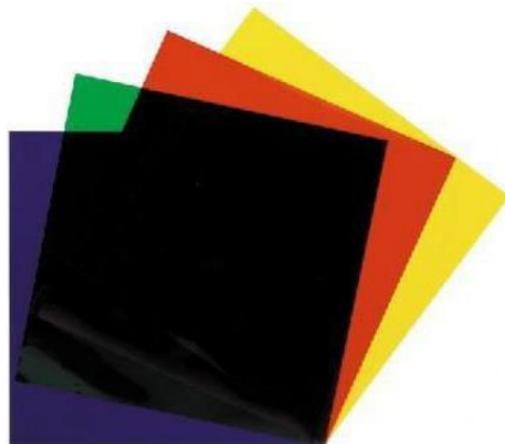


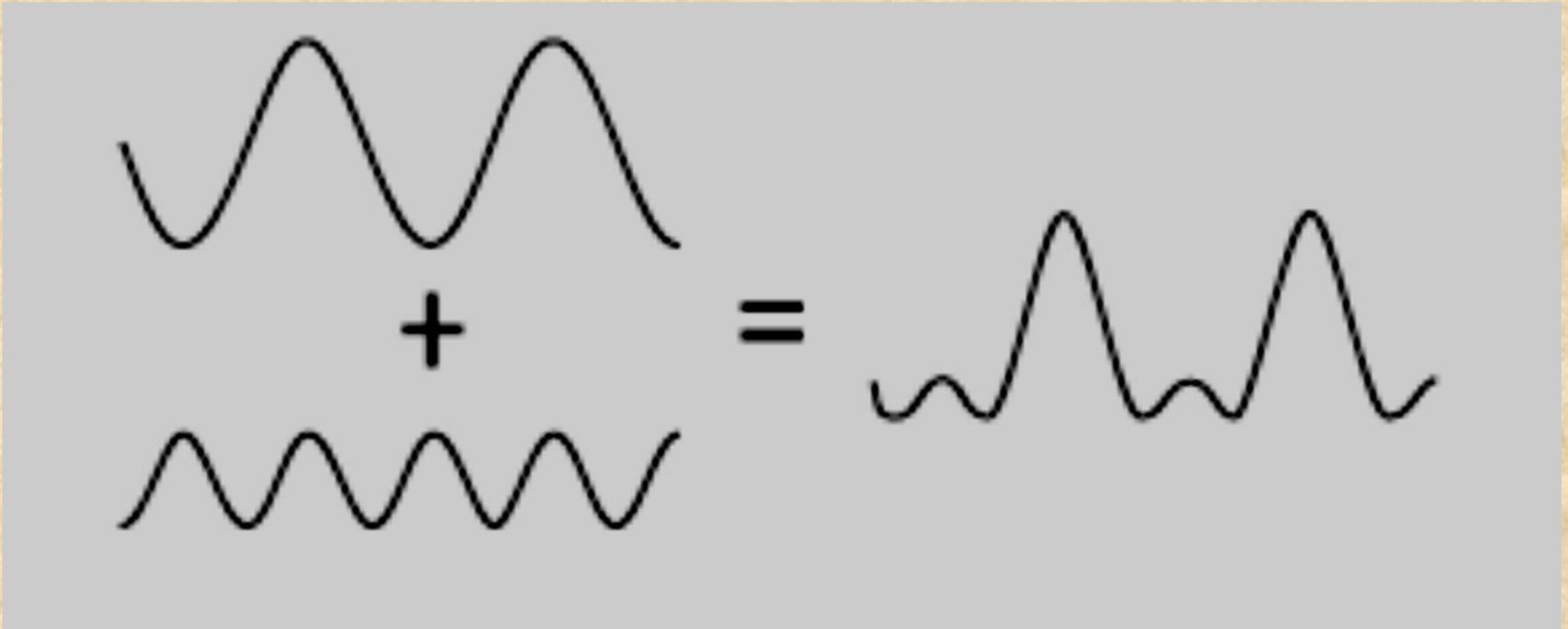


FOURIER & FILTRI

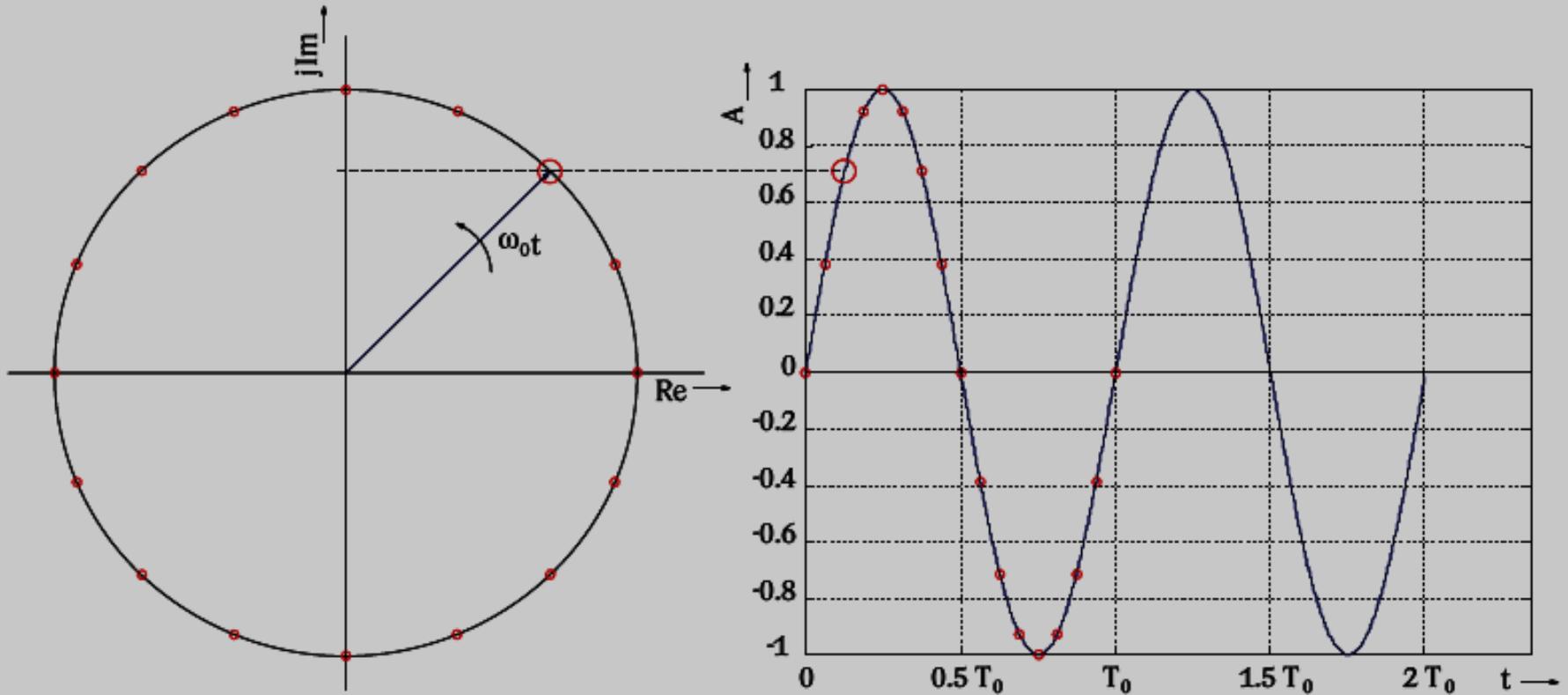


La teoria delle **Serie di Fourier** dimostra che un segnale periodico (con frequenza **f_0**) può essere prodotto **sommando** assieme un numero infinito di **componenti armoniche** (onde sinusoidali o cosinusoidali), aventi opportune ampiezze e frequenze, più un eventuale componente continua.

- Le frequenze sono multiple della frequenza **fondamentale f_0**
- Le ampiezze diminuiscono con l'aumento della frequenza della componente armonica



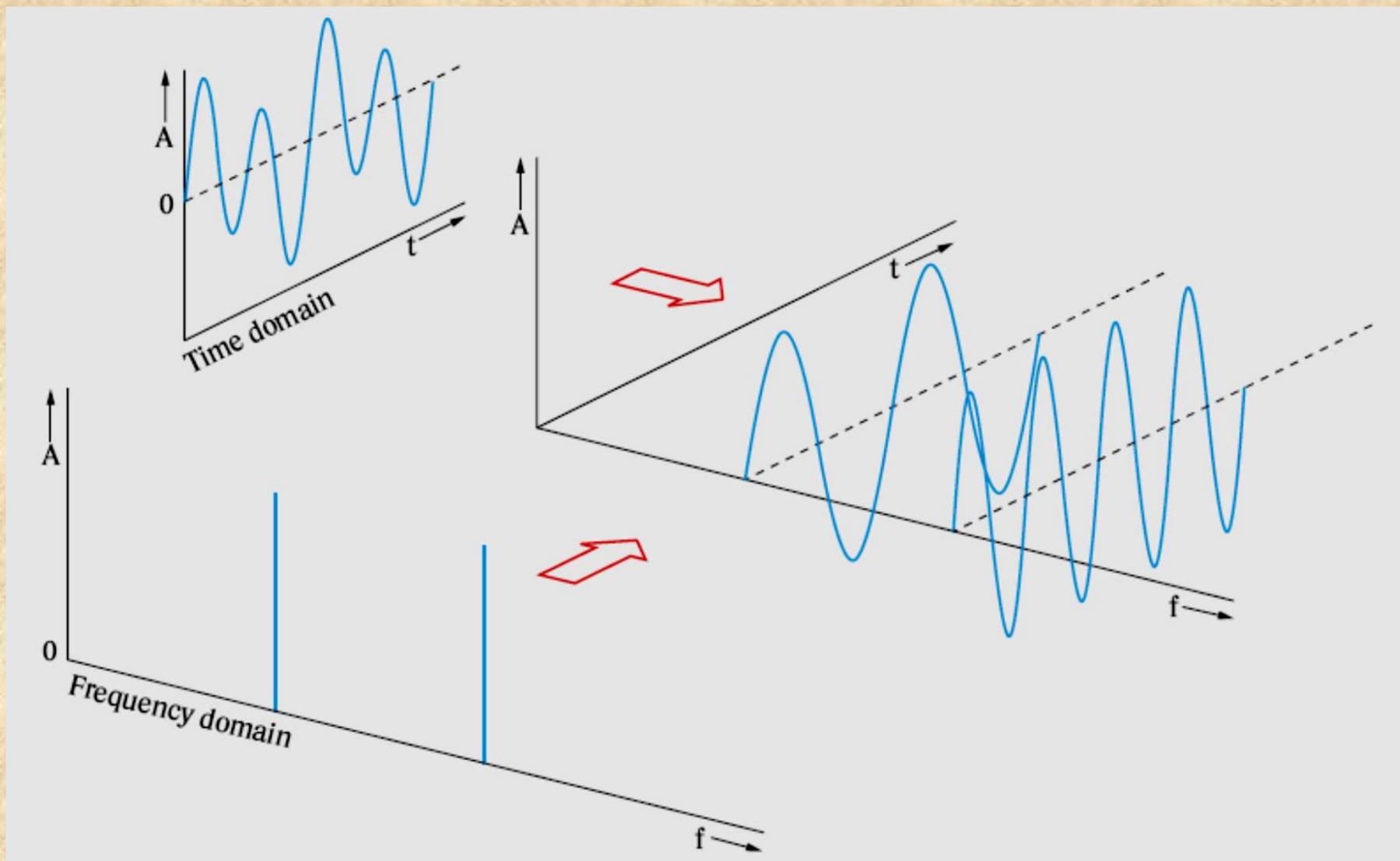
Segnale sinusoidale rappresentato proiettando un vettore di rotazione sull'asse immaginario del **piano di Gauss**



$$V(t) = 1 * \sin(\omega_0 t) \quad \text{dove} \quad \omega_0 t = 2\pi/T_0 \cdot t = 2\pi f_0 \cdot t$$

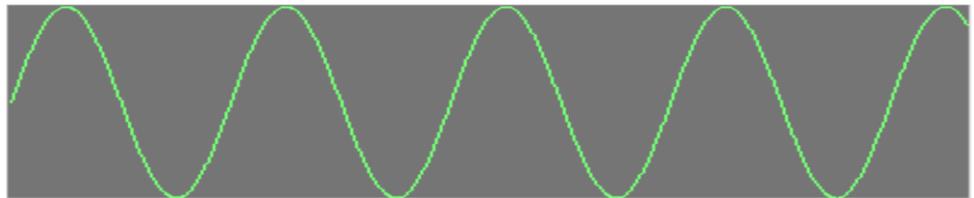
$$T_0 = 1/f_0$$

Segnali esaminati nel dominio del tempo e della frequenza

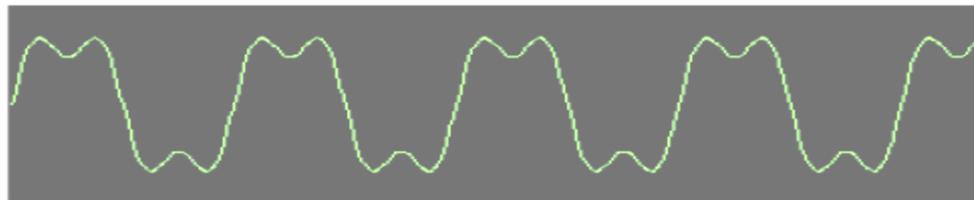


Costruzione di un'onda quadra per sommatoria di onde sinusoidali.

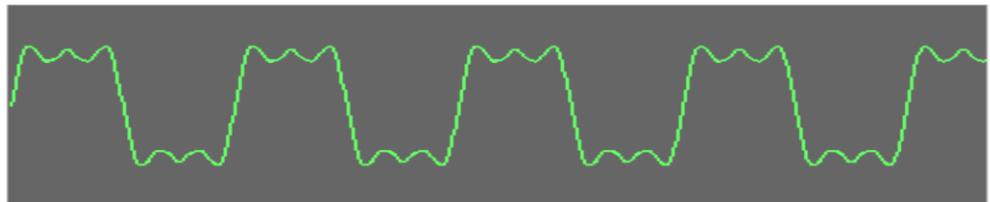
Partiamo con un'onda sinusoidale



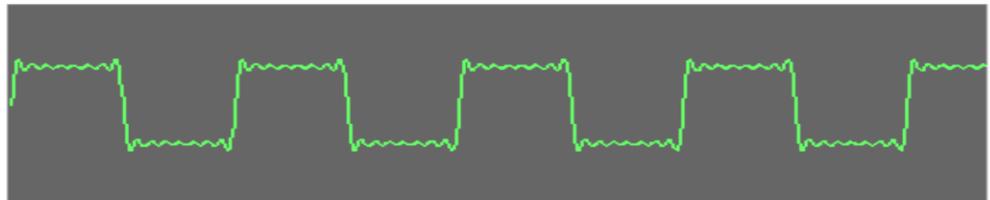
Aggiungiamone un'altra di ampiezza **1/3** della precedente e di frequenza **3** volte maggiore (nota come la **terza armonica**)



Aggiungiamone un'altra di ampiezza **1/5** della prima e di frequenza **5** volte maggiore (la **quinta armonica**)



Procedendo fino alla 15° armonica, il *pattern* che si ottiene è il seguente :



I FILTRI

Un filtro è un circuito che **attenua (e sfasa)** le componenti armoniche a frequenze selezionate del segnale di ingresso, producendo così in uscita un segnale di forma diversa (**DISTORSIONE**)

In teoria il filtro ideale **NON** dovrebbe attenuare le frequenze desiderate, mentre l'attenuazione dovrebbe essere infinita per quelle indesiderate.

Molti segnali (es: quelli biomedici) devono essere, in varia misura, “**condizionati**” dai filtri, prima di essere visualizzati o registrati in forma analogica o digitale.

Durante e dopo l'amplificazione il filtro provvede a trattare il segnale con diversi scopi:

- Separare il segnale utile dal rumore
- Eliminare segnali non desiderati mescolati a quello utile
- Eliminare le componenti a frequenze esterne alla banda utile del segnale
- Eliminare le componenti a frequenze molto basse (compresa la continua)

Dal momento che i filtri coprono molti ordini di grandezza di frequenze e ampiezze, è comune descrivere le caratteristiche del filtro usando una scala logaritmica. I decibel permettono di stabilire i rapporti tra due tensioni o tra due correnti.

$$\text{dB} = 20 \log \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$$

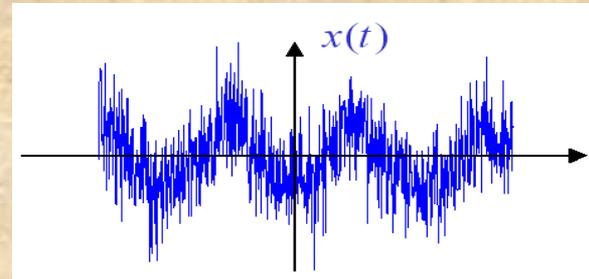
Quindi, 20 dB corrispondono ad un rapporto $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$ pari a 10,
infatti : $20 \cdot \log(10/1) = 20 \text{ dB}$

-3dB corrispondono ad un rapporto di tensione pari a $1/\sqrt{2} = 0.707$
infatti : $20 \cdot \log(1/\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$

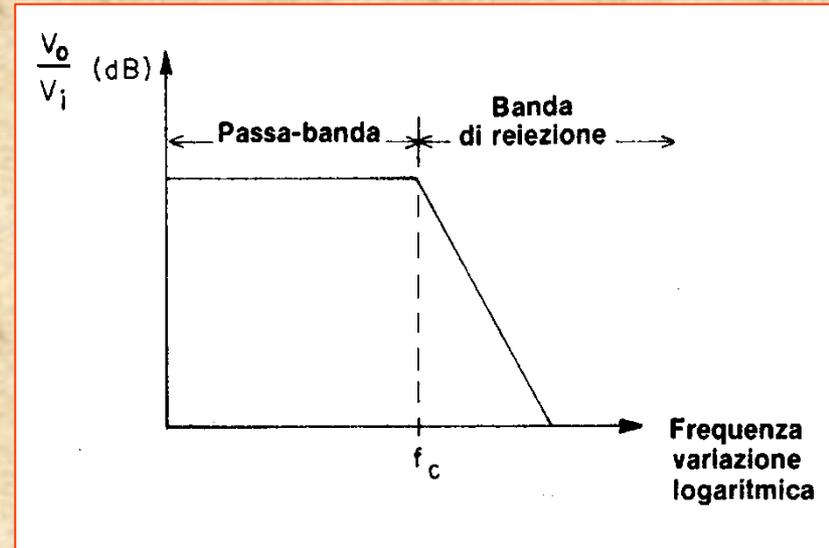
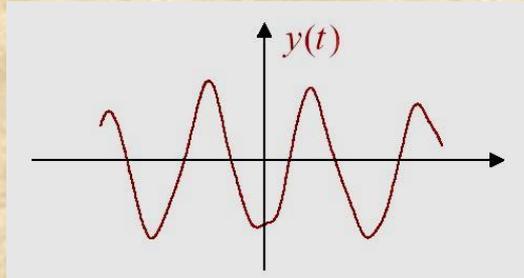
-6dB corrispondono ad un rapporto di tensione pari a $1/2 = 0.5$
infatti : $20 \cdot \log(1/2) = -6 \text{ dB}$

Tipo di filtro: Passa-basso ; Passa-alto

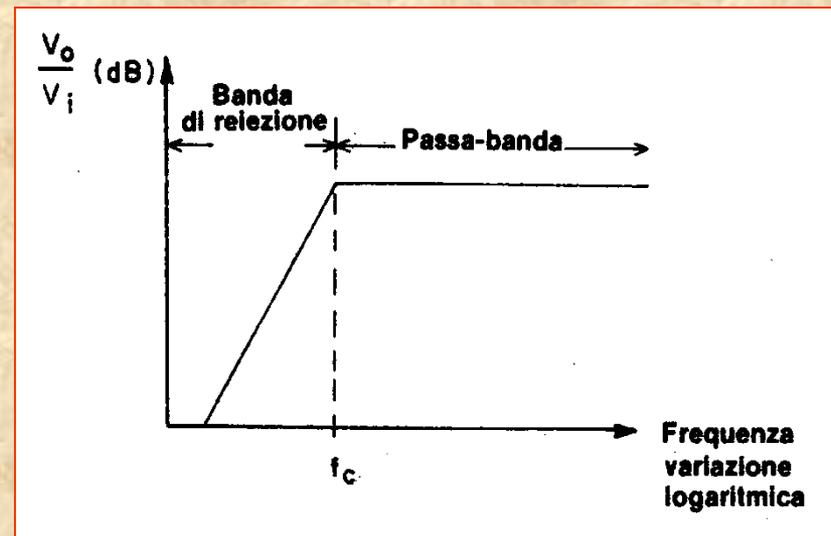
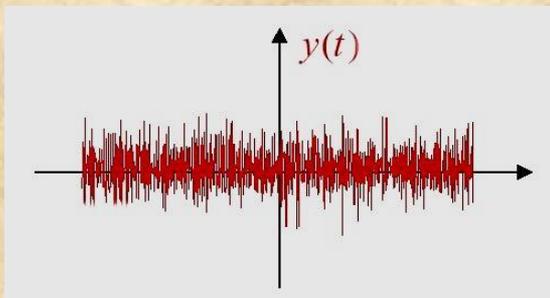
Prendiamo il seguente segnale:



Un filtro **passa-basso** (*low-pass*) attenua tutte le armoniche a frequenza alta e lascia passare quelle inferiori alla frequenza di taglio (*cut frequency*).



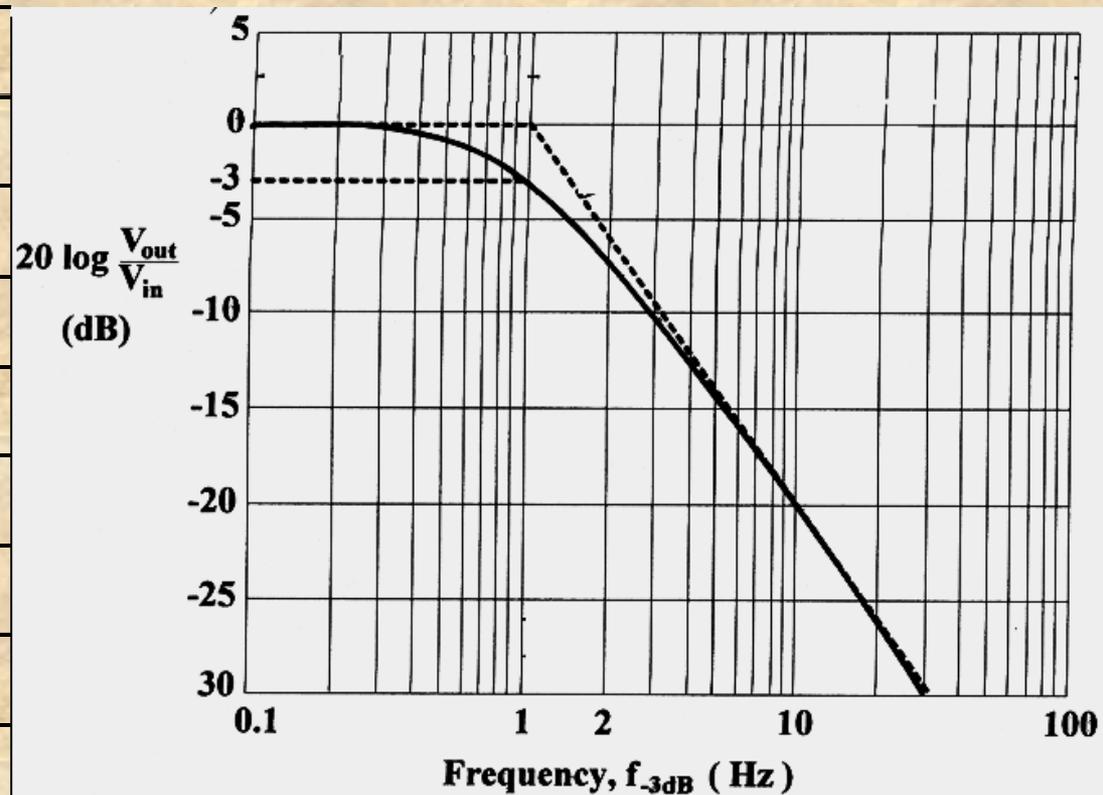
Un filtro **passa-alto** (*high-pass*) attenua le armoniche a frequenza bassa e lascia passare quelle al di sopra della frequenza di taglio.

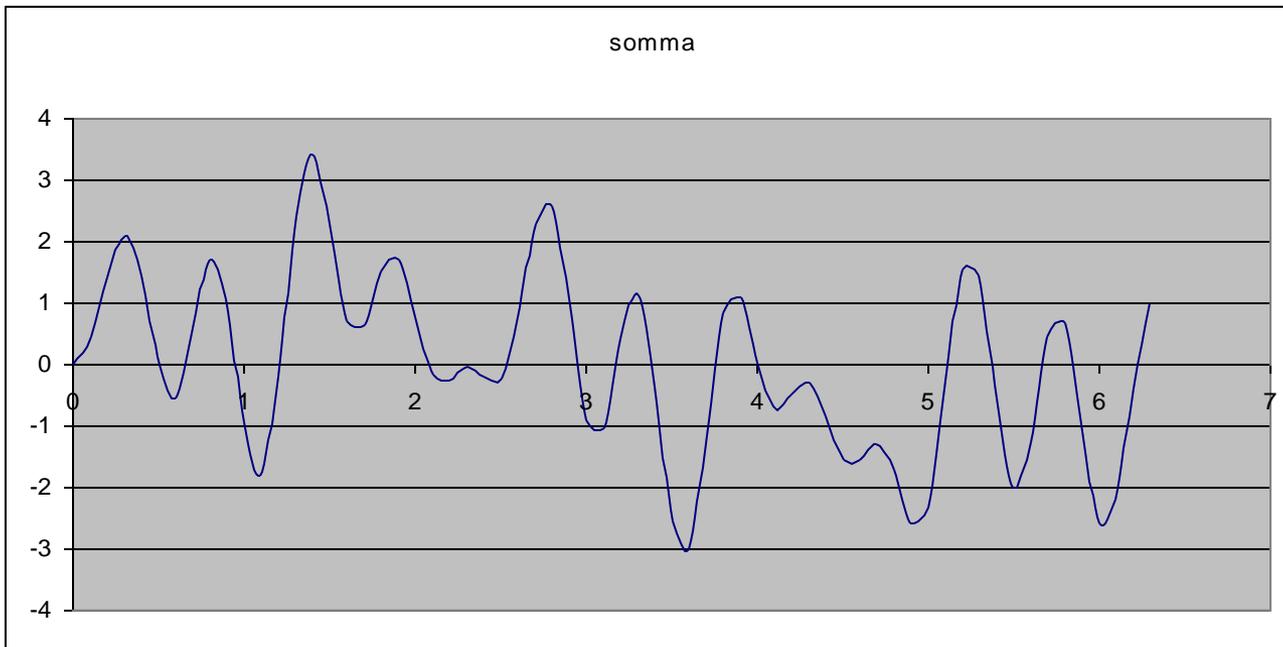
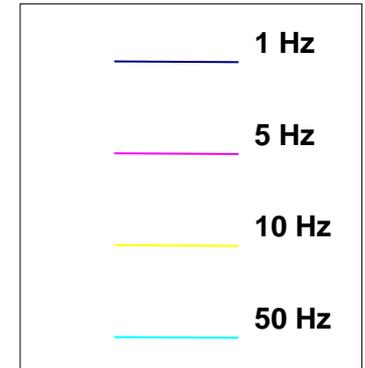
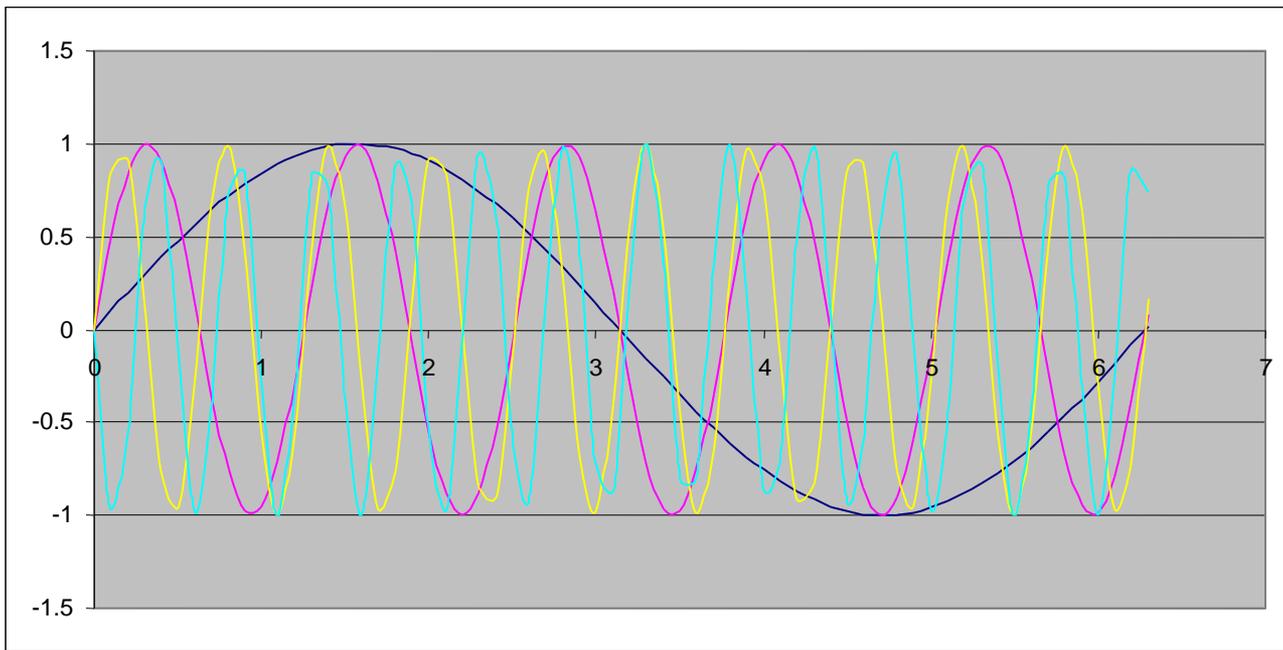


Frequenza di taglio (- 3dB, cut-off frequency)

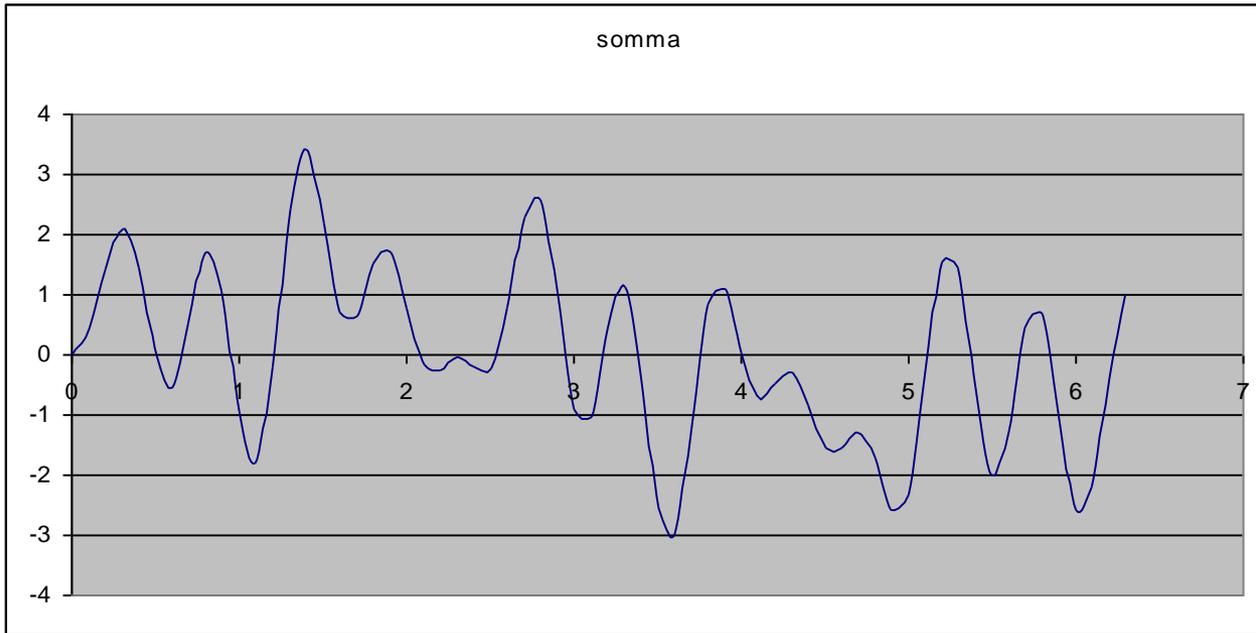
La frequenza di taglio o di *cut-off* (- 3 dB) è la frequenza alla quale l'ampiezza del segnale in uscita dal filtro (**passivo del 1° ordine**) è ridotta a 0,707 volte l'ampiezza del segnale in ingresso.

Decibel	Rapporto di tensioni
3 dB	1,41 : 1
6 dB	2 : 1
20 dB	10 : 1
40 dB	100 : 1
60 dB	1.000 : 1
66 dB	2.000 : 1
72 dB	4.000 : 1
80 dB	10.000 : 1

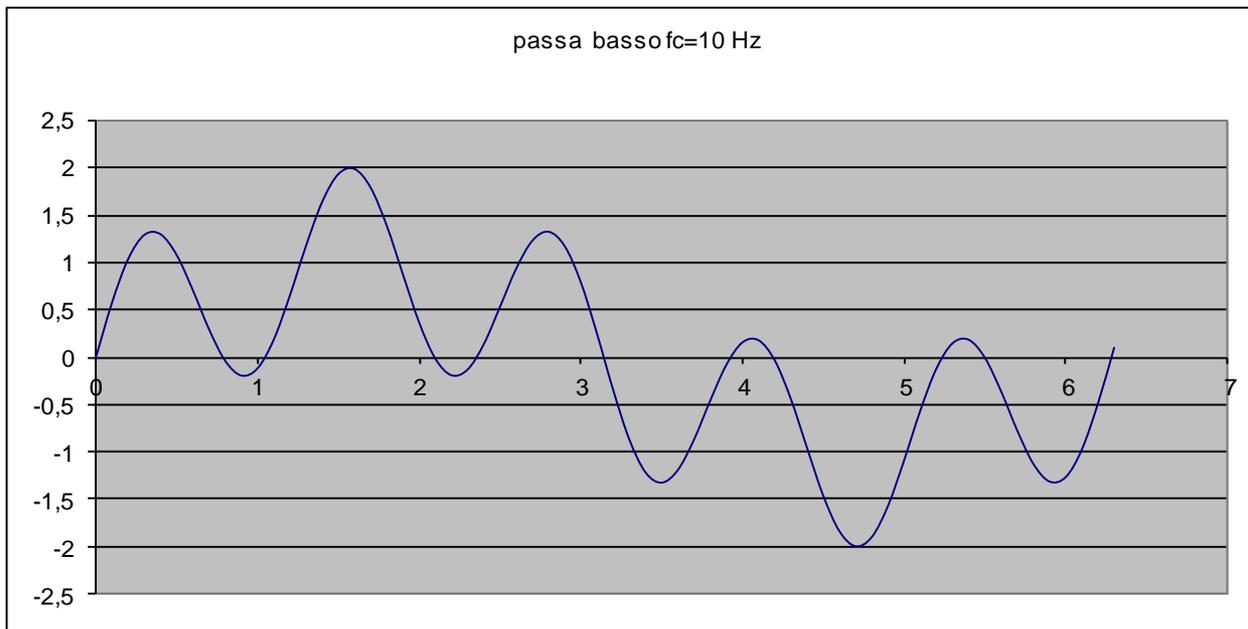




(1+5+10+50) Hz



$(1+5+10+50)$ **Hz**

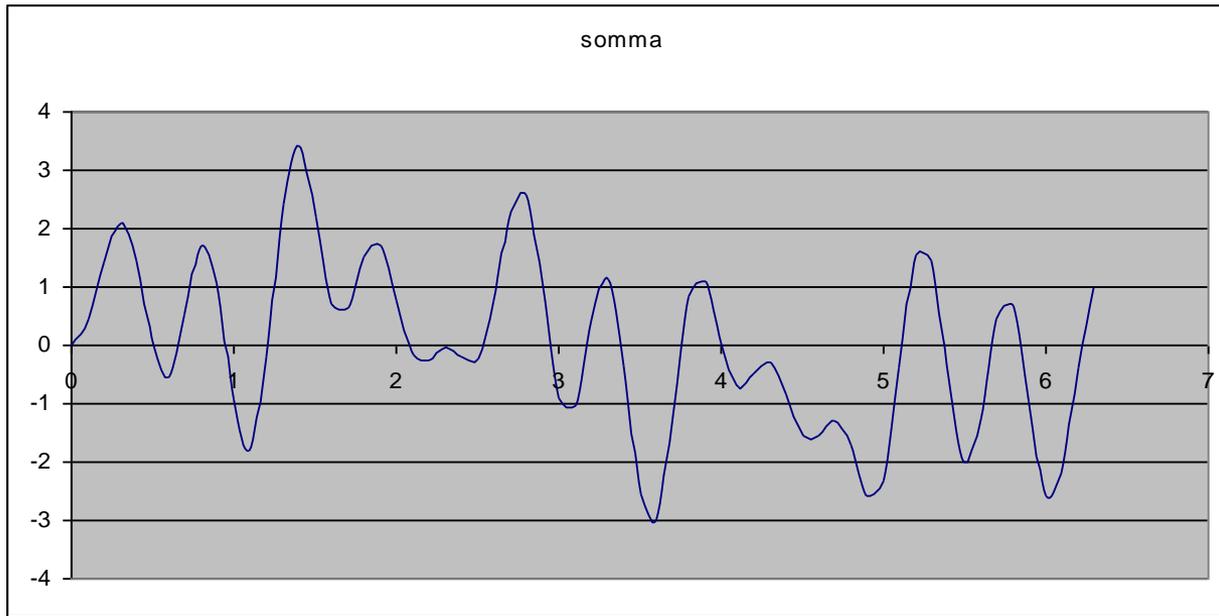


Filtraggio **passa-basso** (*low-pass*) : attenua tutte le armoniche a frequenza più alta della frequenza di taglio ($f_c = 10$ Hz)

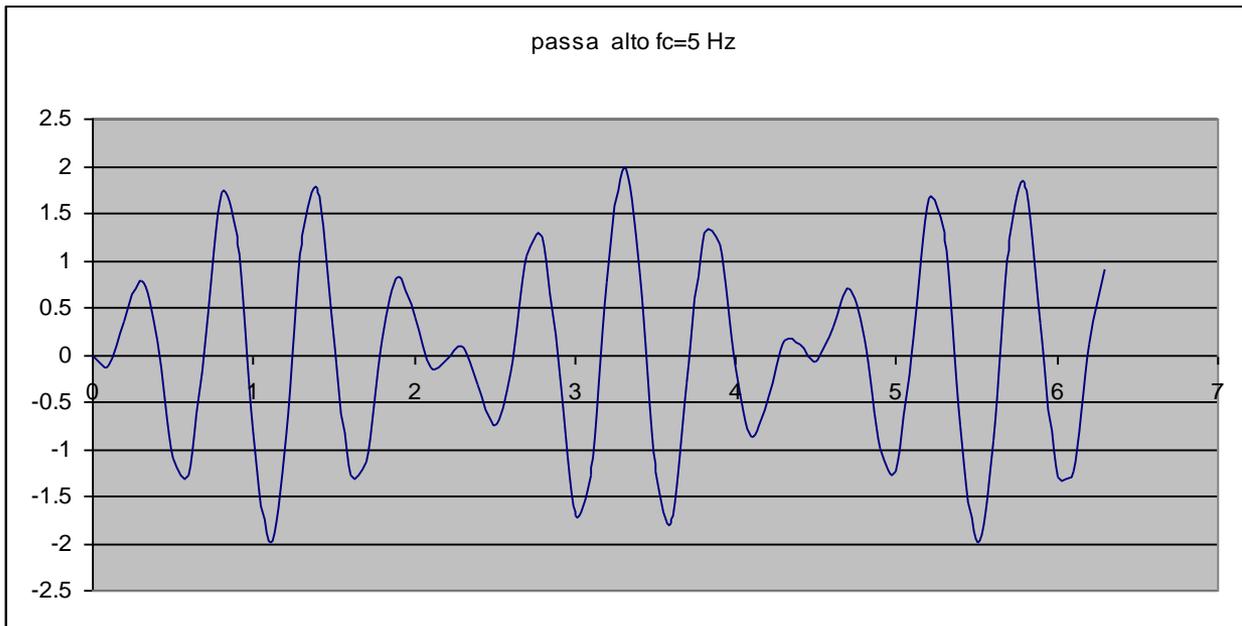


Sono “eliminate” le frequenze a

10 e 50 Hz



$(1+5+10+50)$ **Hz**



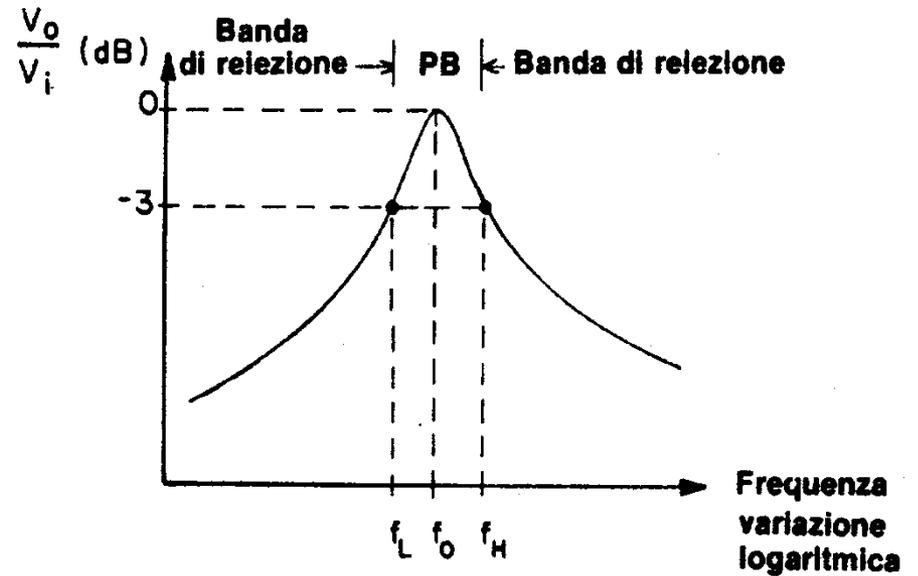
Filtraggio **passa-alto**
 (*high-pass*) : “elimina” tutte le
armoniche a frequenza più
bassa della frequenza di taglio
 ($f_c = 5$ **Hz**).



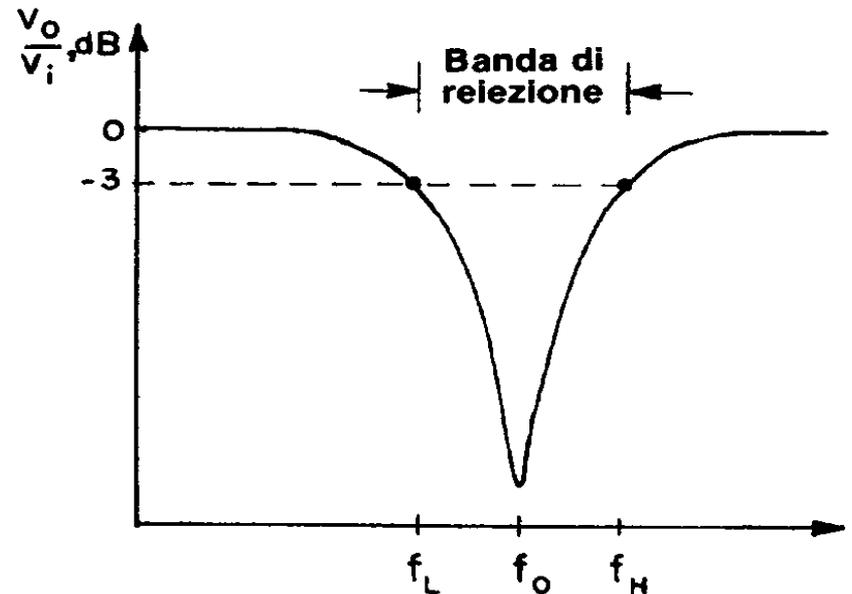
Sono “eliminate” le frequenze
 a **1 e 5 Hz**

Tipo di filtro : Passa-banda ; Elimina-banda.

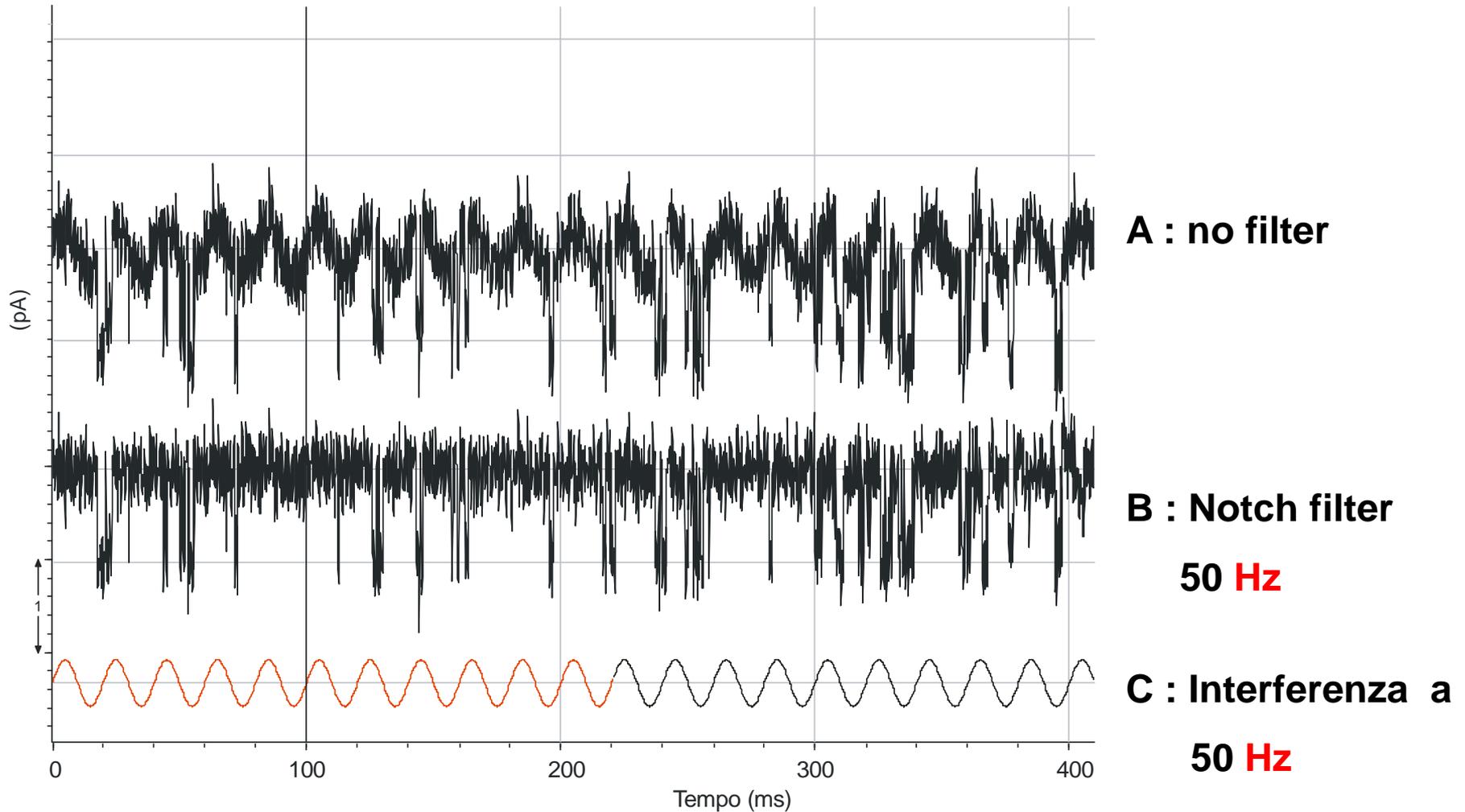
Un filtro **passa-banda** attenua le armoniche inferiori e superiori ad una determinata banda di frequenze.



Un filtro a **reiezione di banda (notch)** "elimina" solamente le armoniche all'interno di una determinata banda e lascia passare quelle esterne.



Filtraggio con filtro "notch" per eliminazione di interferenza di rete (50 Hz)



APPROFONDIMENTI

Ordine del filtro.

Un semplice filtro costituito da un condensatore e da un resistore è detto **filtro del primo ordine**.

Mettendo in serie vari filtri di primo ordine, se ne costruiscono di ordine superiore.

Più è elevato l'ordine del filtro e maggiore è l'attenuazione delle armoniche fuori banda.

Nel filtro di primo ordine l'attenuazione del segnale oltre la frequenza di taglio aumenta di **6 dB/ottava** e cioè **20 dB/decade**.

Funzione di trasferimento (FdT)

E' il rapporto tra due grandezze elettriche omologhe in uscita e in ingresso a un filtro, nel dominio della variabile complessa $j\omega$ es :

$$\mathbf{G(j\omega) = Vout (j\omega) / Vin (j\omega)}$$

Polo

Valore di $j\omega$ per cui si annulla il Denominatore di G (e per cui la FdT tende a ∞)

Zero

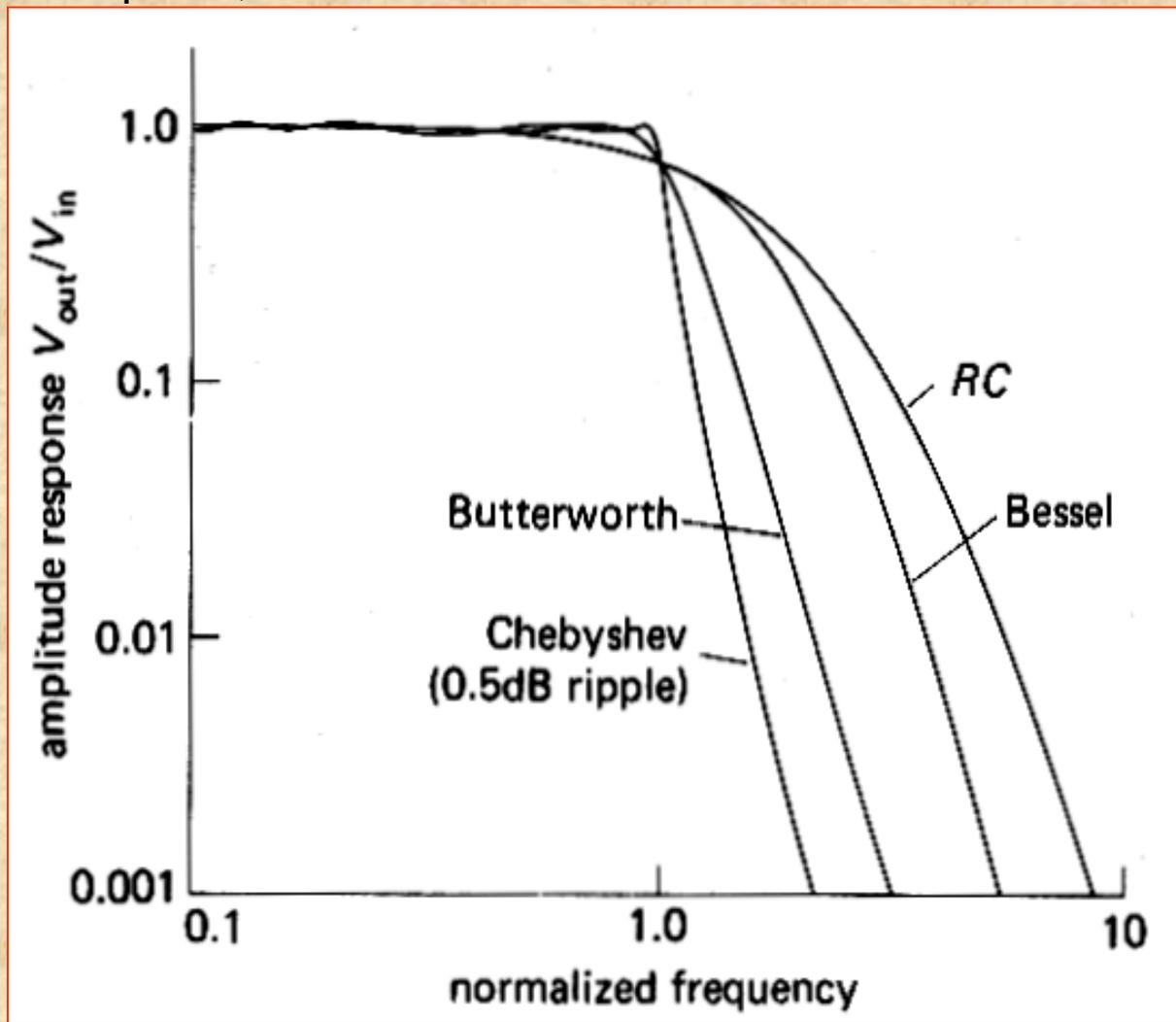
Valore di $j\omega$ per cui si annulla il Numeratore di G (e per cui la FdT tende a **0**)

Tipo di filtro.

Con i filtri attivi possono essere implementate diverse funzioni di trasferimento.

I filtri più comuni sono : *Ellittico, Cauer, Chebyshev, Bessel e Butterworth.*

Ciascuno di questi presenta caratteristiche particolari per quanto riguarda la forma della curva di risposta, il ritardo di fase e l'attenuazione fuori banda.



Terminologia dei filtri.

Attenuazione

L'attenuazione è il reciproco del guadagno. Un'attenuazione di 10 corrisponde ad un guadagno di 0,1.

Banda passante (Pass Band)

La banda passante è la regione di frequenze al di sotto della frequenza di taglio.

Banda soppressa (Stop Band)

La banda soppressa è la regione di frequenze al di sopra della frequenza di taglio.

Spostamento di fase (Phase Shift)

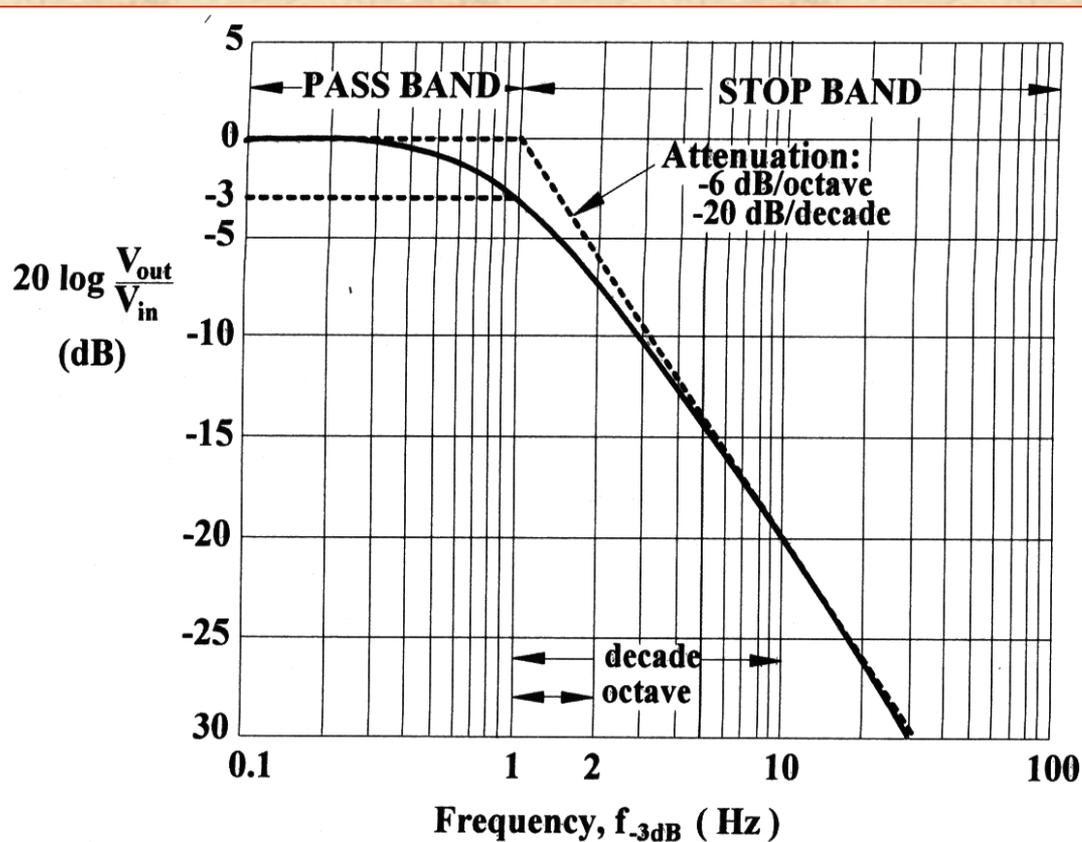
Le fasi delle varie componenti sinusoidali del segnale di ingresso sono spostate dal filtro in varia misura dai vari tipi di filtro. I filtri che hanno piccoli spostamenti di fase producono piccole distorsioni nel segnale.

Ottava (octave)

Un'ottava è l'intervallo di frequenze in cui la frequenza più elevata è doppia della minore.

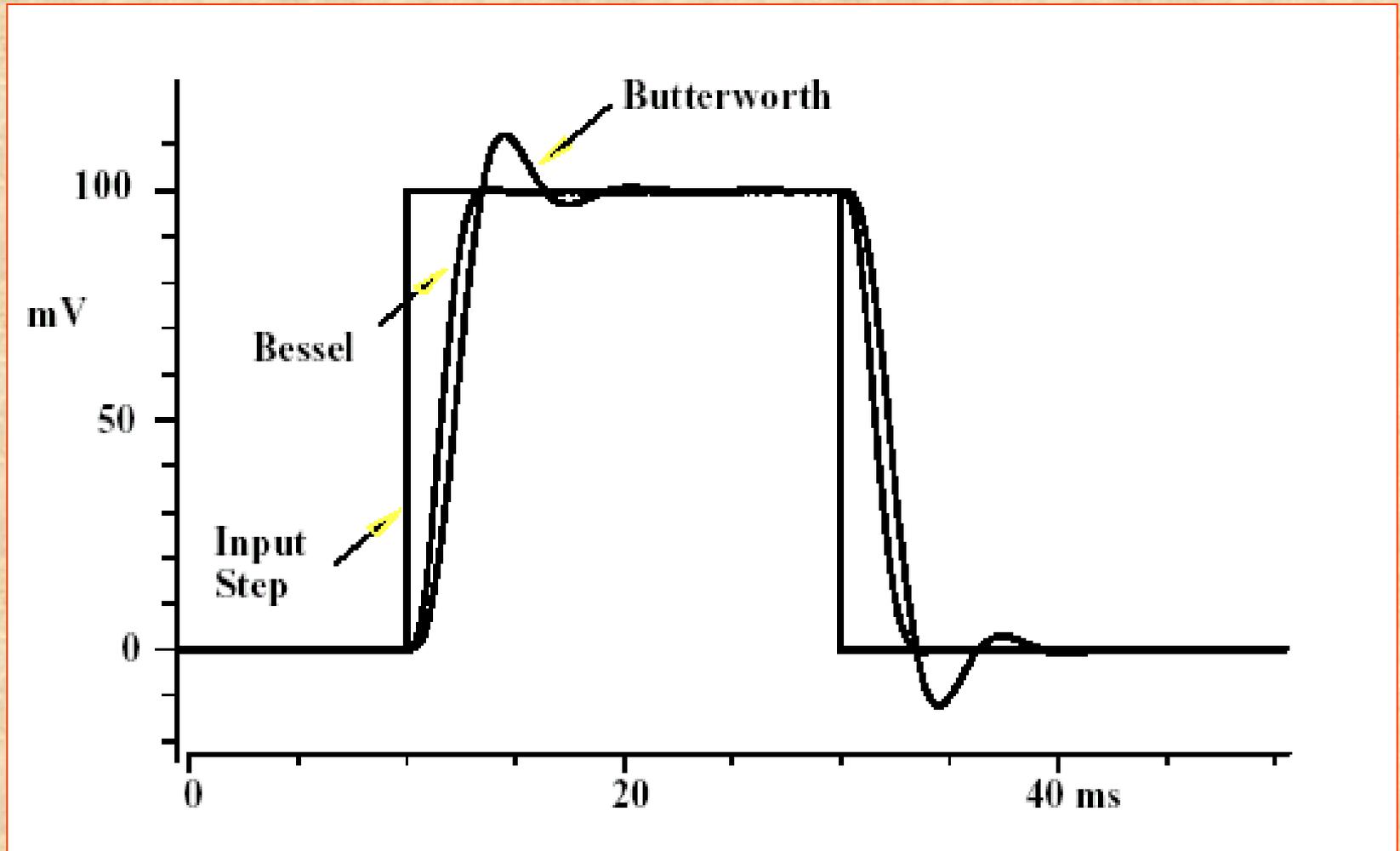
Decade (decade)

La decade è l'intervallo di frequenze in cui la frequenza più elevata è dieci volte la minore.



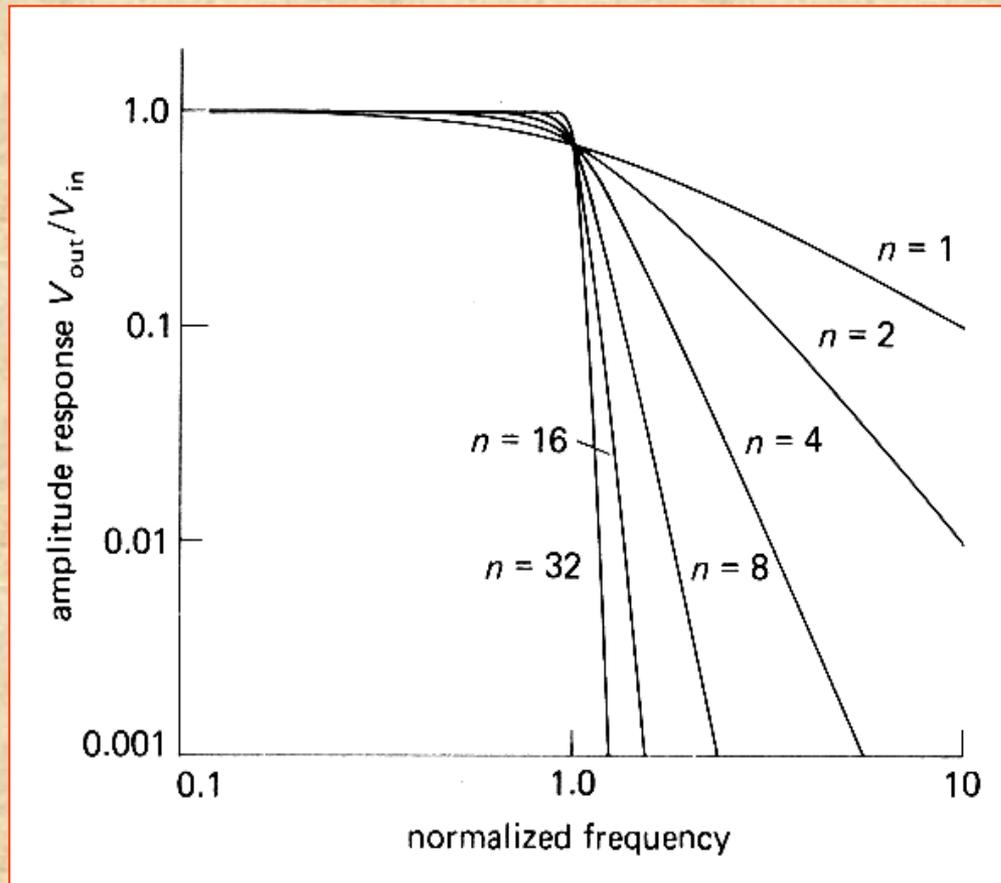
Overshoot

Quando lo spostamento di fase nella banda passante non è linearmente dipendente dalla frequenza della componente sinusoidale il segnale filtrato presenta **overshoot**. In questo caso la risposta ad un impulso rettangolare è distorta.



Ordine

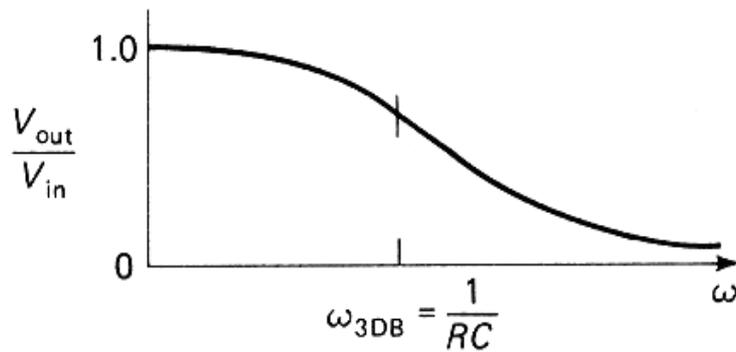
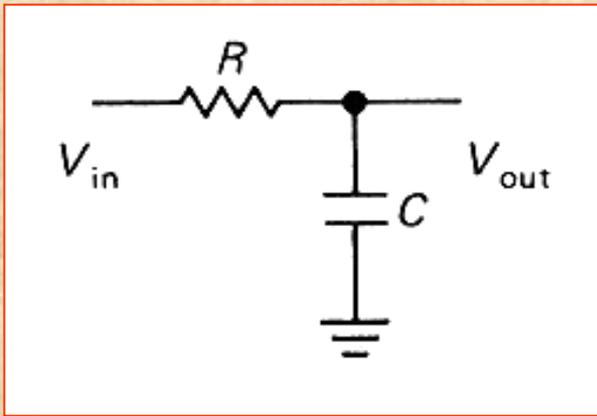
Poli	Ordine	Pendenze (slope)	
1 polo	1° ordine	6 dB/ottava	20 dB/decade
2 poli	2° ordine	12 dB/ottava	40 dB/decade
4 poli	4° ordine	24 dB/ottava	80 dB/decade
8 poli	8° ordine	48 dB/ottava	160 dB/decade



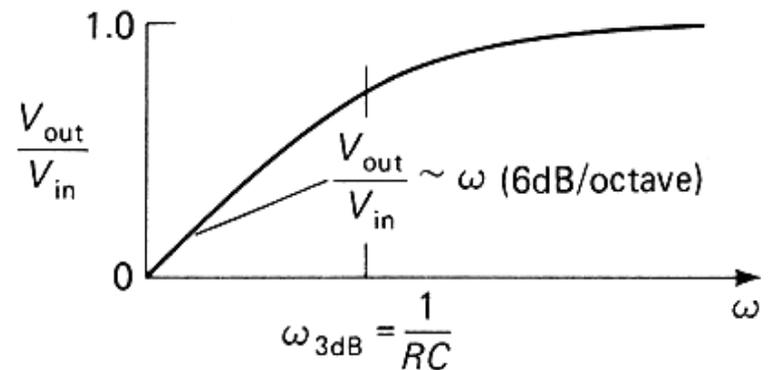
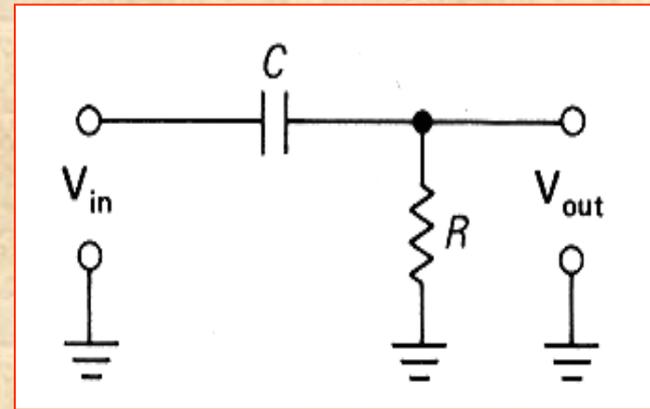
Esempi di filtri:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

Filtro passa-basso



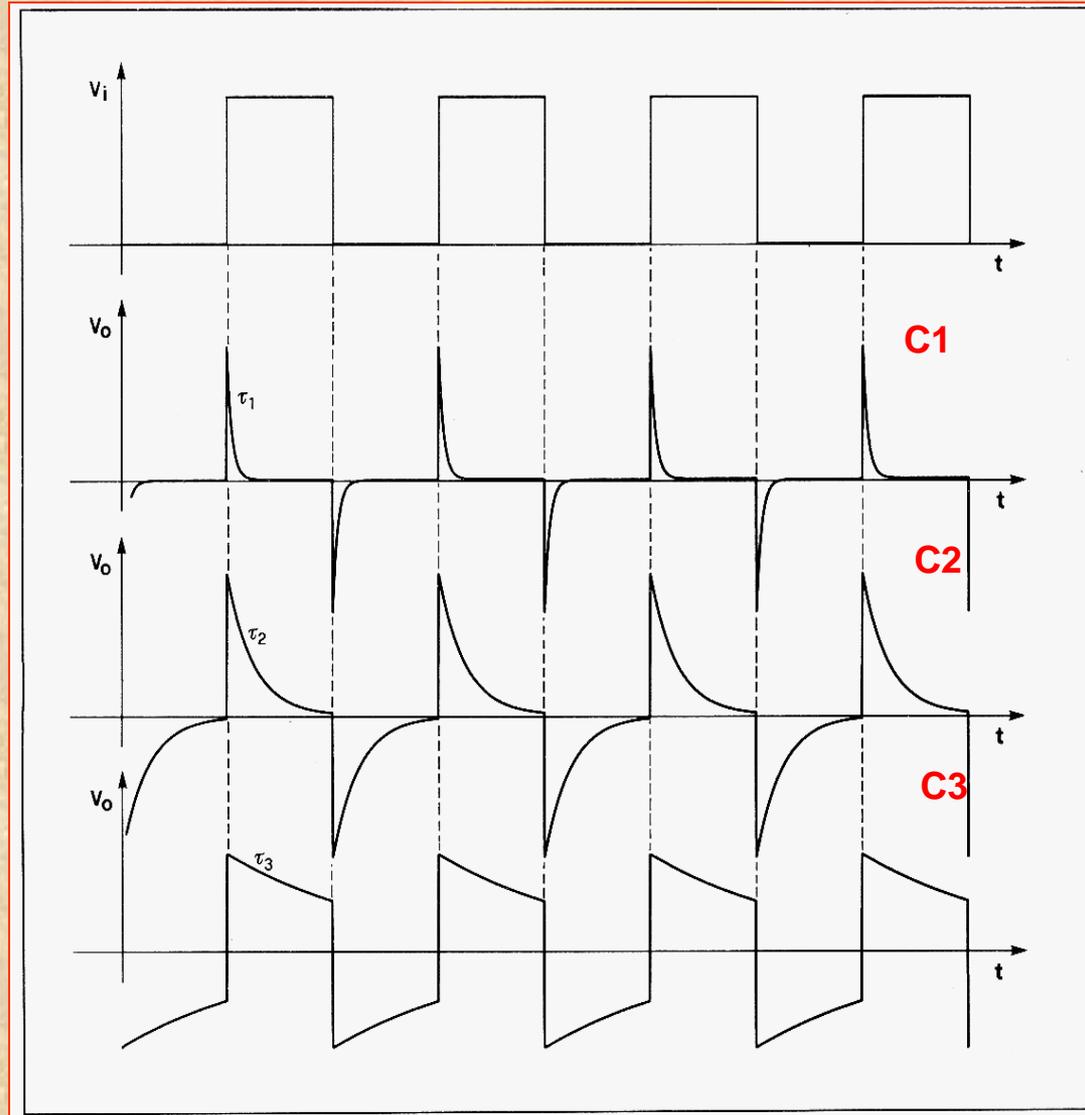
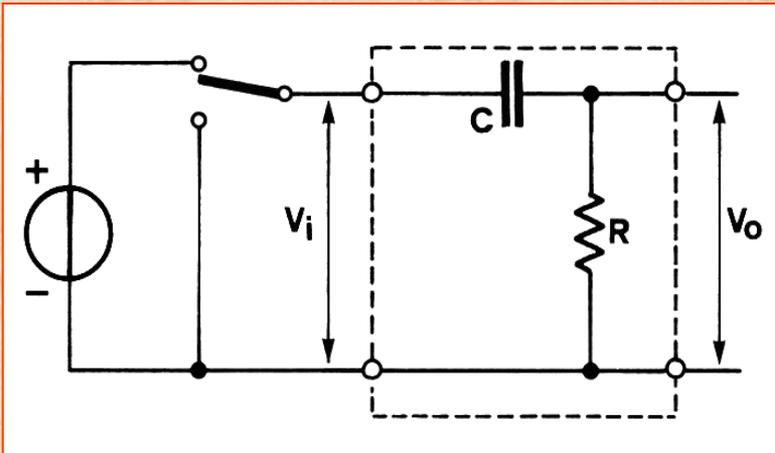
Filtro passa-alto



Effetti dei filtri sull'onda quadra.

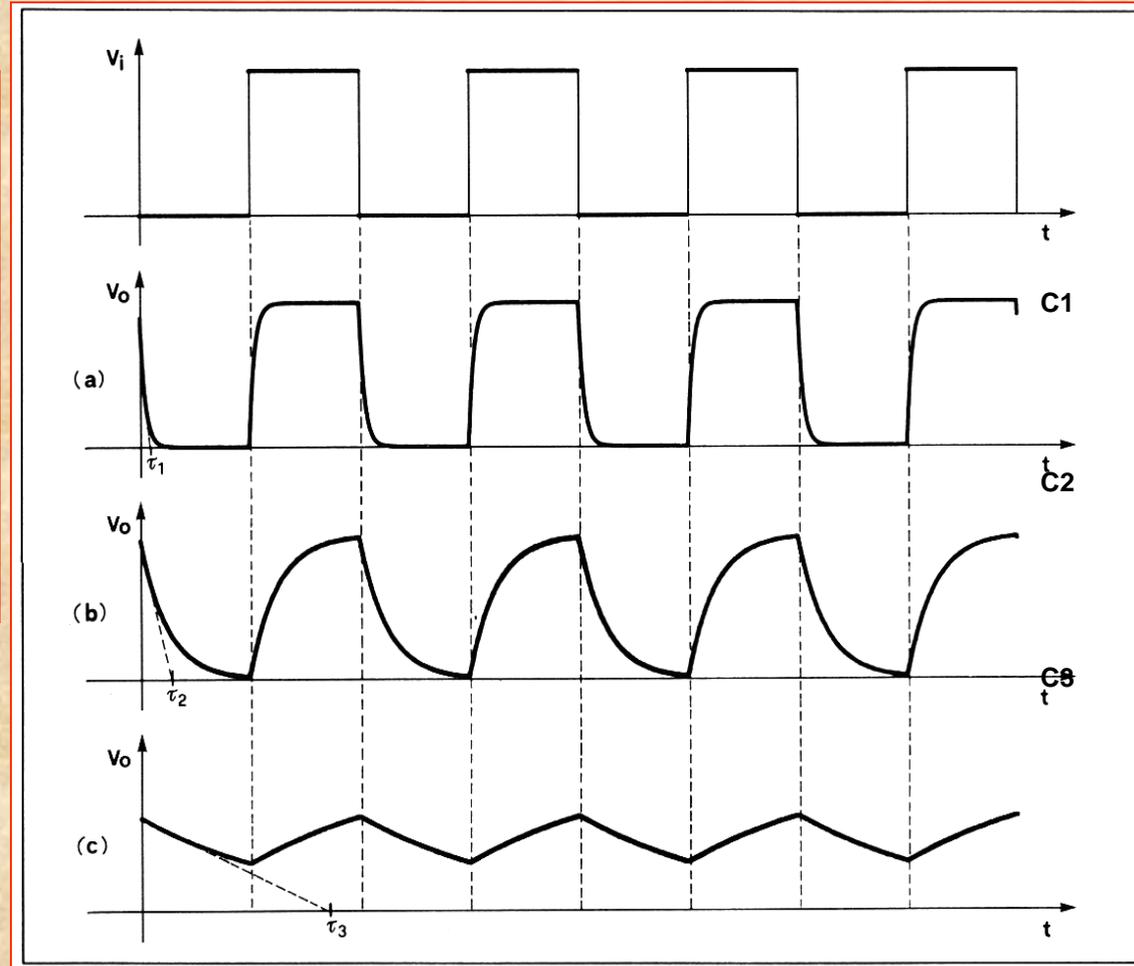
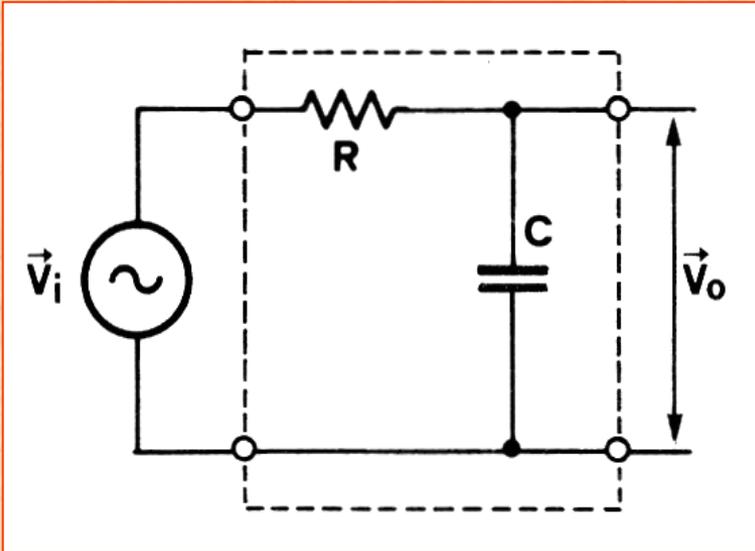
C1 < C2 < C3

Filtro passa-alto



Filtro passa-basso

$$C1 < C2 < C3$$



Soppressione del rumore : filtro passa-basso

