Le reti elettriche in alternata
(R-C ; R-L ; R-L-C)

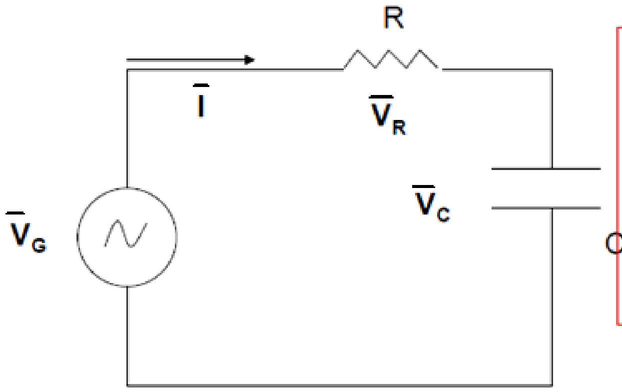
Le reti elettriche possono contenere i componenti R, C, L collegati fra di loro in modo qualsiasi ed in quantità qualsiasi. Il loro studio in alternata parte dall'analisi delle reti più semplici e poi passare allo studio di una rete qualsiasi.

Le reti più semplici sono costituite da:

1. due componenti R = resistenza e C = condensatori collegati in serie o in parallelo.
2. due componenti R = resistenza e L = induttanza collegati in serie o in parallelo.
3. tre componenti R = resistenza, C = condensatori e L = induttanza collegati in serie o in parallelo.

Proseguiremo quindi nell'ordine stabilito adesso, per poi fare il caso generale.

Le reti elettriche in alternata
(R-C)

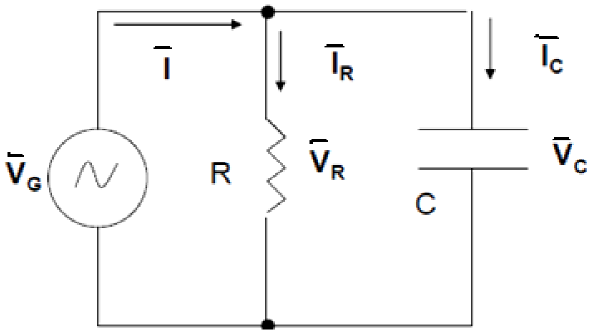


Circuito R-C serie:

Questo circuito ha **una sola** corrente che percorre sia R che C.

Invece le tensioni sono **tre** $\overline{V}_G$, $\overline{V}_R$, $\overline{V}_C$.

Ricordiamo che la tensione (V) è una energia (J) per unità di carica (C).

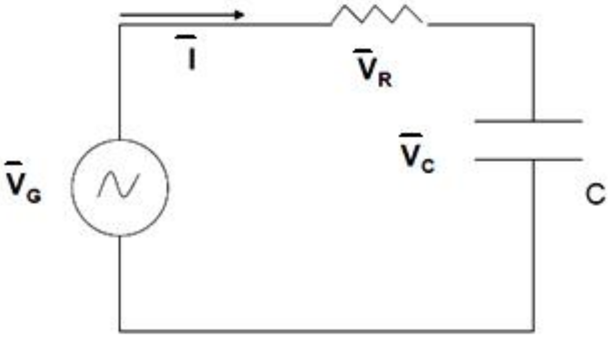


Circuito R-C parallelo:

Questo circuito ha **una sola** tensione che si localizza ai capi di $\overline{V}_G$ di R e di C.

Invece le correnti sono **tre** $\overline{I}$, $\overline{I}_R$, $\overline{I}_C$.

Le reti elettriche in alternata
(R-C serie)



Questo circuito si studia applicando la legge di Kirchoff alle tensioni.

Questa legge stabilisce una relazione energetica tra i componenti presenti nella maglia: la tensione che istante per istante fornisce il generatore si deve distribuire tra la resistenza e il condensatore.

Quindi scriviamo la relazione vettoriale appena enunciata.

$$\boxed{\vec{V}_G = \vec{V}_R + \vec{V}_C}$$

Adesso teniamo conto della legge di OHM per i due componenti R e C, inserendola nella legge di Kirchoff

$$\boxed{\vec{V}_G = \vec{V}_R + \vec{V}_C = R \cdot \vec{I} + \overline{\mathbf{Zc}} \cdot \vec{I} = \vec{I} \cdot (R + \overline{\mathbf{Zc}})}$$

$$\overrightarrow{V_G} = \vec{I} \cdot (R + \overline{\mathbf{Zc}}) = \vec{Z} \cdot \vec{I}$$

$$\overrightarrow{V_G} = \vec{Z} \cdot \vec{I}$$

L'ultima formula ci suggerisce un modo per interpretare il circuito:

Esso si comporta come un unico componente, chiamato **impedenza $\bar{Z}$ al cui interno sono conglobati sia R che C, al quale si può applicare la legge di OHM.**

Esempio:

R = 10 Ω, $\overline{\mathbf{ZC}}$ = -j 2 Ω, $\bar{I}$ = 2+j3 A

Calcolare $\bar{V}_G$, $\bar{V}_R$, $\bar{V}_C$.

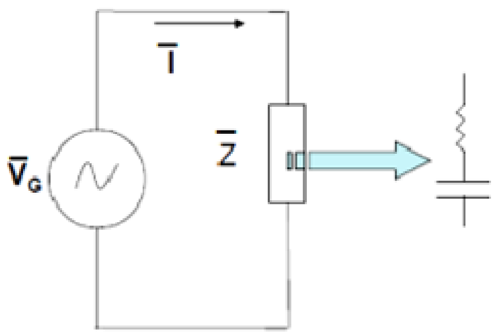
$\bar{Z}$ = 10 –j2 Ω

$\bar{V}_G = \bar{Z} \cdot \bar{I}$ = (10-j2)(2+j3) = 20+j30-j4+6 **V**

$\bar{V}_G$=26+j26 **V**

$\bar{V}_R = \bar{R}\,\bar{I}$ = 10(2+j3) = 20+j30 V

$\bar{V}_C = \bar{X}_C \bar{I}$ = (-j2)(2+j3) = -j4+6 = 6-j4 V



Rifacciamo i calcoli con la **forma polare** :

Dati : $R = 10\ [\Omega]$ $\overline{Z}_c = 2\ [\Omega]\ e^{j90°}$ $\overline{I} = \sqrt{2^2 + 3^2} * e^{j\arctan(3/2)} \approx 3{,}6\ [A]\ e^{j56°}$

Ricavo : $\overline{Z}_{RC} = 10 - j2 \approx 10{,}2\ [\Omega]\ e^{-j11°}$

da cui $\overline{V}_G = \overline{I} * \overline{Z}_{RC} = 3{,}6\ [A]\ e^{j56°} * 10{,}2\ [\Omega]\ e^{-j11°} = 36{,}7\ [V]\ e^{j45°}$ **forma polare**

$\overline{V}_G = 36{,}7 \cos(45°) + j36{,}7 \sin(45°) = 26 + j26\ [V]$ **forma cartesiana**

$\overline{V}_R = \overline{I} * R = 3{,}6\ [A]\ e^{j56°} * 10\ [\Omega] = 36\ [V]\ e^{j56°}$ **forma polare**

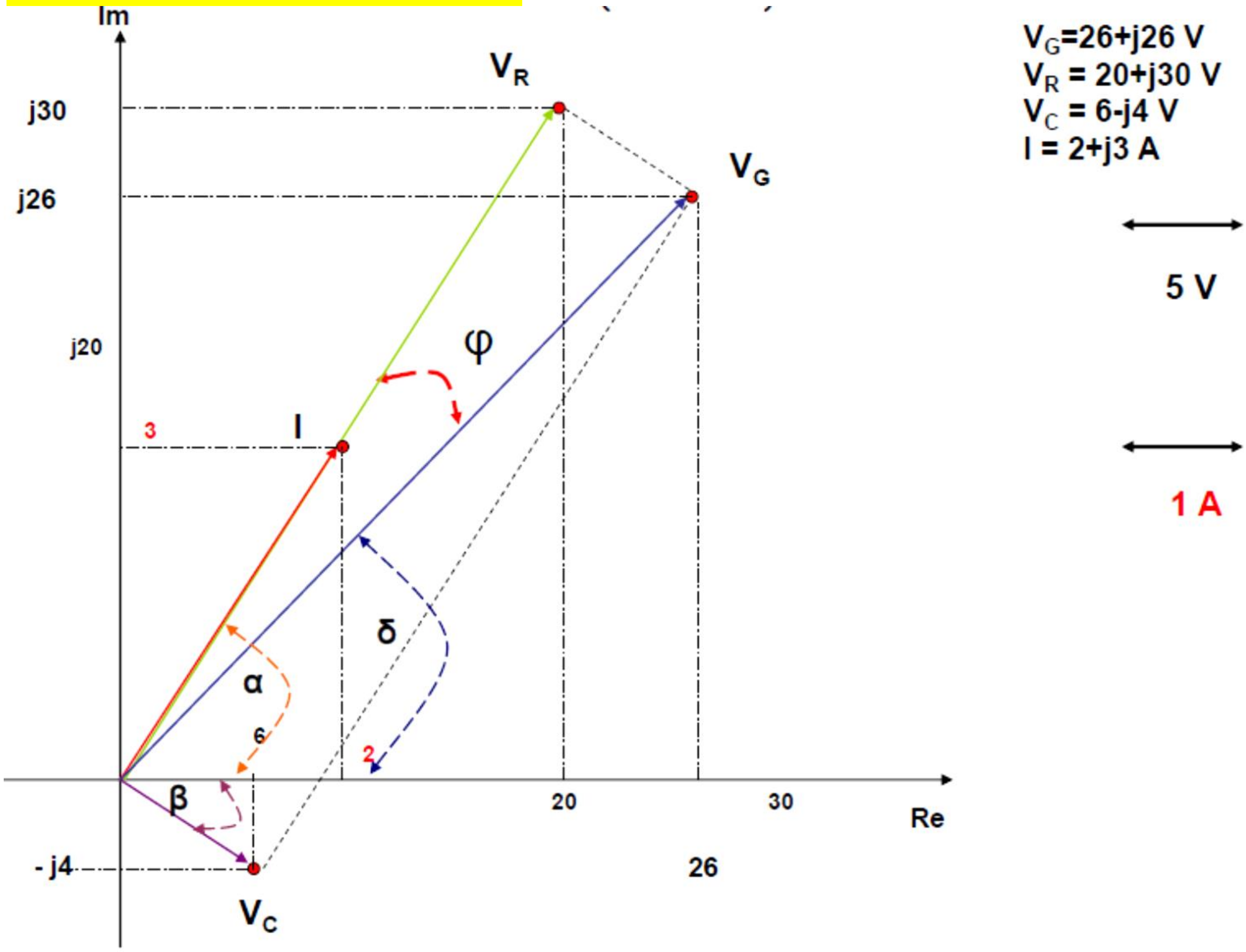
$\overline{V}_R = 36 \cos(56°) + j36 \sin(56°) = 20 + j30\ [V]$ **forma cartesiana**

$\overline{V}_C = \overline{I} * \overline{Z}_C = 3{,}6\ [A]\ e^{j56°} * 2\ [\Omega]\ e^{-j90°} = 7{,}2\ [V]\ e^{-j34°}$ **forma polare**

$\overline{V}_C = 7{,}2 \cos(-34°) + j7{,}2 \sin(-34°) = 6 - j4\ [V]$ **forma cartesiana**

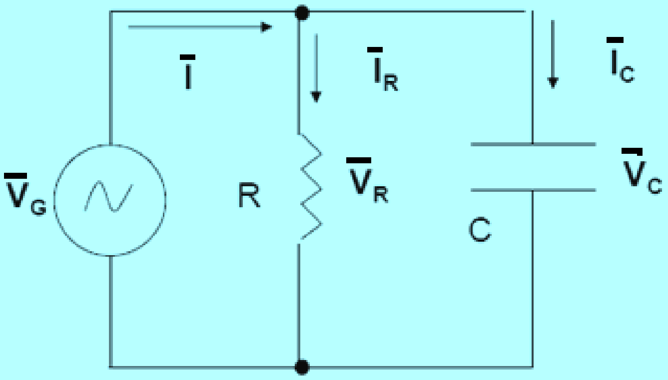
Come si vede i risultati coincidono !

GRAFICI VETTORIALI NEL PIANO DI GAUSS



Dal grafico e dalle espressioni delle tensioni in forma polare si vede come i vettori $\overline{V}_R$ e $\overline{V}_C$ siano in quadratura e come sia rispettata la 2° Legge di Kirchhoff ($\overline{V}_G = \overline{V}_R + \overline{V}_C$), ma IN FORMA VETTORIALE !

Le reti elettriche in alternata
(R-C parallelo)



Questo circuito si studia applicando la legge di Kirchoff alle correnti.

Questa legge stabilisce una relazione di conservazione della carica tra i componenti in parallelo: la corrente che istante per istante fornisce il generatore si deve dividere tra la resistenza e il condensatore.

Quindi scriviamo la relazione vettoriale appena enunciata.

$$\boxed{\vec{I} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_C}}$$

Adesso teniamo conto della legge di OHM per i due componenti R e C, inserendola nella legge di Kirchoff

$$\vec{I} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_C}$$

$$\vec{I} = \frac{\overrightarrow{V_R}}{R} + \frac{\overrightarrow{V_C}}{\overline{\mathbf{Z}}\mathbf{c}}$$

siccome le tensioni sono uguali (parallelo) possiamo scrivere

$$\overrightarrow{V_R} = \overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_G}$$

$$\vec{I} = \frac{\overrightarrow{V_G}}{R} + \frac{\overrightarrow{V_G}}{\overrightarrow{\mathbf{Z}_C}} = \overrightarrow{V_G} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\overrightarrow{\mathbf{Z}_C}} \right) = \overrightarrow{V_G} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{Z}_C} + R}{R \cdot \overrightarrow{\mathbf{Z}_C}} \right)$$

$$\overrightarrow{V_G} = \vec{I} \cdot \left(\frac{R \cdot \overrightarrow{\mathbf{Z}_C}}{\overrightarrow{\mathbf{Z}_C} + R} \right)$$

$$Z = \frac{R \cdot \overrightarrow{\mathbf{Z}_C}}{\overrightarrow{\mathbf{Z}_C} + R} \qquad \overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}}$$

Facciamo un esercizio su questo diagramma supponendo di avere i seguenti valori:

$R = 100\ \Omega$, $\overline{Z}C = -j\,5\ \Omega$, $\overline{V}_G = 20+j40$ V

Calcolare $\overline{I}$, $\overline{I}_R$, $\overline{I}_C$.

$$\boxed{\overline{I}_R = \frac{\overline{V}_G}{R} = \frac{20+j40}{100} = \frac{20}{100} + j\frac{40}{100} = 0{,}2 + j0{,}4 \text{ A}}$$

$$\boxed{\overline{I}_C = \frac{\overline{V}_G}{\overline{X}_C} = \frac{20+j40}{-j5} = \frac{20}{-j5} + \frac{j40}{-j5} = \frac{-4}{j} - 8 = j4 - 8 = -8 + j4 \text{ A}}$$

Il calcolo di I si può ottenere in due modi equivalenti: 1) applicando il principio di Kirchoff alle correnti; 2) calcolando l'impedenza Z e usando la legge di Ohm per tutto il circuito.

$$\boxed{\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_C = (0{,}2 + j0{,}4) + (-8 + j4) = -7{,}8 + j4{,}4 \text{ [A]}}$$

IN FORMA POLARE :

$\overline{V}_g = \sqrt{20^2 + 40^2}\ e^{\,j\arctan(40/20)} = 47$ [V] $e^{+j63°}$

$\overline{I}_R = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}4^2}\ e^{+j\arctan(0{,}4/0{,}2)} = 0{,}45$ [A] $e^{+j63°}$

$\overline{I}_C = \sqrt{8^2 + 4^2}\ e^{-j\arctan(4/8)} = 9$ [A] $e^{-j27°}$ >>>>>> 9 [A] $e^{+j153°}$ [la funzione artan ha periodo 180°]

bisogna prendere l'angolo supplementare , +153°, perché nel Condensatore la corrente $\overline{I}c$ è in

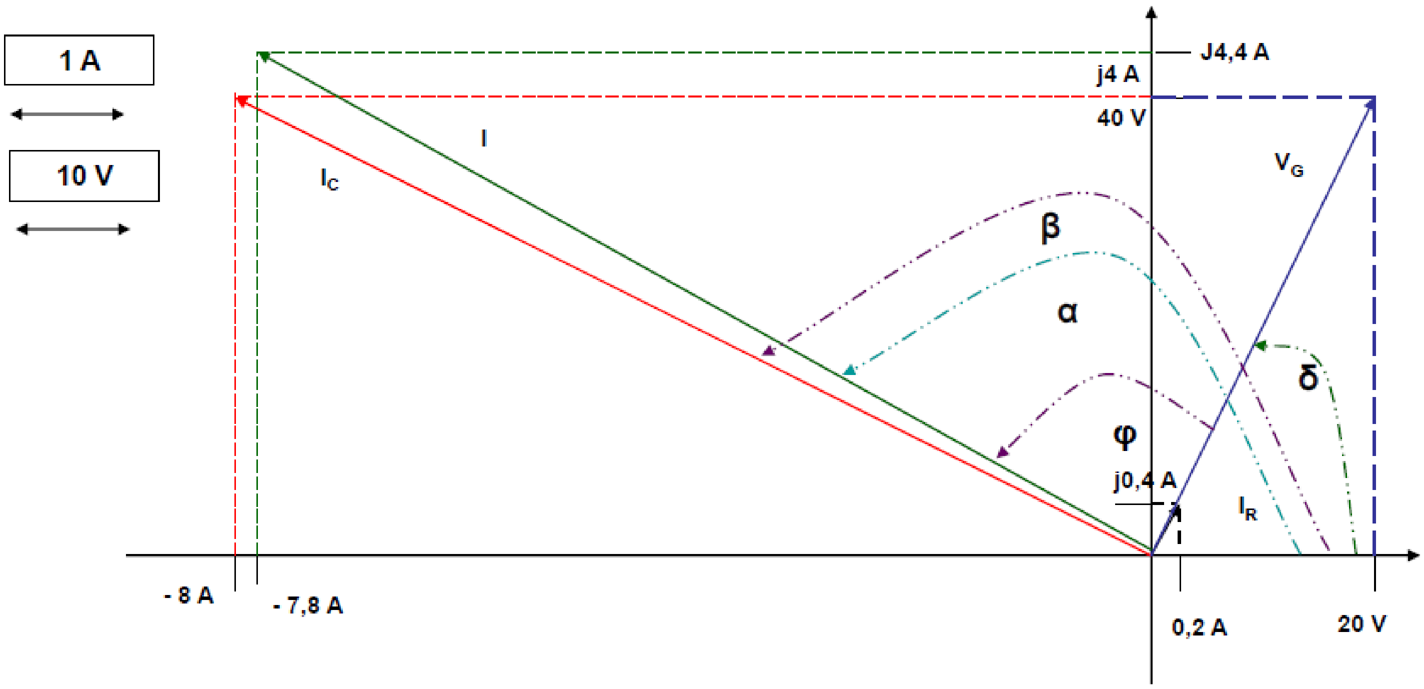
anticipo di 90° sulla tensione $\overline{V}$ (che ha un angolo di fase di 63°)

E infine la corrente totale $\overline{I}$ erogata dal Generatore :

$|\ I\ | = \sqrt{7{,}8^2 + 4{,}4^2} \approx 9$ [A] Fase (I) = artan (- 4,4 / 7,8) ≈ - 29° >>>> +151°

$\overline{I} \approx 9$ [A] $e^{+j151°}$

GRAFICI VETTORIALI



DOVE : δ = 63° β = 153° α = 151° φ = 88°

Dal grafico precedente si ricavano tutti gli angoli

Angolo che si forma rispettivamente tra **V_G (o I_R), I_C, I,** e l'asse reale positivo **Re**:

α **=** arctg (4,4/-7,8)= arctg(-0,564) = - 29,42° **= 150,57° (I e Re)**

β **=** arctg(4/(-8)) = arctg(-0,5) = **- 26,56° = 153,43° (I_C e Re)**

δ **=** arctg(40/20) = arctg(2) = **63,43 (V_G e Re)**

L'angolo tra I_R ed asse reale positivo è uguale a quello di V_G poiché la resistenza non sfasa tensione e corrente.

Da questi dati ricaviamo anche che tra corrente I_C e tensione V_G c'è un angolo di 90°: **angolo tra (I_C – V_G) = β – δ = 153,43 - 63,43 = 90°.**

Troviamo conferma alla teoria.

L'angolo tra V_G ed I si calcola infine così:

$$\varphi = \alpha - \delta = 150{,}57 - 63{,}43 = 87{,}14$$

Ora possiamo ricalcolare, in un altro modo, la corrente erogata dal Generatore :

[$\bar{I} \approx 9$ [A] $e^{+j151°}$]

Calcoliamoci prima l' impedenza del parallelo :

$$\bar{Z}p = \frac{R * \bar{Z}c}{R + \bar{Z}c} = \frac{R * 1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{100 * (-j5)}{100 + (-j5)} =$$

$$= \frac{-j500}{100 - j5} = \frac{500\ e^{-j90°}}{\sqrt{100^2 + 5^2} * e^{j\arctan(-5/100)}} = \frac{500\ e^{-j90°}}{100{,}1\ e^{-j3°}} = 5\ [\Omega]\ e^{-j87°}$$

da cui :

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{V}}\mathbf{g} / \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{p} = \frac{47\ [V]\ e^{+j63°}}{5\ [\Omega]\ e^{-j87°}} \approx \mathbf{9}{,}4\ [A]\ e^{+j150°}$$
