente i segnali che si trovano all'**interno** di una banda ristretta, lasciando invece inalterati i segnali che sono al di fuori.

Questo tipo di filtro è particolarmente utile per ridurre i problemi d'intermodulazione e frequenza immagine causati dai forti segnali delle stazioni di radiodiffusione che trasmettono nella banda **88-108 [ Mhz ]**.

I parametri che caratterizzano un filtro per radiofrequenza sono:

- **la frequenza di taglio**  
(per passa-basso e passa-alto)
- **la frequenza di centro banda e il fattore di qualità**  
per i filtri passa-banda e notch
- **la corrispondente attenuazione in dB e la pendenza**  
della curva di guadagno in Banda attenuata



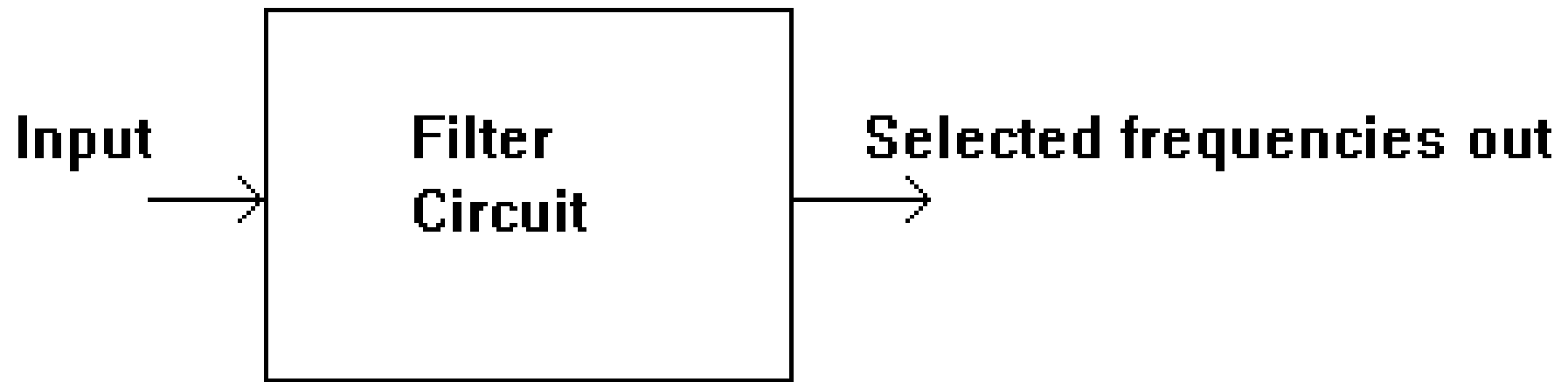
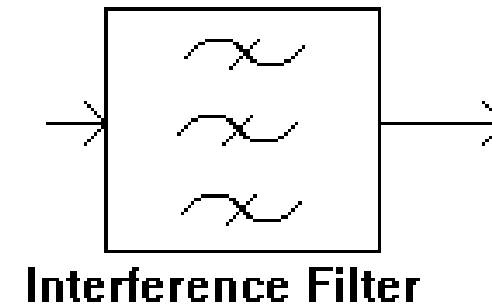
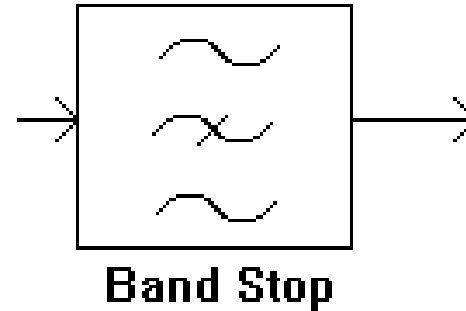
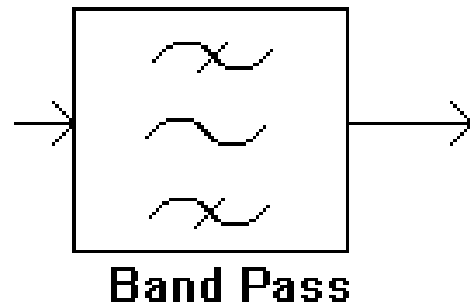
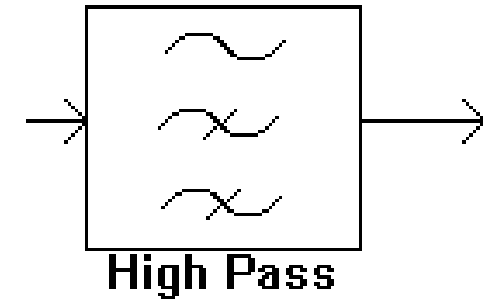
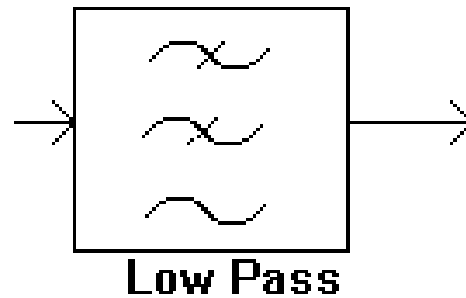
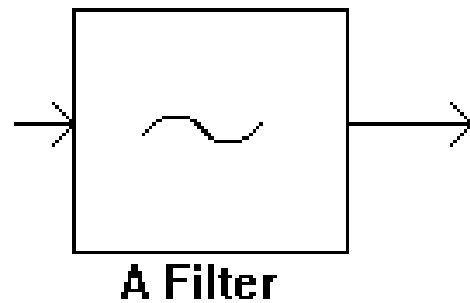


fig. 1

Questo è lo schema a blocchi di un generico filtro avente in ingresso un generico segnale , con in uscita il segnale modificato in vario modo ( **attenuato e sfasato** ) a seconda della frequenza .

**Nell'immagine successiva vengono raffigurati i rispettivi blocchi di un filtro generico, di un passa-basso, di un passa-alto, passa - banda, elimina - banda:**



**BLOCK DIAGRAM SYMBOLS FOR FILTERS**

# Filtri elementari passivi

Si dicono passivi perché non vi sono componenti attivi : la resistenza ,il condensatore e l'induttore non dissipano potenza, quindi sono passivi.

I filtri passivi si dividono in 2 categorie :

**1°) A polo singolo** : sono basati sulla combinazione di resistori, con condensatori e/ o induttori.

Sono circuiti **RC, RL** .

Sono chiamati "**filtri passivi**", perché il loro funzionamento non dipende da una fonte di alimentazione esterna e il segnale di **OUT** ha ampiezza minore o al max uguale a quella del segnale di **IN**.

➤ Gli **induttori** ( posti in serie a un generatore ) bloccano i segnali ad **alta frequenza** e conducono quelli a bassa frequenza, mentre i **condensatori** si comportano al contrario.

[ Infatti l' induttore è un c.c. in continua e un c.a. in HF , il condensatore viceversa ]

➤ Un filtro in cui il segnale passi in serie attraverso un induttore, o nel quale un condensatore fornisca un percorso verso terra, presenta quindi minore attenuazione ai segnali a bassa frequenza rispetto a quelli ad alta frequenza ed è perciò un filtro **passa - basso**.

➤ Se il segnale passa in serie attraverso un condensatore, o ha un percorso a terra attraverso un induttore, allora il filtro presenta un'attenuazione minore per i segnali ad alta frequenza rispetto a quelli a bassa frequenza, ed è un filtro **passa-alto**.

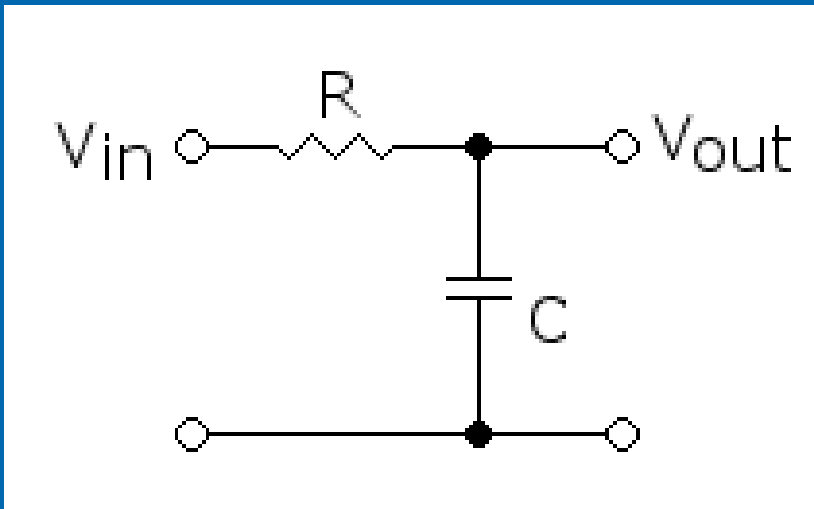
- I resistori da parte loro non hanno la proprietà di selezionare le frequenze, ma sono aggiunti a condensatori e induttori per determinare le **costanti di tempo** del circuito, e quindi le frequenze a cui essi rispondono.
- A frequenze molto alte ,maggiori di circa **100 [ MHz ]**, a volte gli induttori sono semplicemente fatti da un singolo anello o da una striscia di lamina metallica, e i capacitori da strisce metalliche adiacenti.
- Tali strutture, che sono utilizzate anche per fare adattamento di impedenza, sono chiamate **stub**.

## 2°) Multipolari : LC , RLC

I filtri del secondo ordine ( o di ordine superiore ) sono misurati con il loro **fattore di qualità** o **fattore Q**.

Si dice che un filtro ha un Q alto, se seleziona o inibisce un intervallo di frequenze stretto, relativamente alla sua **frequenza centrale**.

Vediamo ora i vari tipi di filtri passivi a polo singolo.



## FILTRO PASSIVO PASSA-BASSO del 1° ORDINE

Il circuito rappresenta un filtro **passa-basso**.

Si dice filtro passa basso un circuito che fa passare in uscita solo i segnali di frequenza più bassa di un'altra **prefissata**.

La frequenza prefissata, che viene scelta a piacere, viene detta **frequenza di taglio** e la indichiamo con  $f_c$ .

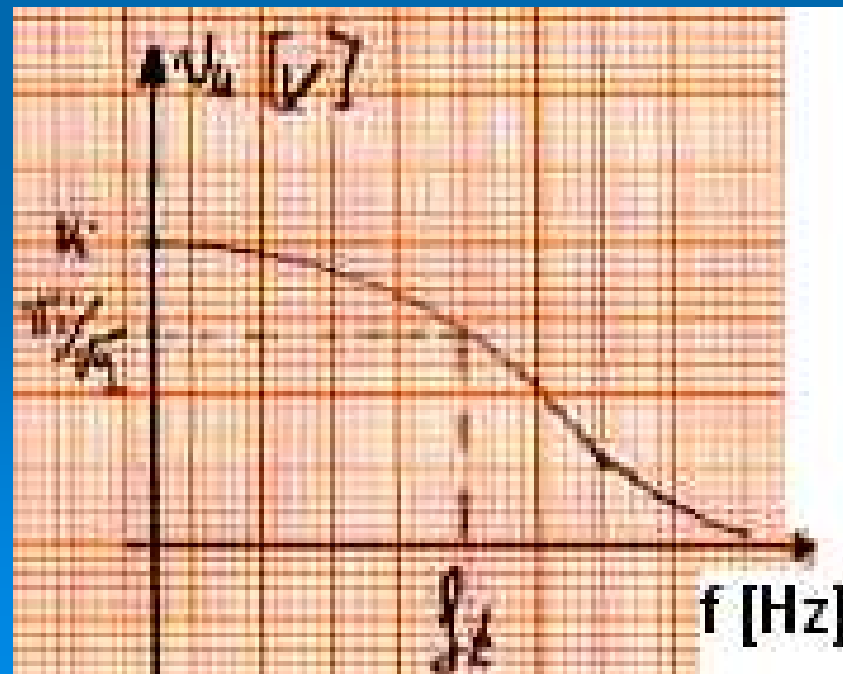
Possiamo vedere come il condensatore sia un componente che conduce molto i segnali di alta frequenza mentre attenua e non fa passare quelli di bassa frequenza .

Nel nostro caso, però, il C non è posto in serie tra ingresso e uscita ma in parallelo all'uscita, quindi i segnali di alta frequenza vengono messi in corto circuito dal C verso massa, e non li ritroviamo in uscita, dove arrivano solo quelli di bassa frequenza .

Il filtro si comporta perciò da passa basso.

Per calcolare la frequenza di taglio si usa la seguente formula :  $f_t = 1/2 \pi RC$

- Possiamo vedere come a **frequenza zero** l'uscita assume il massimo valore ( 1 ), cioè  $V_o = V_i$
- In corrispondenza della frequenza di taglio  $f_t$  l'uscita assume il valore  $V_o = V_i / \sqrt{2}$
- Si dice frequenza di taglio di un filtro quella frequenza alla quale l'attenuazione del filtro, cioè il **rapporto tra tensione di uscita e tensione di ingresso** , è uguale a  $1/\sqrt{2}$  , cioè :  $V_o/V_i = 1 / \sqrt{2}$
- Per frequenze superiori alla  $f_t$  vediamo che la curva scende verso il basso e quindi la tensione in uscita risulta molto attenuata.





$$\underline{G(j\omega)} = \underline{V_{out}} / \underline{V_{in}} = \underline{Z_c} / (\underline{R} + \underline{Z_c}) = 1 / (1 + j\omega RC)$$

$$|G| = 1 / \sqrt{[1 + (\omega RC)^2]}$$

$$G(j0) = 1 \rightarrow 0 \text{ [ dB ]}$$

$$G(j\infty) = 0 \rightarrow -\infty \text{ [ dB ]}$$

$$|G(j\omega_t)| = 1 / \sqrt{2} \rightarrow -3 \text{ [ dB ]}$$

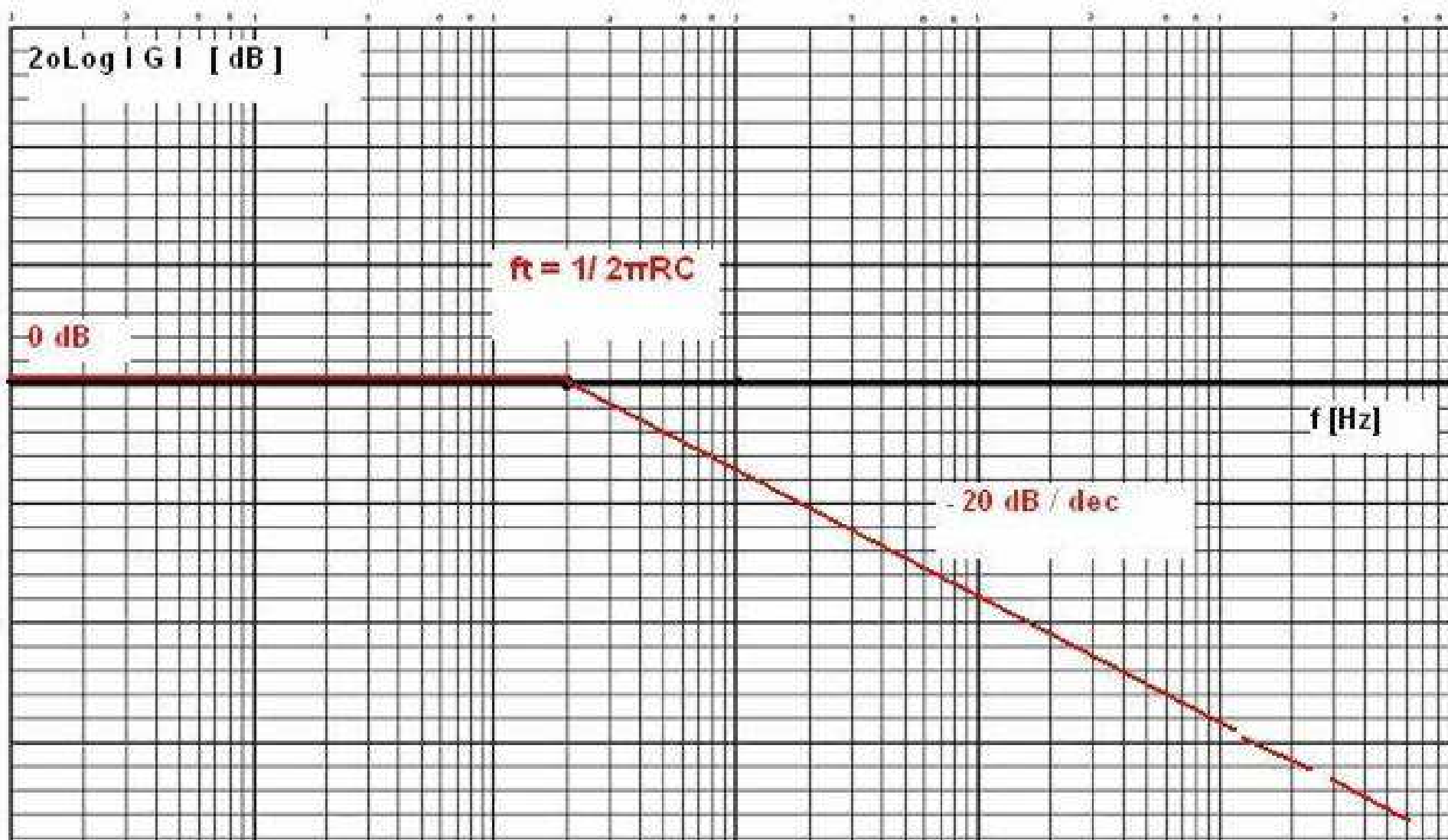
$$\text{Fase di } G = -\text{artan}(\omega RC)$$

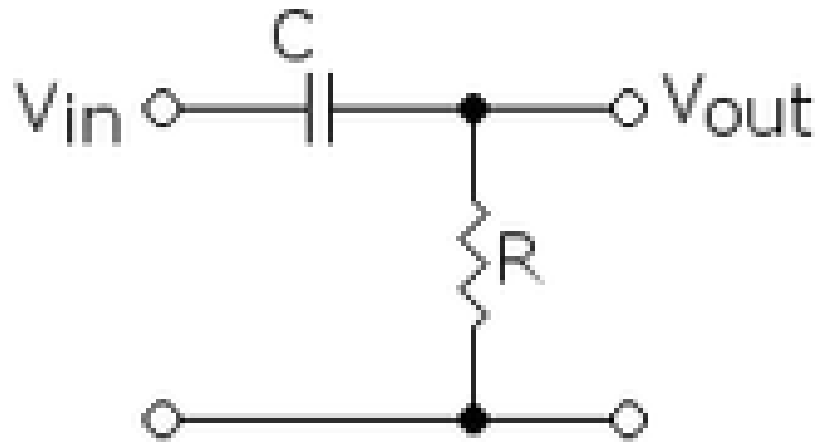
$$\text{Fase (per } \omega = 0) = 0^\circ$$

$$\text{Fase (per } \omega \rightarrow \infty) = -90^\circ$$

$$\text{Fase (per } \omega = \omega_t) = -45^\circ$$

## Curva ideale del Guadagno di un generico filtro RC passa-basso ( in scale logaritmiche )





## FILTRO PASSIVO PASSA – ALTO del 1° ORDINE

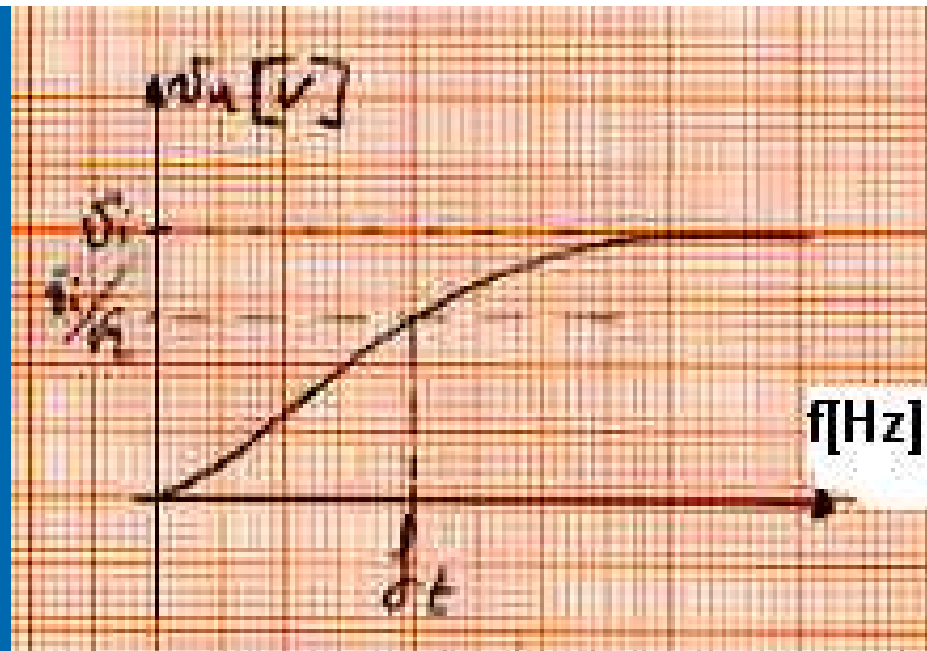
Il circuito rappresentato è un filtro passa-alto.

Si dice filtro passa alto un circuito che fa passare in uscita solo i segnali di frequenza più alta della frequenza di taglio **ft**.

Possiamo vedere come il condensatore sia un componente che conduce molto i segnali di alta frequenza mentre attenua e non fa passare quelli di bassa frequenza.

Nel nostro caso il condensatore è posto in serie tra ingresso e uscita quindi i segnali di alta frequenza trovano una resistenza molto bassa e li ritroviamo in uscita, mentre per quelli di bassa frequenza il  $C$  si comporta come un circuito aperto, quindi tali segnali non riescono a passare.

Il circuito si comporta perciò da filtro passa alto..

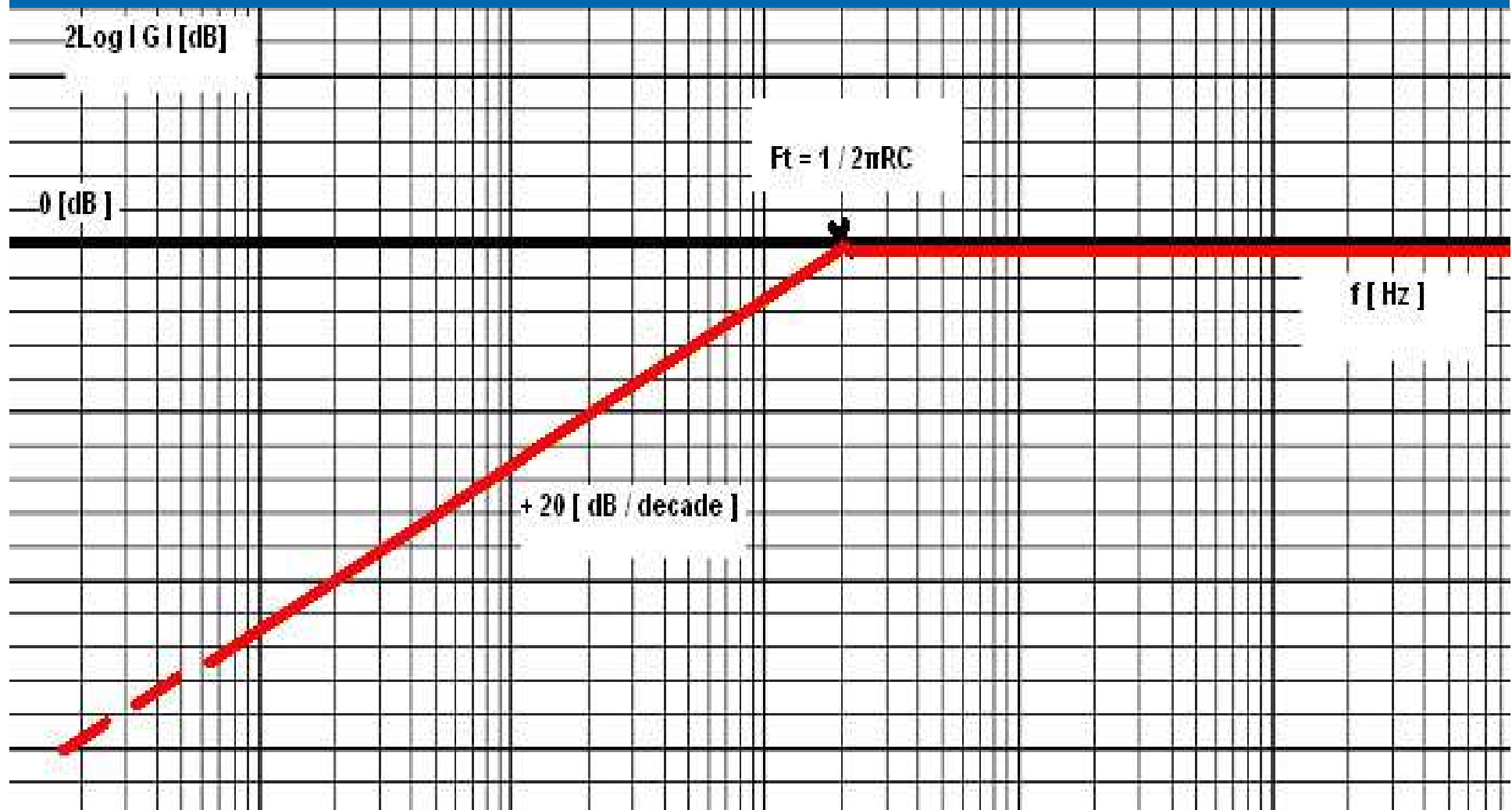


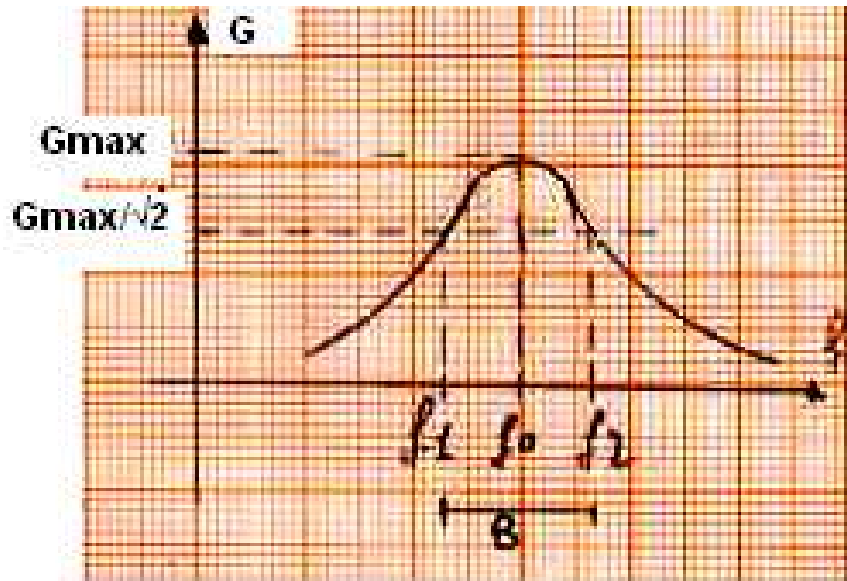
Per calcolare la frequenza di taglio si usa la seguente formula:

$$F_t = 1 / 2 \pi RC$$

- Se indichiamo con  $V_i$  la tensione di ingresso e con  $V_o$  la tensione di uscita il diagramma del filtro è in funzione della frequenza.
- Possiamo vedere come a frequenza zero l'uscita assume il valore zero; per frequenze inferiori a  $f_t$  la curva si mantiene molto bassa, quindi i segnali di bassa frequenza non passano.
- In corrispondenza della frequenza di taglio  $f_t$  l'uscita assume il valore  $v_u = v_i / \sqrt{2}$
- Per frequenze superiori a  $f_t$  vediamo che la curva va verso il valore massimo  $v_i$ .

## Curva ideale del Guadagno di un generico filtro RC passa - alto ( in scale logaritmiche )





## FILTRO PASSIVO PASSA-BANDA del 2° ORDINE

Un filtro passa-banda è un dispositivo che permette il passaggio di segnali con frequenza compresa in un certo intervallo ( la banda passante ) e attenua quelli con frequenza al di fuori di esso.

Un esempio di un circuito analogico che si comporta come un filtro passa-banda è un circuito RLC (una rete elettrica formata da resistore-induttore-condensatore).

I filtri passa-banda possono anche essere creati dalla combinazione di un filtro passa-basso e un filtro passa-alto.

- Un filtro ideale dovrebbe avere una banda passante perfettamente piatta, non dovrebbe avere né attenuazione né guadagno per i segnali di frequenza all'interno della banda e dovrebbe attenuare completamente tutte i segnali con frequenza al di fuori di essa.
- Inoltre, dovrebbe avere un intervallo ben determinato, con una suddivisione netta tra frequenze all'interno o all'esterno della banda passante ( cioè il grafico del Guadagno dovrebbe essere un rettangolo).
- Nella pratica, nessun filtro passa-banda è realizzabile.
- Il filtro non attenua completamente tutte i segnali di frequenza al di fuori della banda voluta; in particolare, esiste una regione contigua alla banda passante dove i segnali sono poco attenuati.
- Tra la frequenza di taglio inferiore  $f_1$  e quella superiore  $f_2$  di una banda passante, si trova la frequenza di risonanza  $f_0$ , in corrispondenza della quale il guadagno del filtro è massimo.
- La banda passante del filtro è semplicemente la differenza tra  $f_2$  e  $f_1$ .

# Filtri attivi

- Sfruttando essenzialmente il diverso comportamento di elementi reattivi, C ed L, al variare della frequenza ,si realizzano filtri di vario tipo con prestazioni e strutture molto differenziate.
- Se la rete filtrante comprende solo elementi passivi, il filtro è detto passivo, e deve avere, necessariamente, su tutto l'asse delle frequenze un guadagno di potenza inferiore o uguale a 1
- Se è presente un componente attivo ( tipicamente un amplificatore operazionale ), il filtro è di tipo attivo, ed è possibile che abbia, in un certo intervallo di frequenze, un guadagno di potenza maggiore di 1.
- Gli amplificatori operazionali sono frequentemente utilizzati nel progetto dei filtri attivi. Possono avere Q elevati e raggiungere la risonanza senza utilizzo di induttori
- La loro frequenza superiore è però limitata dalla larghezza di banda degli amplificatori utilizzati.



**I filtri attivi si differenziano da quelli passivi per le seguenti proprietà :**

- **Amplificano il segnale filtrato : Presentano quindi un elemento attivo (amplificatore) che permette di attribuire al segnale in uscita l'ampiezza più opportuna.**
- **Si può progettare il filtro indipendentemente dal carico e si possono collegare in cascata più celle filtranti senza che esse interagiscano tra di loro. I componenti attivi grazie alla loro bassa impedenza**
- **E' possibile evitare l'uso di induttanze: infatti è possibile ottenere filtri attivi combinando reti RC con amplificatori operazionali. Ciò comporta una diminuzione dell'ingombro e una diminuzione dei disturbi di natura elettromagnetica. Solo alle alte frequenze le bobine sono ancora usate.**
- **Permettono di realizzare facilmente filtri di ordine elevato: Possono infatti essere collegati in cascata filtri del 1°, 2° ordine per realizzare filtri di ordine superiore.**
- **Si ha maggiore facilità nella progettazione e nella realizzazione. Esistono in commercio integrati che per il completamento del filtro richiedono solo l'aggiunta di pochi componenti.**

- I filtri attivi realizzati con l'impiego di amplificatori operazionali presentano numerosi vantaggi rispetto ai filtri passivi: la presenza dell'amplificatore operazionale oltre a consentire un eventuale guadagno rende la progettazione del filtro indipendente dalle reti del filtro stesso.
- D'altra parte i filtri passivi non necessitano di un'alimentazione e possono agire anche a frequenze molto elevate, irraggiungibili da un filtro attivo data la limitata larghezza di banda dell'operazionale (dipendente anche dal guadagno).
- La classificazione dei filtri viene effettuata oltre che per il tipo di filtraggio anche in relazione al grado dei polinomi al Numeratore e al Denominatore della funzione di trasferimento, detto **ordine del filtro**.
- La **selettività** dei filtri attivi viene misurata mediante la loro capacità di attenuare i segnali di frequenza esterna alla banda passante, inoltre la selettività è legata alla **pendenza** della curva di guadagno.

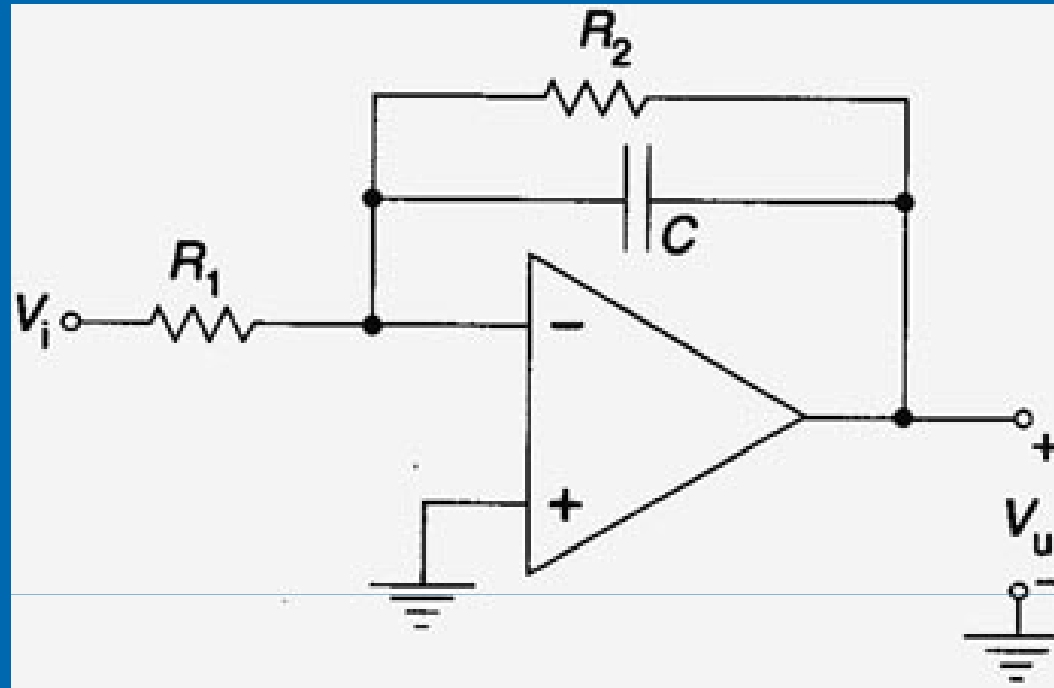
Andiamo ora ad analizzare i diversi tipi di filtri:

**FILTRI PASSA BASSO ( LP )**

**FILTRI PASSA ALTO ( HP )**

**FILTRI PASSA BANDA ( BP )**

# 1. Filtro attivo passa-basso con A.O. ( invertente )



Il circuito sopra rappresenta un filtro attivo passa-basso ( invertente) con AO.

Alle basse frequenze il condensatore può essere considerato un ramo aperto (reattanza molto elevata), per cui la sua amplificazione è :  $A_f = - R_2 / R_1$

Il suo limite di banda è :  $f_t = B = 1 / 2\pi R_2 C$

Ricaviamo la f.d.t. :

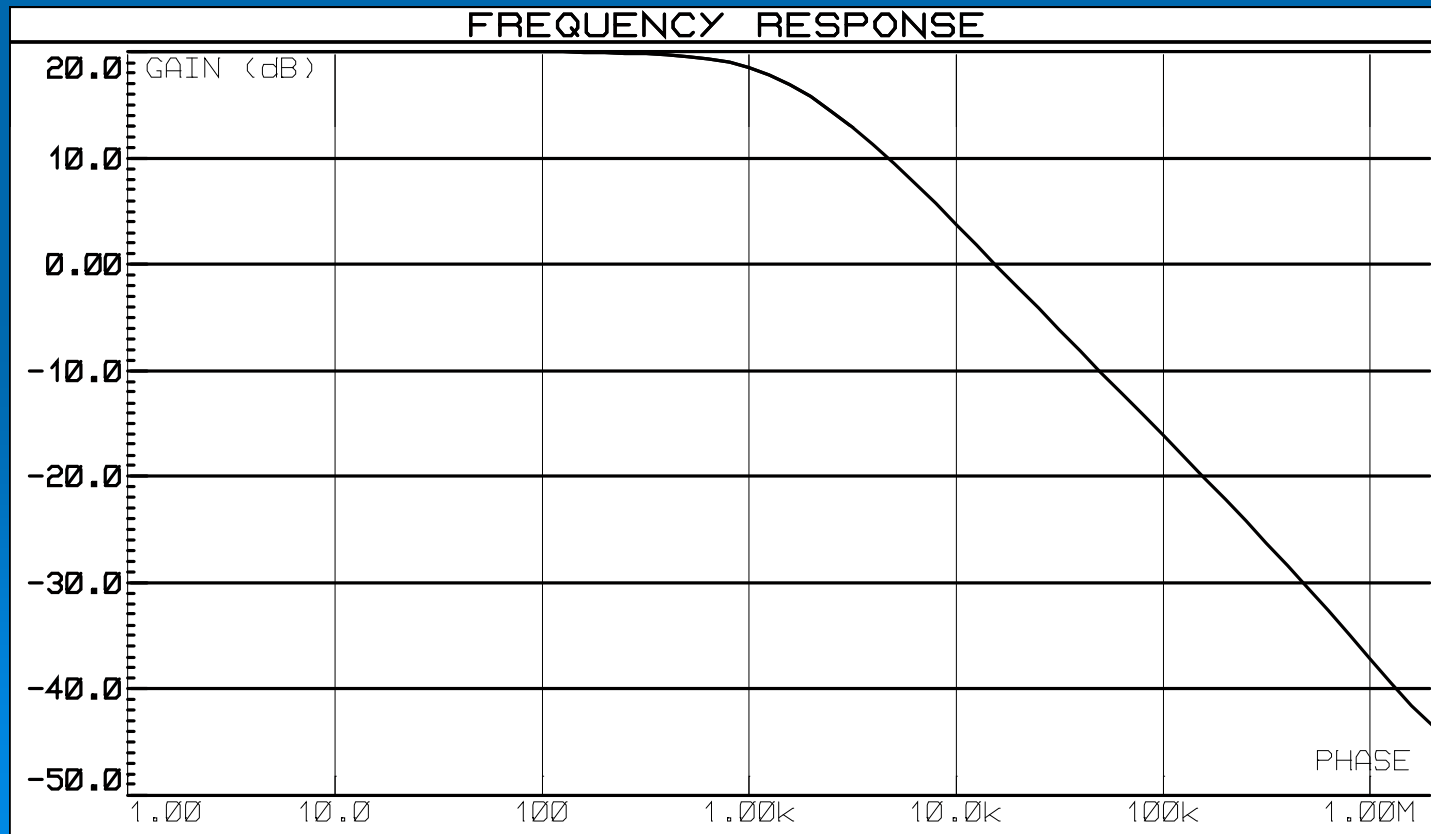
$$\overline{G} = - \overline{Z_p} / R1 \quad \overline{Z_p} = ( R2 * 1 / j\omega C ) / ( R2 + 1 / j\omega C ) = R2 / ( 1+ j\omega R2 C )$$

$$\overline{G} = - R2 / ( R1 + j\omega R1R2 C ) \quad \text{da cui si vede come} \quad G ( j0 ) = - R2 / R1$$

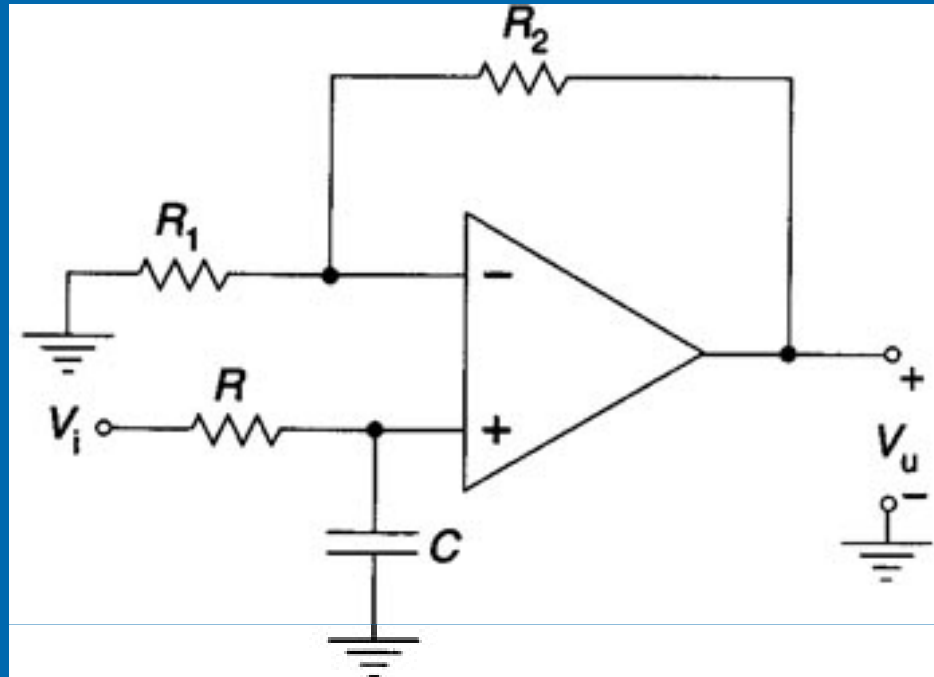
mentre  $G(j\infty) = 0$

Curva del guadagno con  $R1 = 10 \text{ k}$   $R2 = 100 \text{ K}$   $C = 1 \text{ [ nF ]}$

$f_t = 1590 \text{ [ Hz ]}$

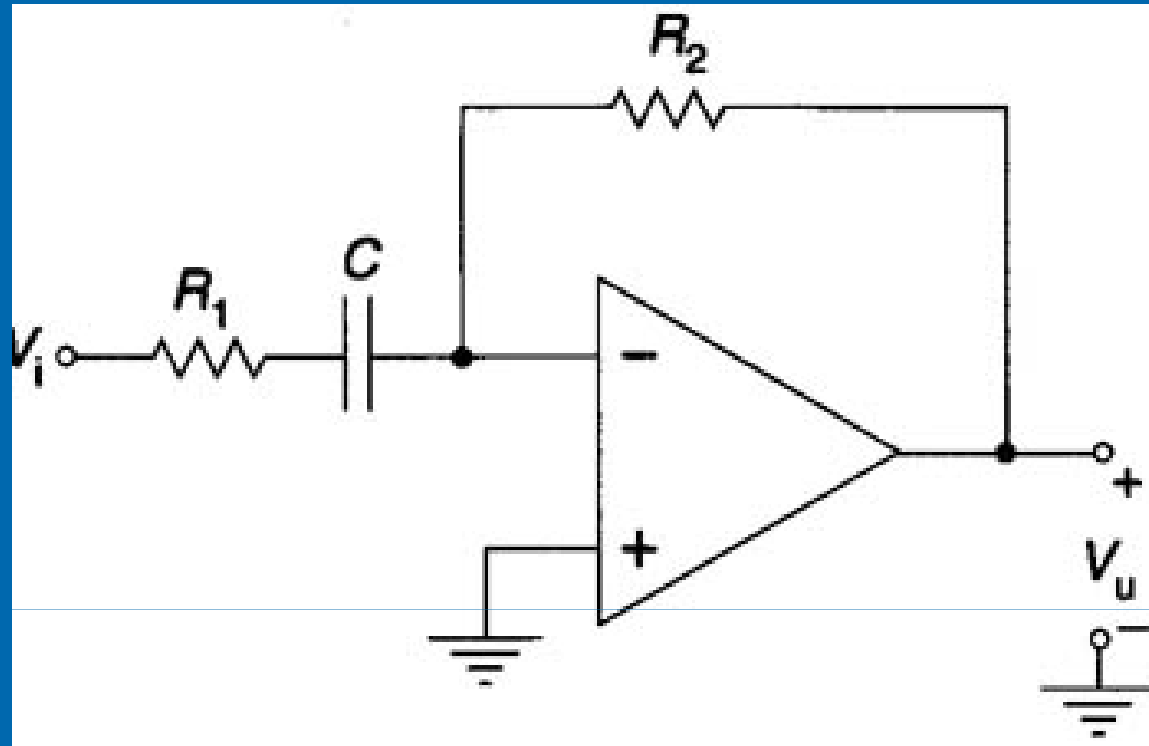


## 2. Filtro attivo passa - basso con A.O. ( non invertente )



- Il circuito sopra rappresenta un filtro attivo passa-basso ma questa volta è **non invertente** perchè il segnale d'ingresso  $V_i$  è inserito sull'ingresso (+) , quello non invertente dell'operazionale.
- Il condensatore in continua è un circuito aperto, per cui  $V_c = V_i$
- L' amplificazione , in **LF** , è :  $G_{LF} = 1 + ( R_2 / R_1 )$
- Invece in **HF** il condensatore è un corto circuito, per cui  $V_c = 0$  e anche  $V_u = 0 \rightarrow G_{HF} = 0$
- Il suo limite di banda è :  $f_t = B = 1 / 2\pi RC$

### 3. Filtro attivo passa - alto con AO ( invertente )



Il circuito sopra è un **filtro attivo passa-alto (invertente)** con A.O.  
Alle alte frequenze il condensatore può essere considerato come un cortocircuito ( reattanza **X<sub>c</sub>** trascurabile).

La sua amplificazione , in **HF** , è :  **$G_{HF} = - R_2 / R_1$**

In **LF**, invece, il Condensatore non fa passare il segnale, per cui  **$G_{LF} = 0$**

Il suo limite di banda è :  **$f_t = 1 / 2\pi R_1 C$**

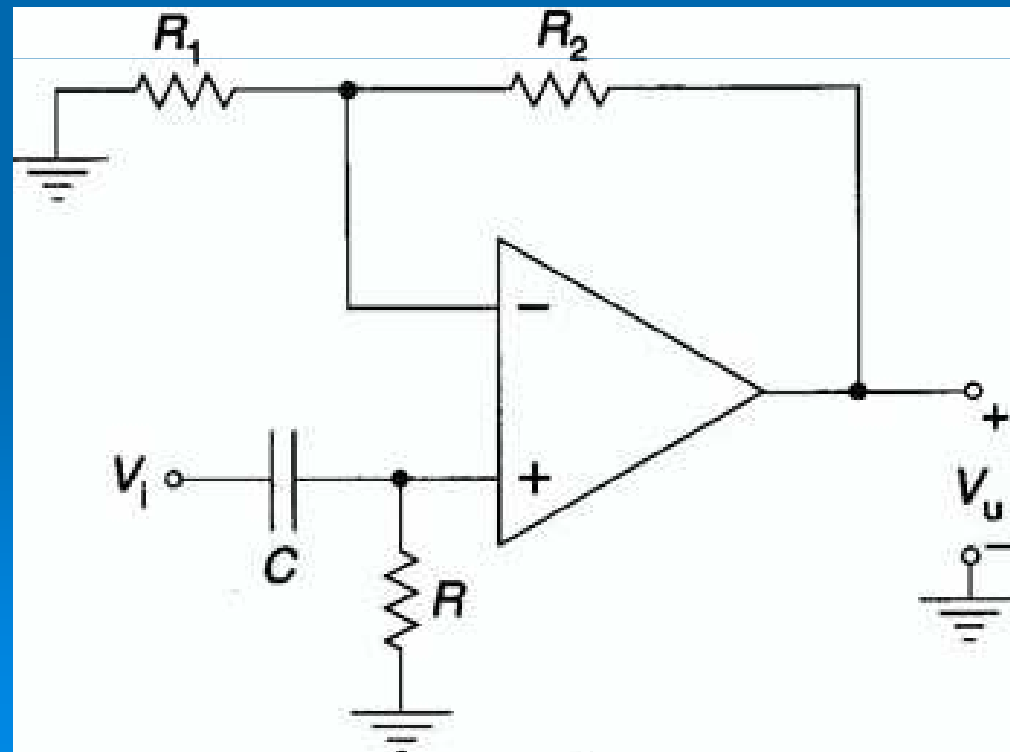
## 4. Filtro attivo passa-alto con A.O. ( non invertente )

Il circuito sopra rappresenta sempre un filtro attivo passa-alto, ma questa volta **non invertente**, perchè avente il segnale d'ingresso sull'ingresso non invertente dell'operazionale.

Il condensatore è considerato anche adesso come un cortocircuito.

La sua amplificazione è :  $G_{HF} = 1 + (R_2 / R_1)$

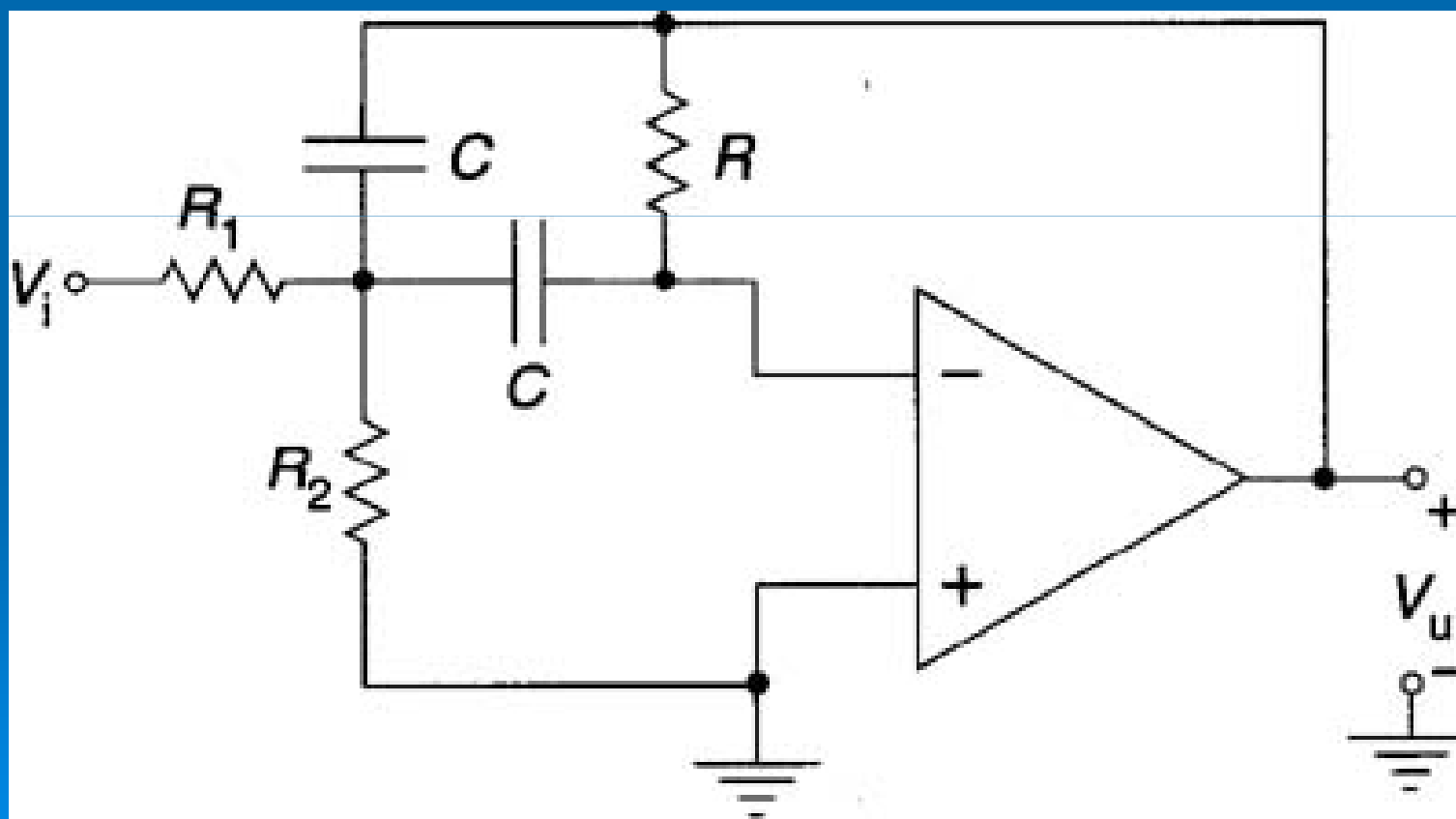
Il suo limite di banda è :  $f_t = 1 / 2\pi RC$



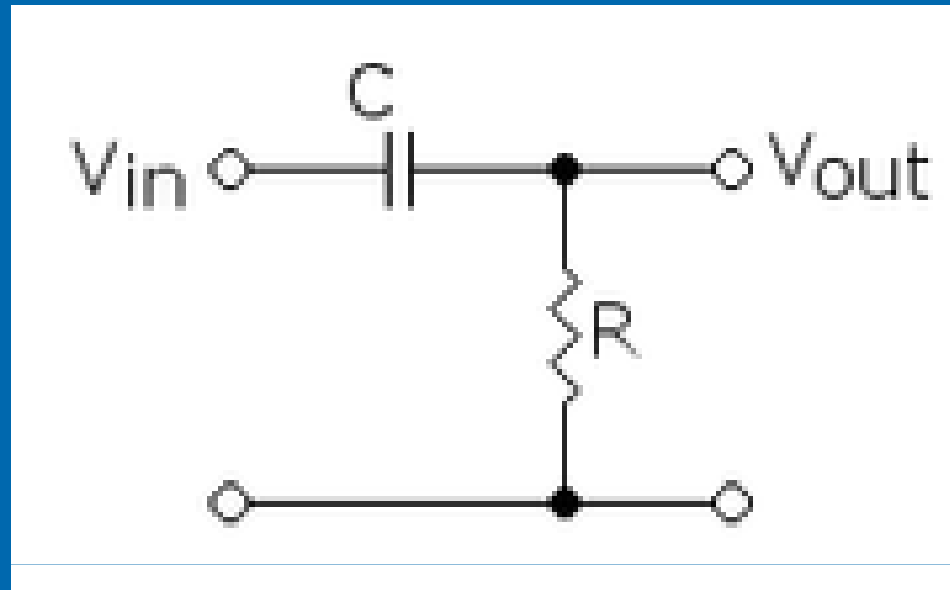


## 5. Filtro attivo passa-banda con AO

La sua amplificazione è :  $G_{MF} = - R / 2 R_1$



## Applicazioni e considerazioni Esercizio n°1:



Si vuole realizzare mediante un quadripolo RC un filtro **passa-alto**, disponendo di una resistenza  $R=10$  [K $\Omega$ ] e di una capacit   $C = 0,2$  [  $\mu$ F ] .

Calcolare la frequenza di taglio  $f_t$  , sapendo che il segnale che entra all'ingresso del quadripolo ha una  $V_{eff} = 220$  [V ] e una frequenza  $f = 100$  [ Hz ]

# Svolgimento

➤ Conoscendo il valore dei due componenti che formano il filtro, possiamo subito calcolare la  $f_t$ .

$$\begin{aligned} \text{➤ } f_t &= 1/2\pi RC = 1/ (2 * 3,14 * 10^4 * 0,2 * 10^{-6}) = \\ &= 1/ (6,28 * 10^4 * 0,2 * 10^{-6}) = \\ &= 1 / (12,56 * 10^{-3}) = \mathbf{79,6 [ Hz ]} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } V_i = V_c + V_r = 1/ j \omega C * I + R * I = I * (R + 1/ j \omega C)$$

$$\begin{aligned} X_c &= 1/\omega C = 1/2\pi f * C = 1/ (6,28 * 100 * 0,2 * 10^{-6}) = \\ &= 1/ 125,6 * 10^6 \approx 8 [K\Omega] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R - j * X_c \rightarrow \bar{Z} = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{10^8 + 64 * 10^6} = \sqrt{10^6 * (100 + 64)} = \\ &= \sqrt{10^6} * \sqrt{100 + 64} = 10^3 * \sqrt{164} = 12,8 [ K\Omega ] \end{aligned}$$

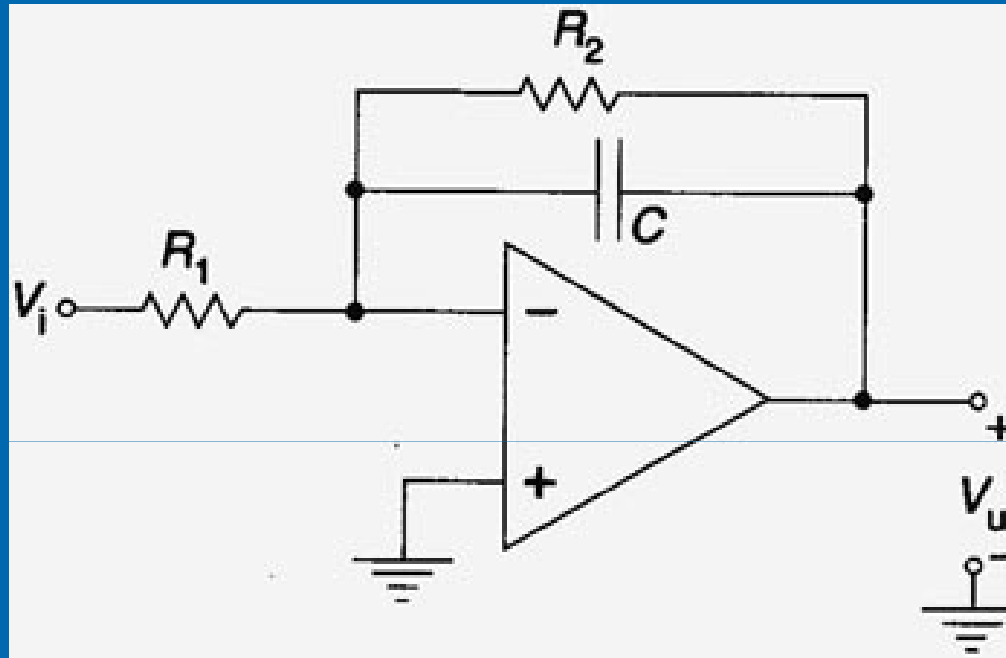
$$\bar{I} = \bar{V}_i / \bar{Z} = 220 / 12,8 * 10^3 = 17,18 [ mA ]$$

$$\bar{V}_u = R * \bar{I} = 10 * 10^3 * 17,18 * 10^{-3} = \mathbf{171,8 [ V ]}$$

**Segnali a frequenze minori della frequenza di taglio vengono filtrati (attenuati e sfasati), mentre segnali a frequenze maggiori di  $f_t$  arrivano in uscita non attenuati nè sfasati.**

## Esercizio n°2

Dimensionare un **filtro passa-basso attivo** del 1° ordine, di tipo invertente, volendo ottenere un' amplificazione  $G_{LF} = -10$  e una banda passante  $B = 1$  [KHz] . Si conosce il valore della sola resistenza  $R_1$  , pari a  $1$  [K $\Omega$ ] .



**Svolgimento:**

$$G_{LF} = - R_2/R_1 = -10 \rightarrow R_2/R_1=10 \rightarrow R_2 = R_1*10 = 1*10 = 10 \text{ [ K}\Omega \text{ ]}.$$

Conoscendo il valore di  $R_2$  , basta ora calcolare il valore di capacità da utilizzare.

$$f_t = 1/2\pi R_2 * C \rightarrow C = 1/2\pi f_t R_2 \rightarrow = 1/ 2*3,14*10^4*10^3 = 1/62,8*10^6 = 0,016 \text{ [}\mu\text{F]} = 16 \text{ [ nF ]}$$