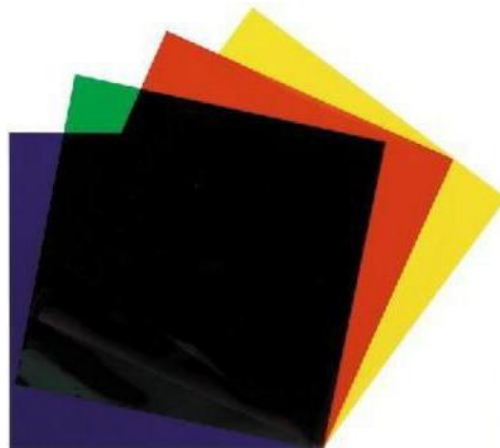


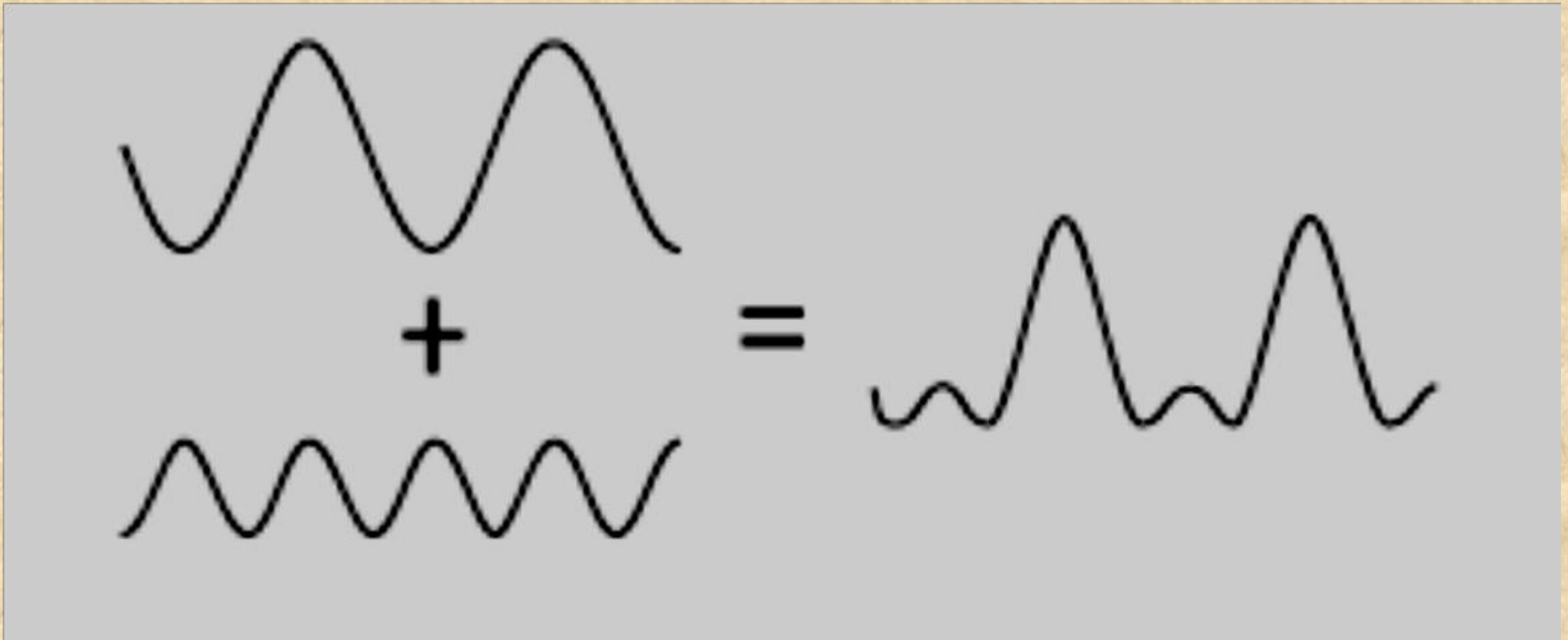


# ***FOURIER & FILTRI***

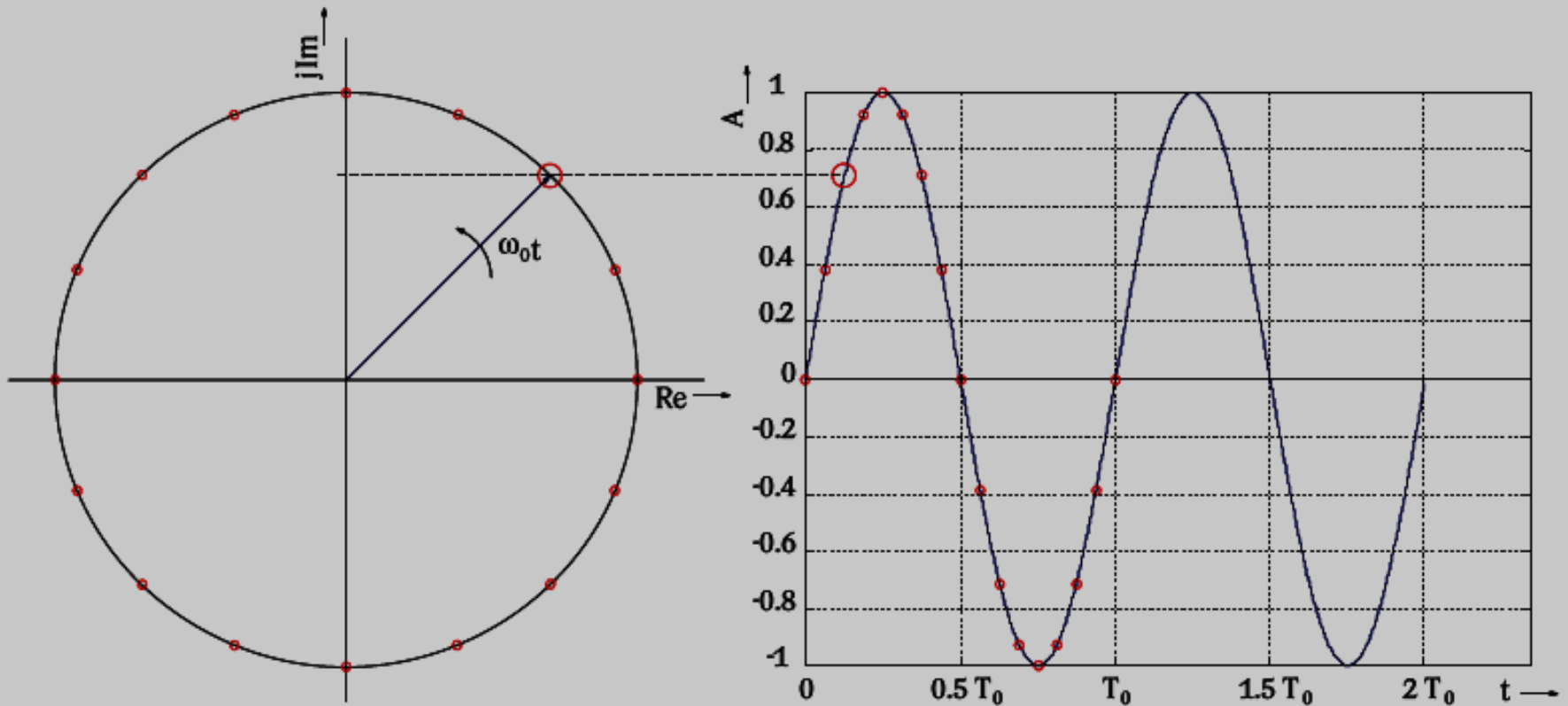


La teoria delle **Serie di Fourier** dimostra che un segnale periodico (con frequenza  **$f_0$** ) può essere prodotto **sommando** assieme un numero infinito di **componenti armoniche** (onde sinusoidali o cosinusoidali), aventi opportune ampiezze e frequenze, più un eventuale componente continua.

- Le frequenze sono multiple della frequenza **fondamentale  $f_0$**
- Le ampiezze diminuiscono con l'aumento della frequenza della componente armonica



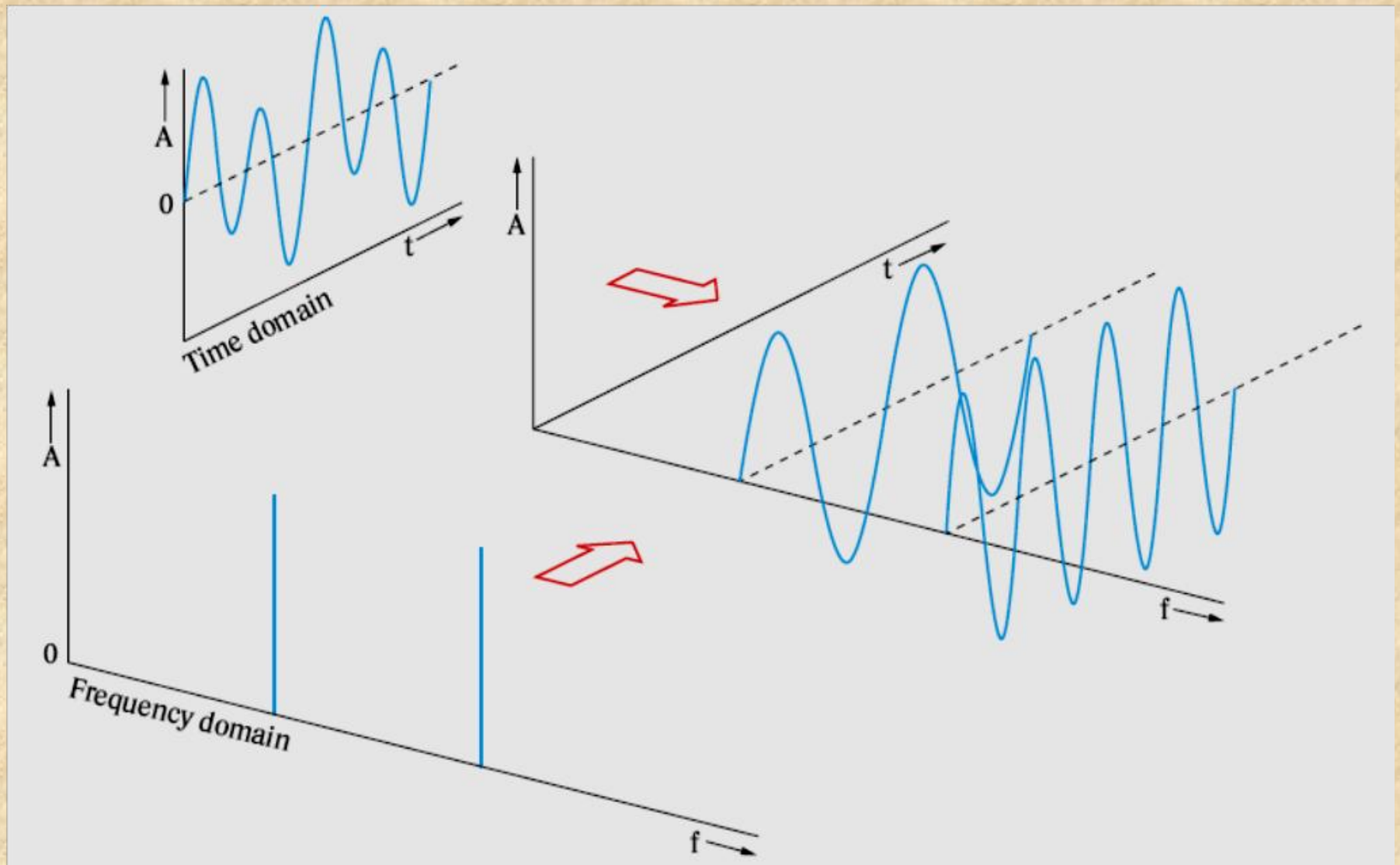
Segnale sinusoidale rappresentato proiettando un vettore di rotazione sull'asse immaginario del **piano di Gauss**



$$V(t) = 1 * \sin(\omega_0 t) \quad \text{dove} \quad \omega_0 t = 2\pi/T_0 \cdot t = 2\pi f_0 \cdot t$$

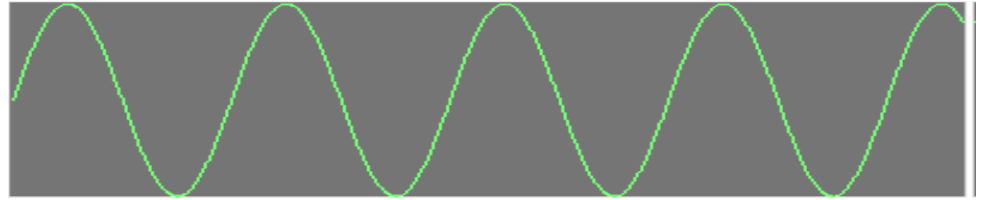
$$T_0 = 1/f_0$$

# Segnali esaminati nel dominio del tempo e della frequenza

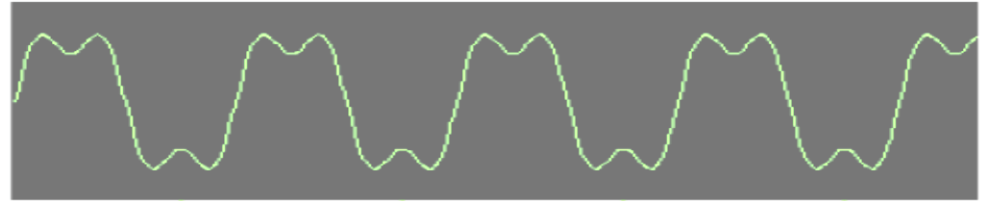


## Costruzione di un'onda quadra per sommatoria di onde sinusoidali.

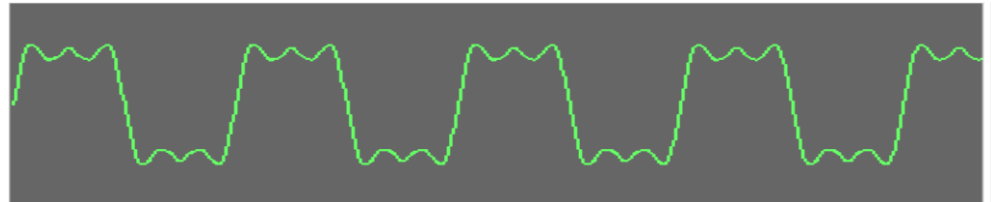
Partiamo con un'onda sinusoidale



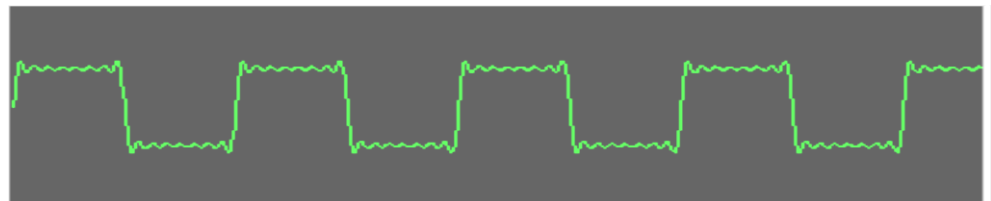
Aggiungiamone un'altra di ampiezza  $\frac{1}{3}$  della precedente e di frequenza **3** volte maggiore (nota come la **terza armonica**)



Aggiungiamone un'altra di ampiezza  $\frac{1}{5}$  della prima e di frequenza **5** volte maggiore (la **quinta armonica**)



Procedendo fino alla 15° armonica, il *pattern* che si ottiene è il seguente :





# I FILTRI

Un filtro è un circuito che **attenua (e sfasa)** le componenti armoniche a frequenze selezionate del segnale di ingresso, producendo così in uscita un segnale di forma diversa ( **DISTORSIONE** )

In teoria il filtro ideale **NON** dovrebbe attenuare le frequenze desiderate, mentre l'attenuazione dovrebbe essere infinita per quelle indesiderate.

Molti segnali ( es: quelli biomedici ) devono essere, in varia misura, “**condizionati**” dai filtri, prima di essere visualizzati o registrati in forma analogica o digitale.

Durante e dopo l'amplificazione il filtro provvede a trattare il segnale con diversi scopi:

- Separare il segnale utile dal rumore
- Eliminare segnali non desiderati mescolati a quello utile
- Eliminare le componenti a frequenze esterne alla banda utile del segnale
- Eliminare le componenti a frequenze molto basse (compresa la continua)

Dal momento che i filtri coprono molti ordini di grandezza di frequenze e ampiezze, è comune descrivere le caratteristiche del filtro usando una scala logaritmica. I decibel permettono di stabilire i rapporti tra due tensioni o tra due correnti.

$$\text{dB} = 20 \log \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$$

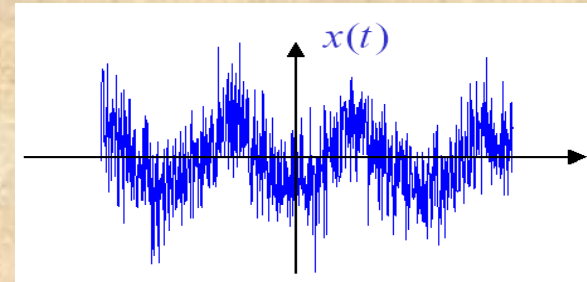
Quindi, 20 dB corrispondono ad un rapporto  $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$  pari a 10,  
infatti :  $20 \cdot \log(10/1) = 20 \text{ dB}$

-3dB corrispondono ad un rapporto di tensione pari a  $1/\sqrt{2} = 0.707$   
infatti :  $20 \cdot \log(1/\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$

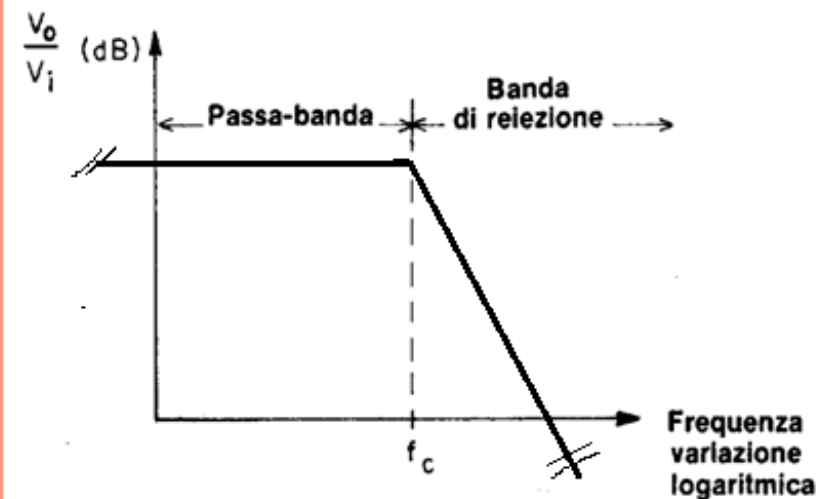
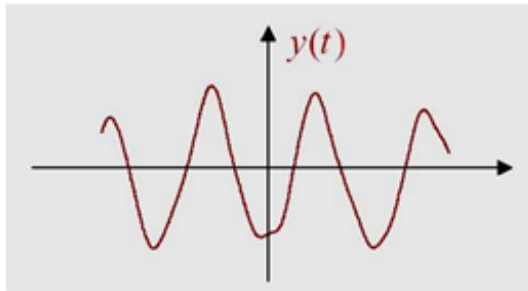
-6dB corrispondono ad un rapporto di tensione pari a  $1/2 = 0.5$   
infatti :  $20 \cdot \log(1/2) = -6 \text{ dB}$

## Tipo di filtro: *Passa-basso ; Passa-alto*

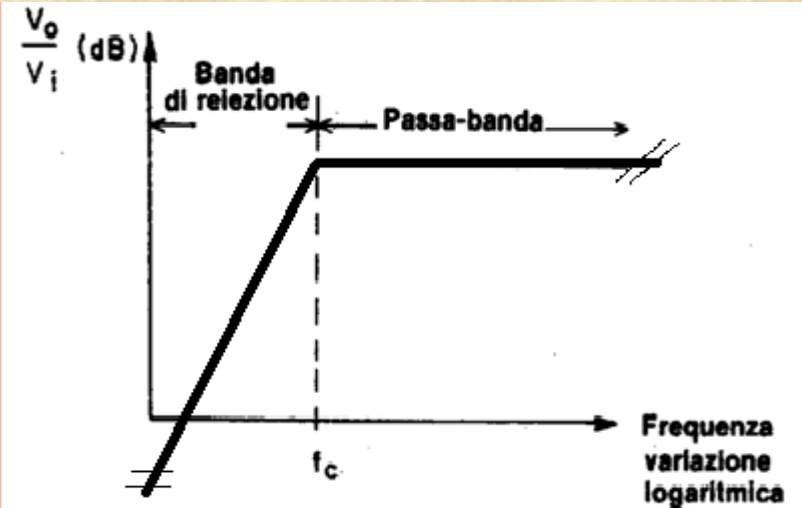
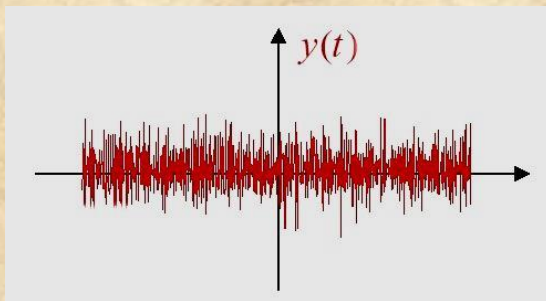
Prendiamo il seguente segnale:



Un filtro **passa-basso** (*low-pass*) attenua tutte le armoniche a frequenza alta e lascia passare quelle inferiori alla frequenza di taglio (*cut frequency*).



Un filtro **passa-alto** (*high-pass*) attenua le armoniche a frequenza bassa e lascia passare quelle al di sopra della frequenza di taglio.

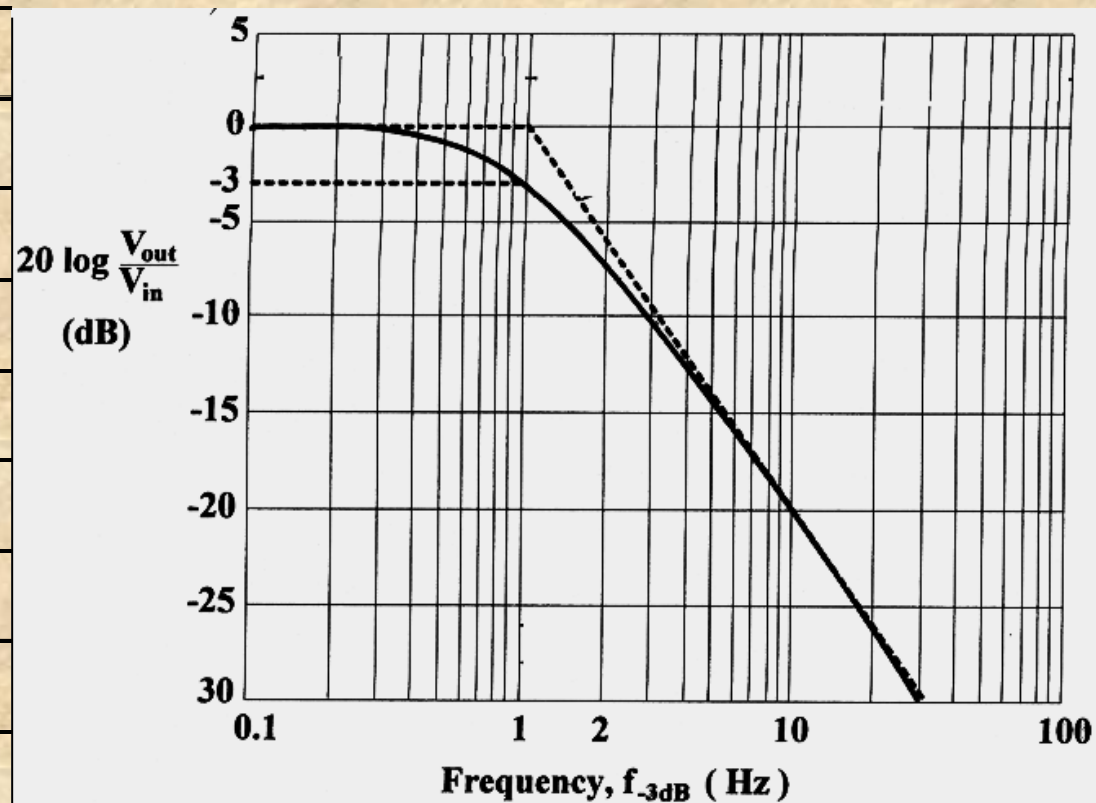


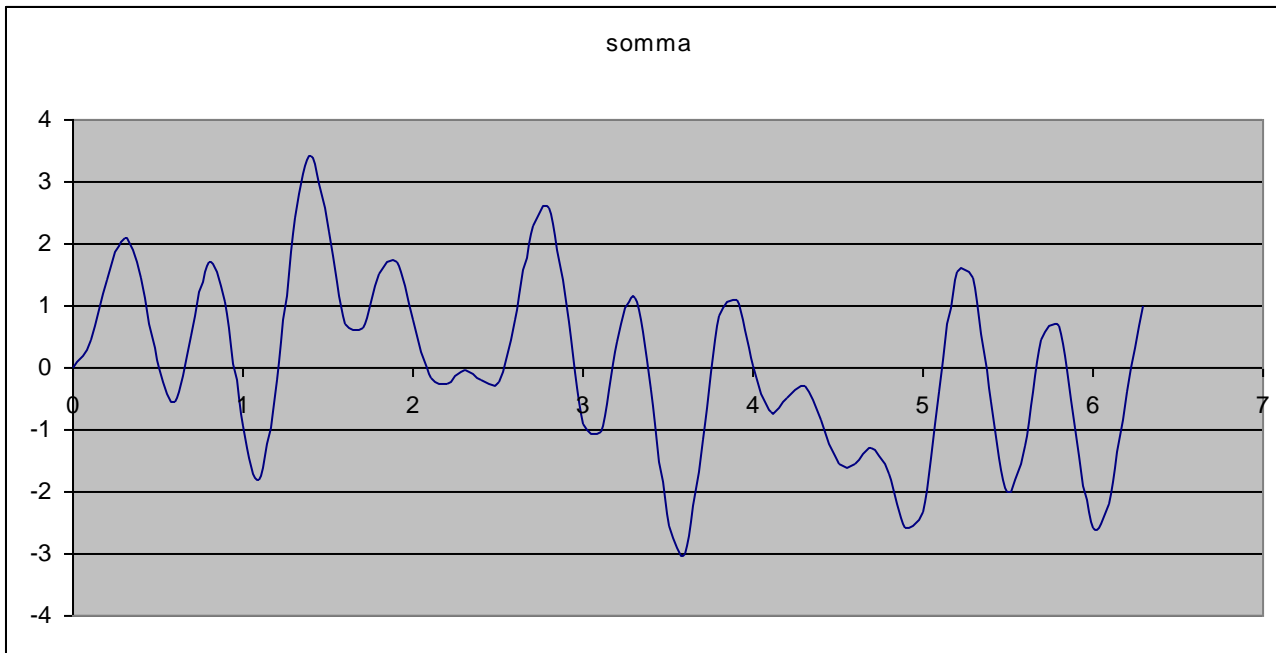
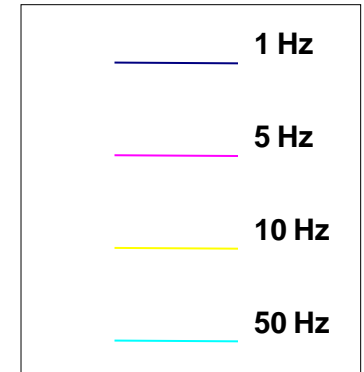
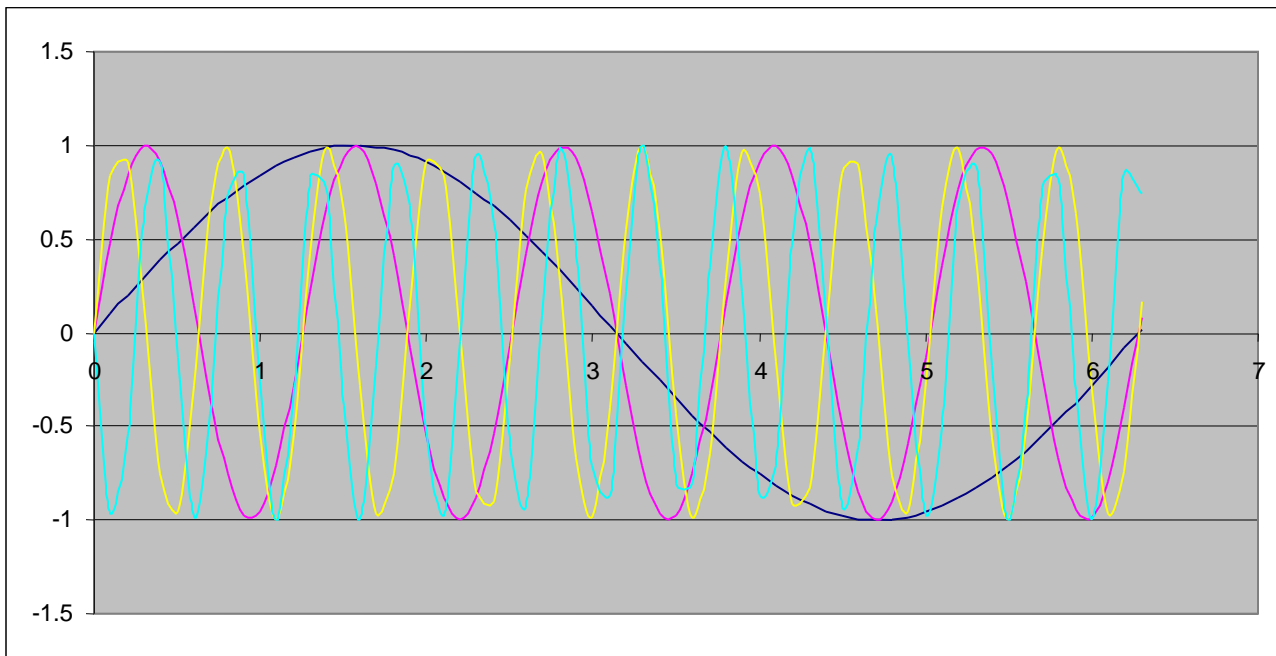


## Frequenza di taglio ( - 3dB, cut-off frequency)

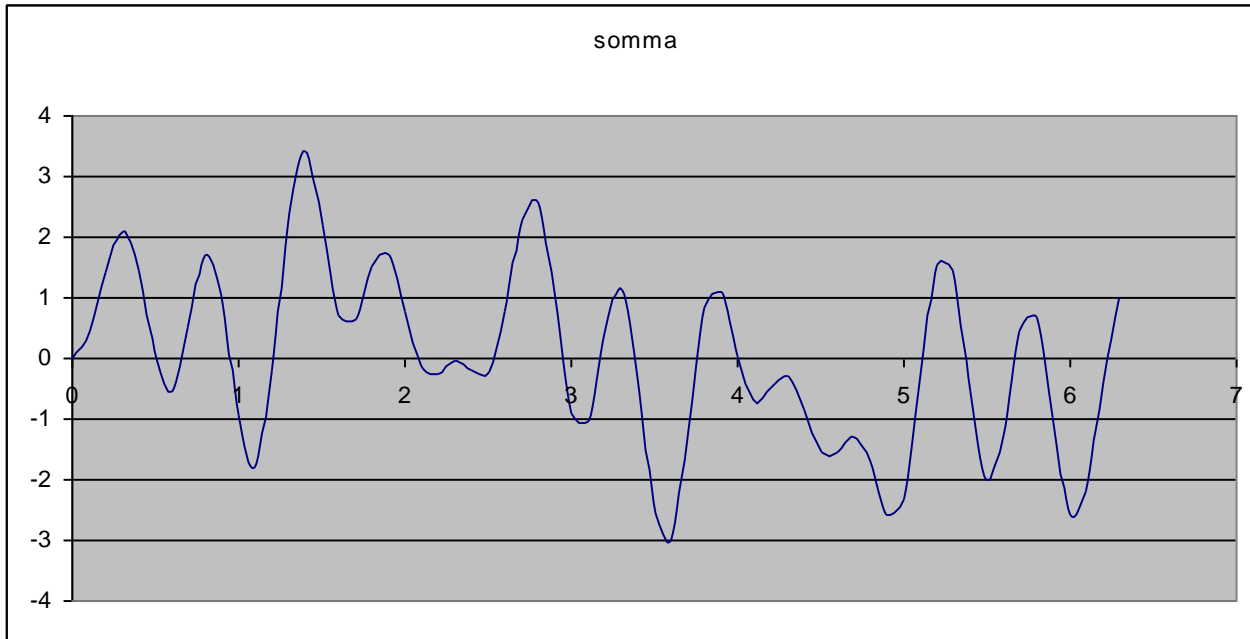
La frequenza di taglio o di *cut-off* (- 3 dB) è la frequenza alla quale l'ampiezza del segnale in uscita dal filtro (**passivo del 1° ordine**) è ridotta a 0,707 volte l'ampiezza del segnale in ingresso.

Decibel	Rapporto di tensioni
3 dB	1,41 : 1
6 dB	2 : 1
20 dB	10 : 1
40 dB	100 : 1
60 dB	1.000 : 1
66 dB	2.000 : 1
72 dB	4.000 : 1
80 dB	10.000 : 1

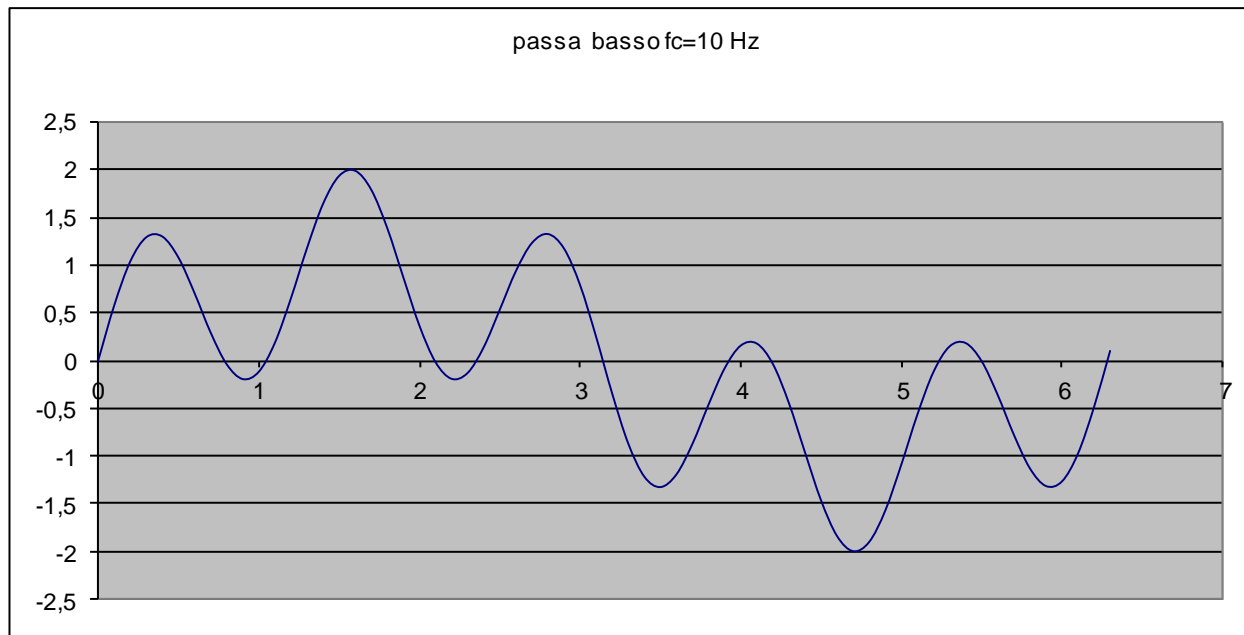




**(1+5+10+50) Hz**



$(1+5+10+50)$  **Hz**

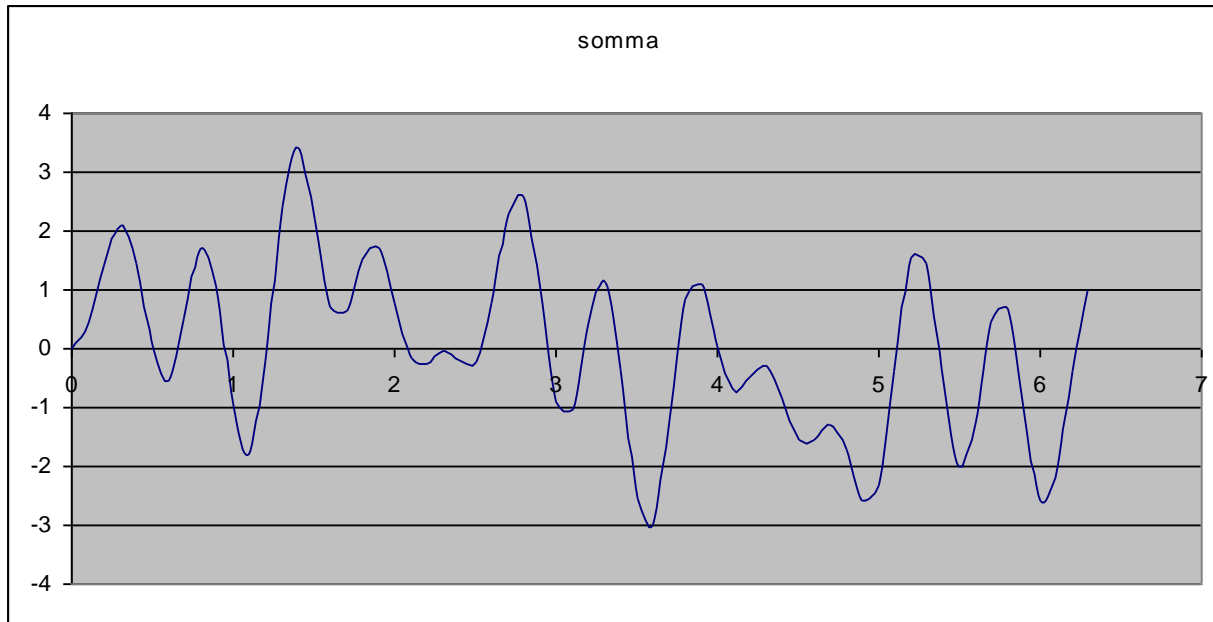


Filtraggio **passa-basso** (*low-pass*) : attenua tutte le armoniche a frequenza più alta della frequenza di taglio ( $f_c = 10$  Hz)

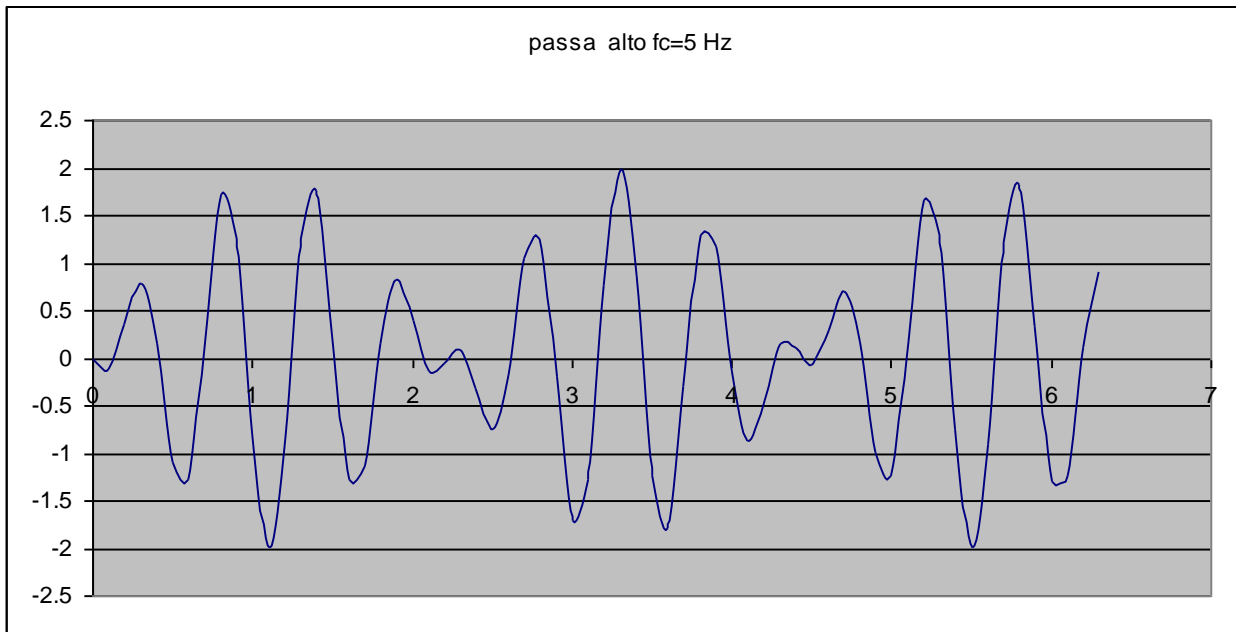


Sono “eliminate” le frequenze a

**10 e 50 Hz**



$(1+5+10+50)$  **Hz**



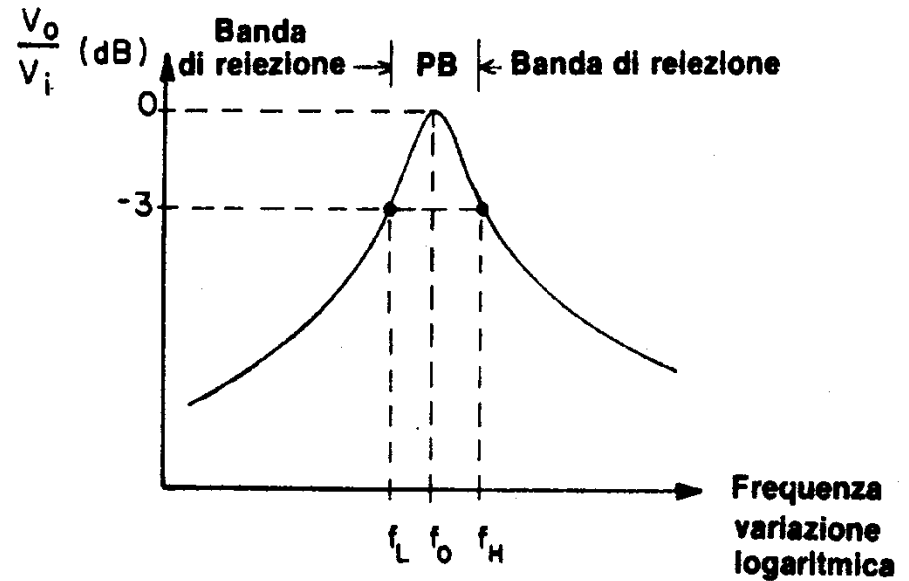
Filtraggio **passa-alto**  
 (*high-pass*) : “elimina” tutte le  
armoniche a frequenza più  
bassa della frequenza di taglio  
 ( $f_c=5$  **Hz**).



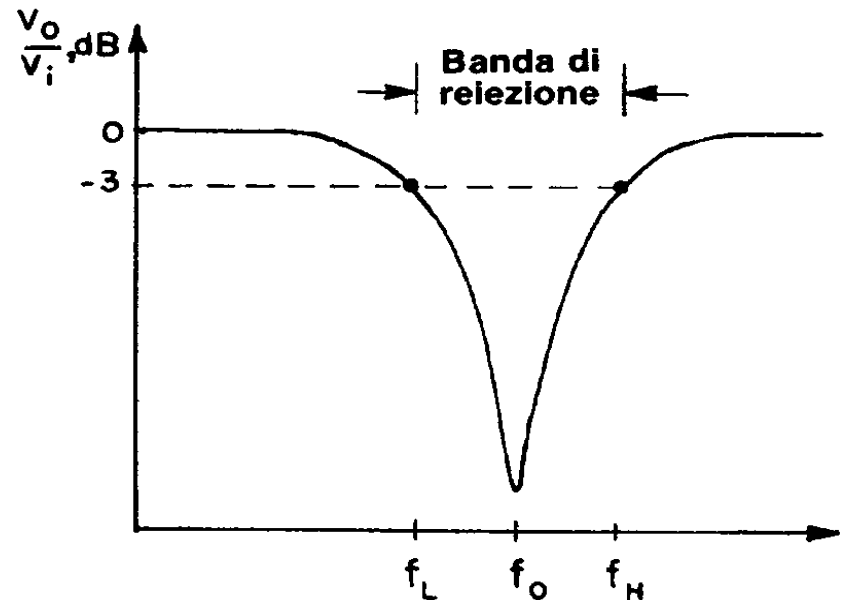
Sono “eliminate” le frequenze  
 a **1 e 5 Hz**

## Tipo di filtro : Passa-banda ; Elimina-banda.

Un filtro **passa-banda** attenua le armoniche inferiori e superiori ad una determinata banda di frequenze.

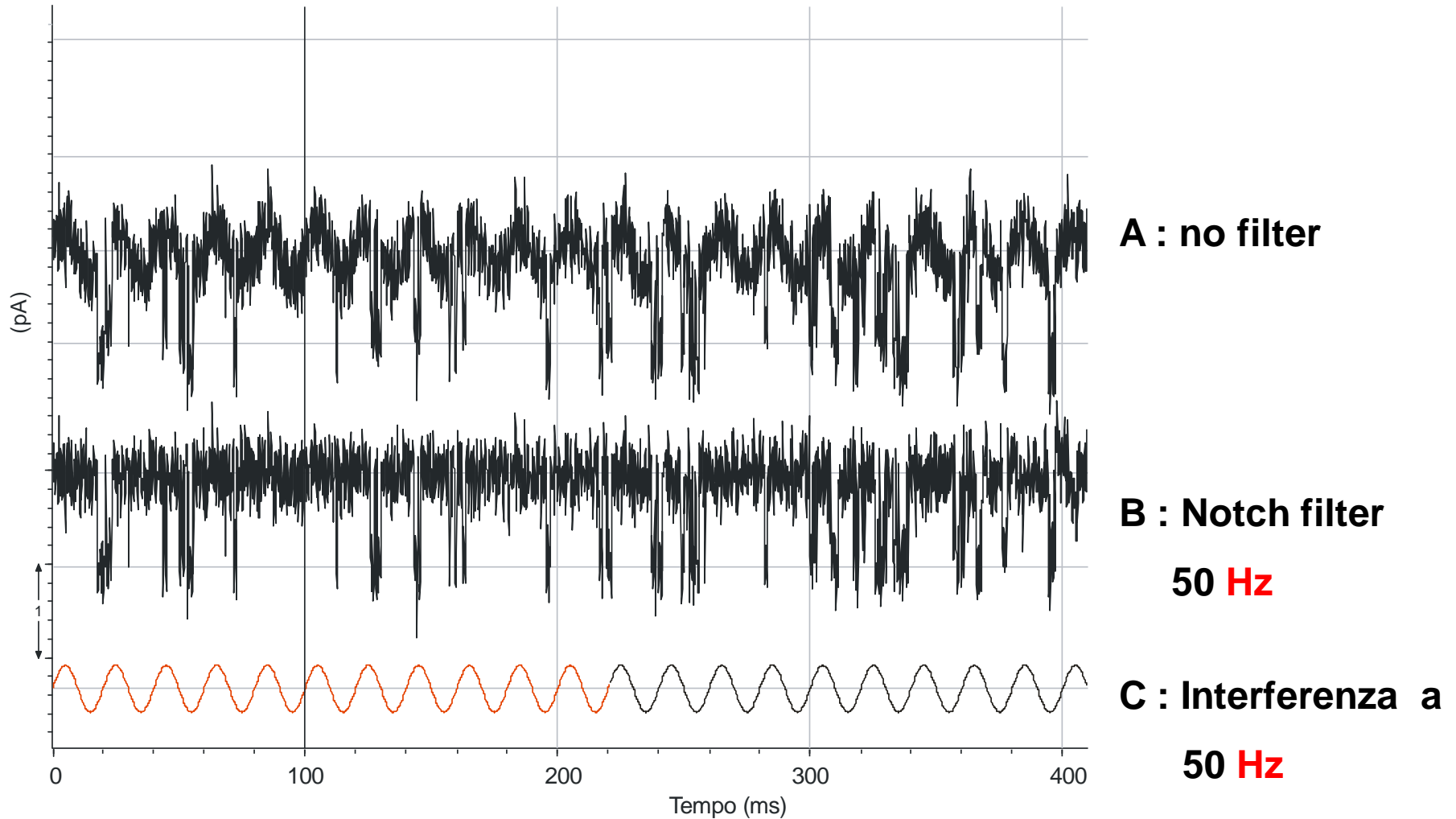


Un filtro a **reiezione di banda (notch)** "elimina" solamente le armoniche all'interno di una determinata banda e lascia passare quelle esterne.





# Filtraggio con filtro "notch" per eliminazione di interferenza di rete (50 Hz)



# APPROFONDIMENTI

## **Ordine del filtro.**

Un semplice filtro costituito da un condensatore e da un resistore è detto **filtro del primo ordine**.

Mettendo in serie vari filtri di primo ordine, se ne costruiscono di ordine superiore.

Più è elevato l'ordine del filtro e maggiore è l'attenuazione delle armoniche fuori banda.

Nel filtro di primo ordine l'attenuazione del segnale oltre la frequenza di taglio aumenta di **6 dB/ottava** e cioè **20 dB/decade**.

## **Funzione di trasferimento ( FdT )**

E' il rapporto tra due grandezze elettriche omologhe in uscita e in ingresso a un filtro, nel dominio della variabile complessa  $j\omega$  es :

$$\mathbf{G(j\omega) = Vout (j\omega) / Vin (j\omega)}$$

## **Polo**

Valore di  $j\omega$  per cui si annulla il Denominatore di G ( e per cui la FdT tende a  $\infty$  )

## **Zero**

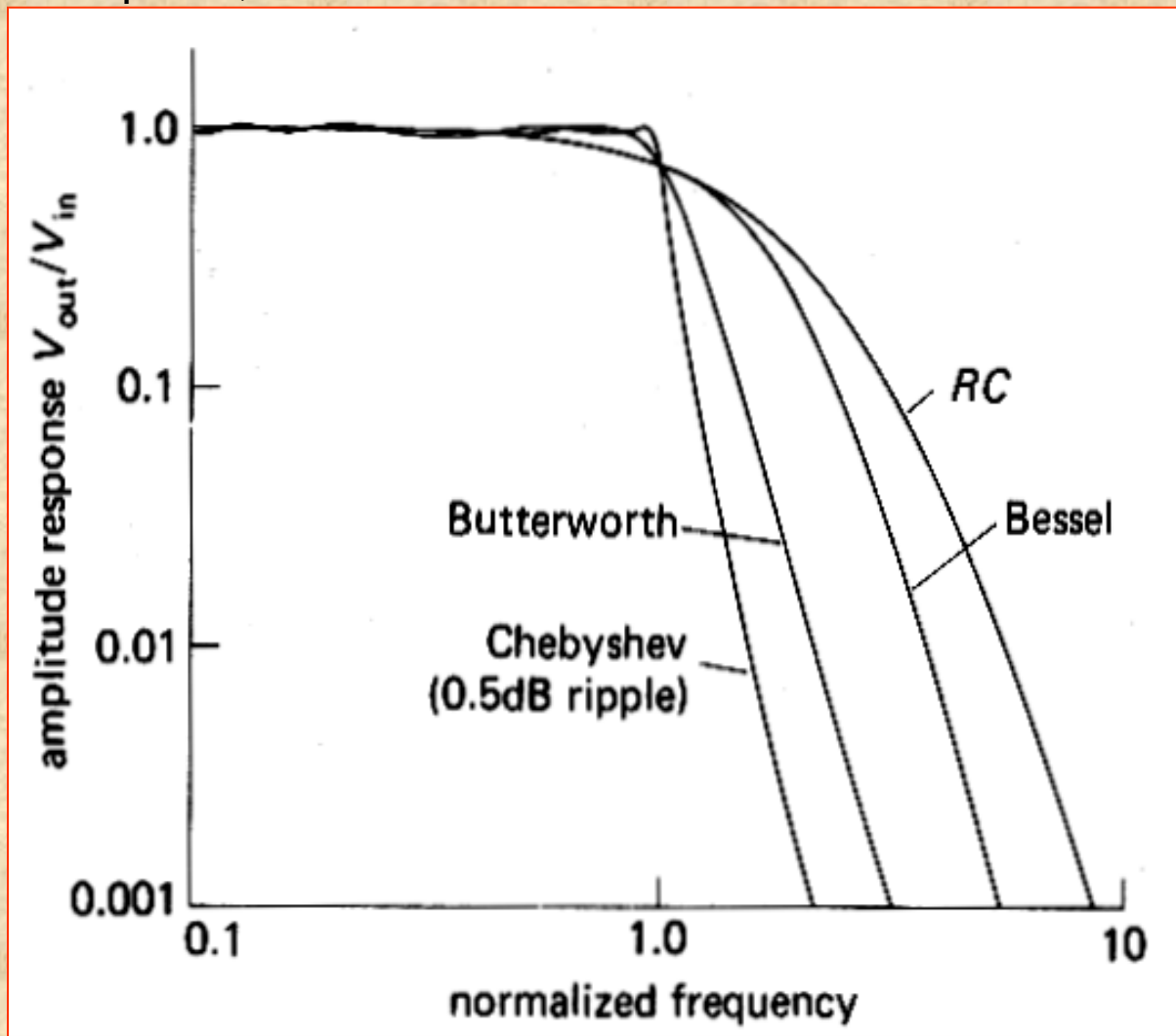
Valore di  $j\omega$  per cui si annulla il Numeratore di G ( e per cui la FdT tende a **0** )

## ***Tipo di filtro.***

Con i filtri attivi possono essere implementate diverse funzioni di trasferimento.

I filtri più comuni sono : *Ellittico, Cauer, Chebyshev, Bessel e Butterworth.*

Ciascuno di questi presenta caratteristiche particolari per quanto riguarda la forma della curva di risposta, il ritardo di fase e l'attenuazione fuori banda.



## Terminologia dei filtri.

### ***Attenuazione***

L'attenuazione è il reciproco del guadagno. Un'attenuazione di 10 corrisponde ad un guadagno di 0,1.

### ***Banda passante (Pass Band )***

La banda passante è la regione di frequenze al di sotto della frequenza di taglio.

### ***Banda soppressa (Stop Band )***

La banda soppressa è la regione di frequenze al di sopra della frequenza di taglio.

### ***Spostamento di fase (Phase Shift )***

Le fasi delle varie componenti sinusoidali del segnale di ingresso sono spostate dal filtro in varia misura dai vari tipi di filtro. I filtri che hanno piccoli spostamenti di fase producono piccole distorsioni nel segnale.

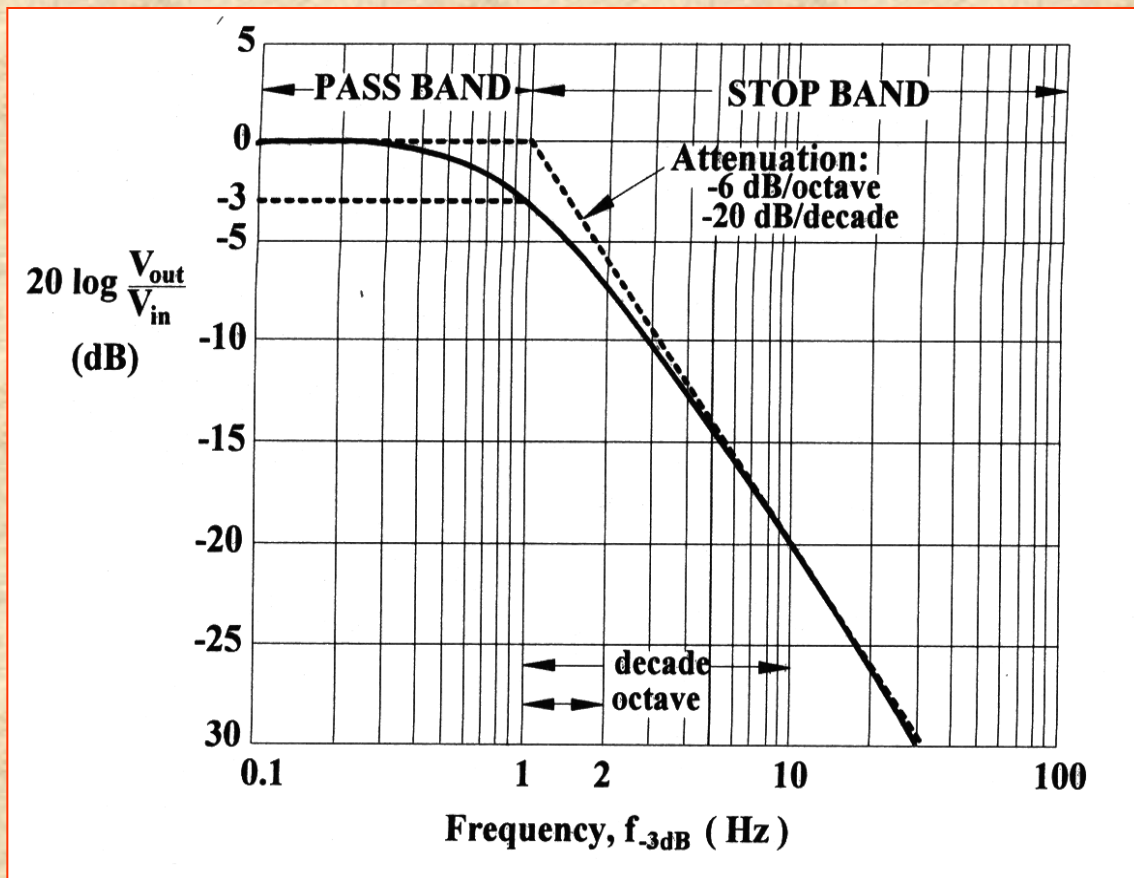


## ***Ottava (octave )***

Un'ottava è l'intervallo di frequenze in cui la frequenza più elevata è doppia della minore.

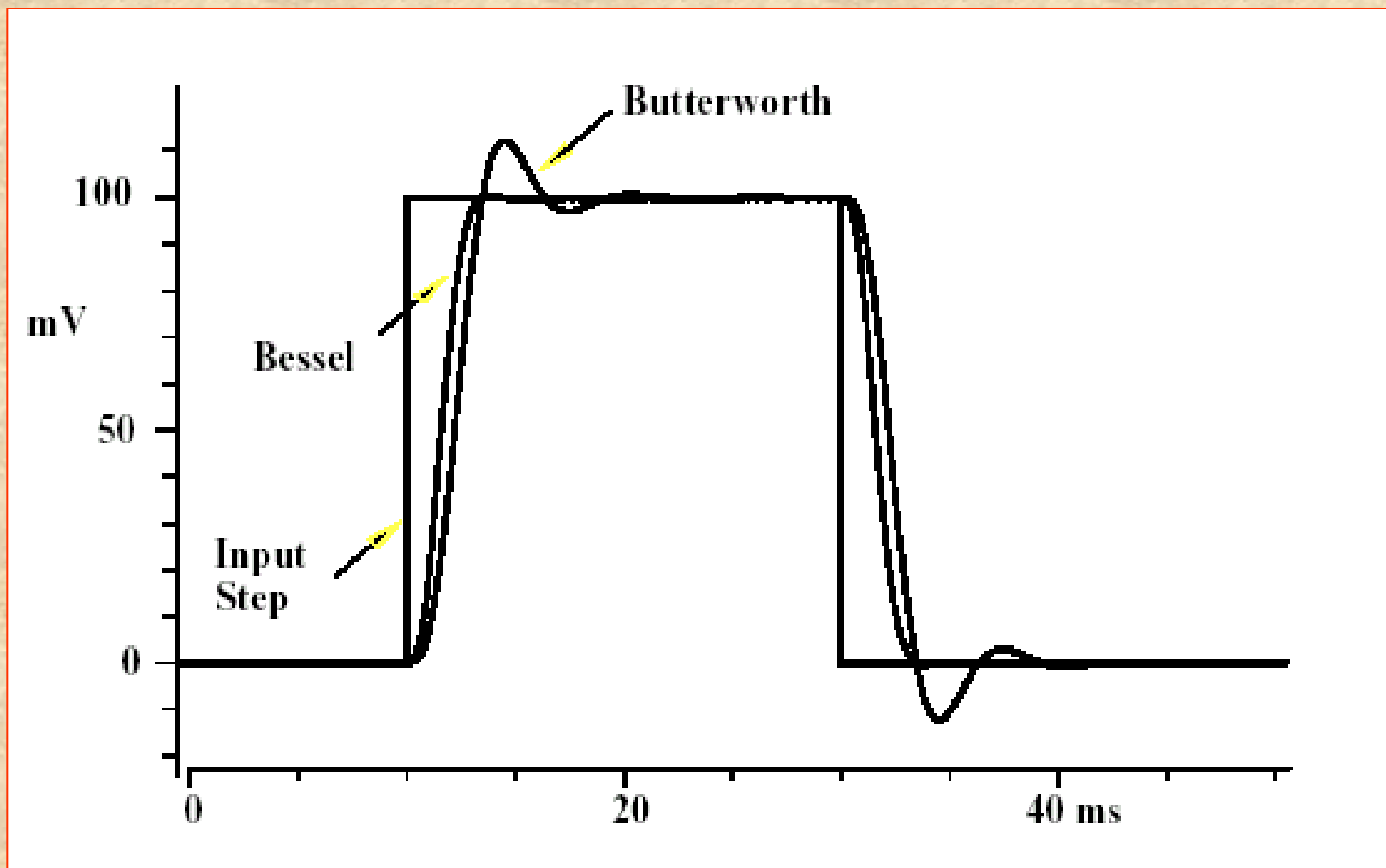
## ***Decade (decade )***

La decade è l'intervallo di frequenze in cui la frequenza più elevata è dieci volte la minore.



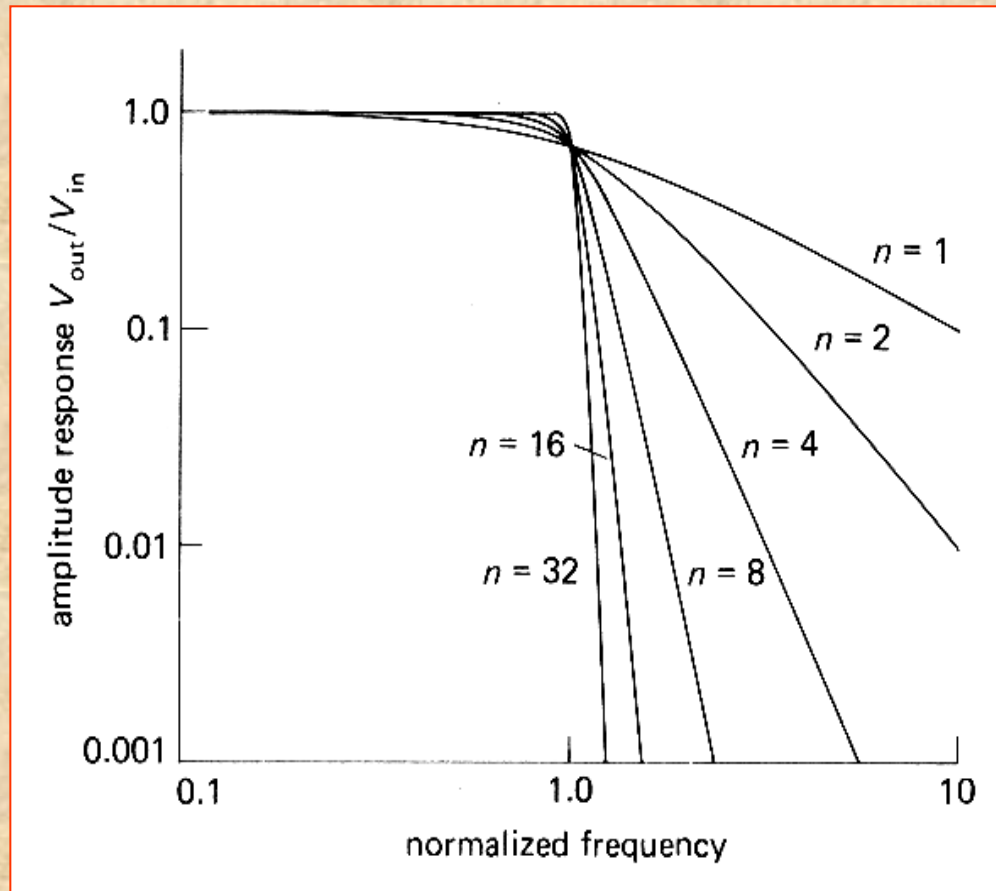
## Overshoot

Quando lo spostamento di fase nella banda passante non è linearmente dipendente dalla frequenza della componente sinusoidale il segnale filtrato presenta **overshoot**. In questo caso la risposta ad un impulso rettangolare è distorta.



# Ordine

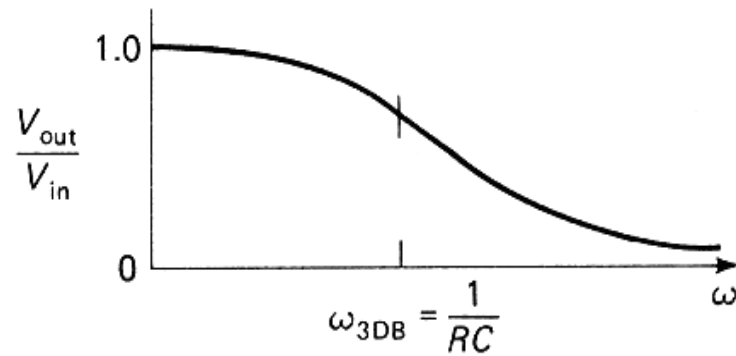
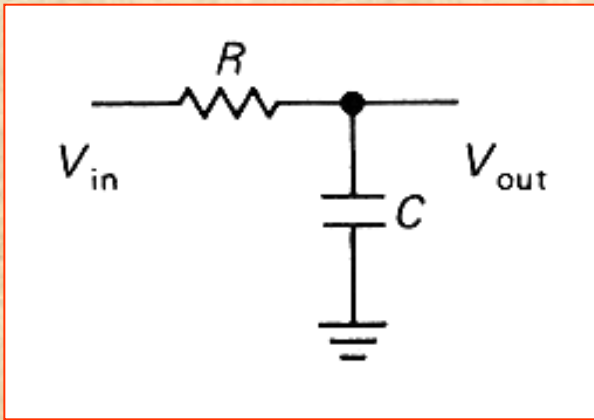
Poli	Ordine	Pendenze (slope)	
1 polo	1° ordine	6 dB/ottava	20 dB/decade
2 poli	2° ordine	12 dB/ottava	40 dB/decade
4 poli	4° ordine	24 dB/ottava	80 dB/decade
8 poli	8° ordine	48 dB/ottava	160 dB/decade



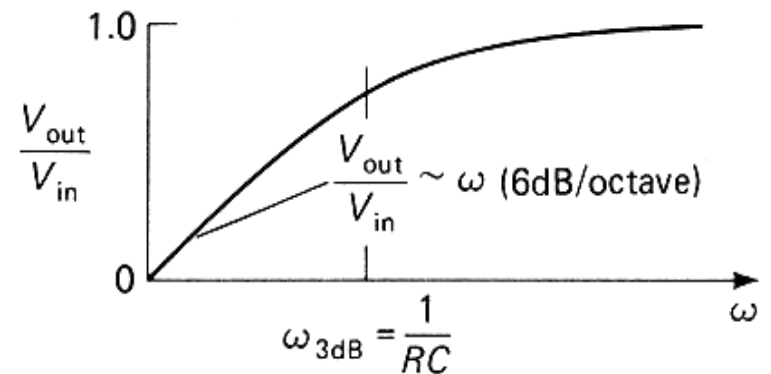
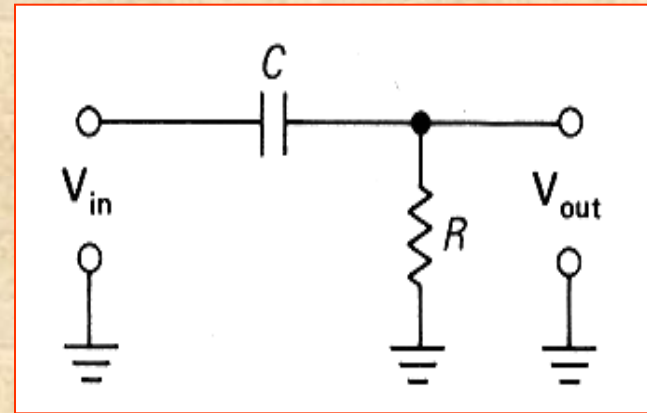
## Esempi di filtri:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

### Filtro passa-basso



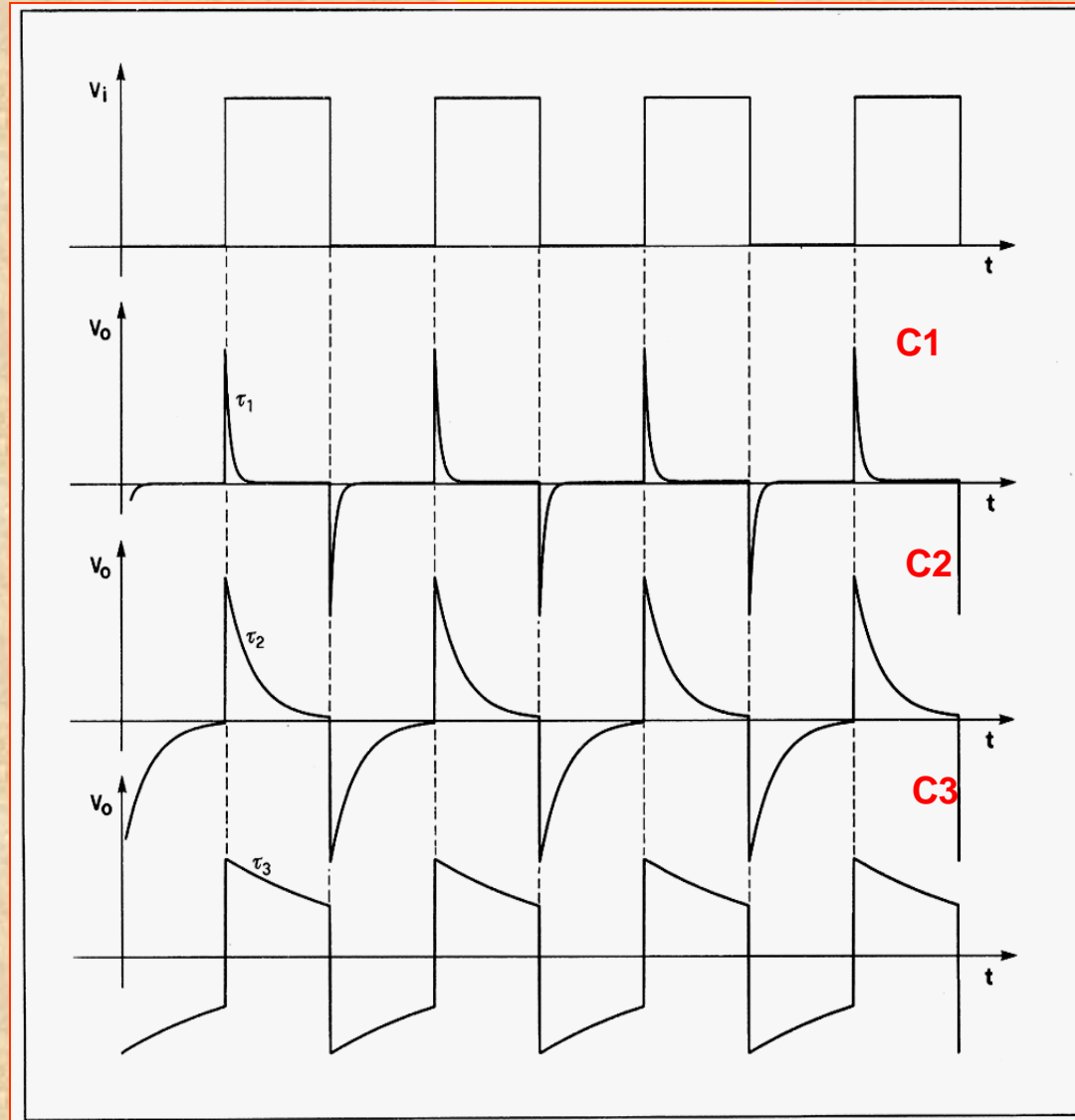
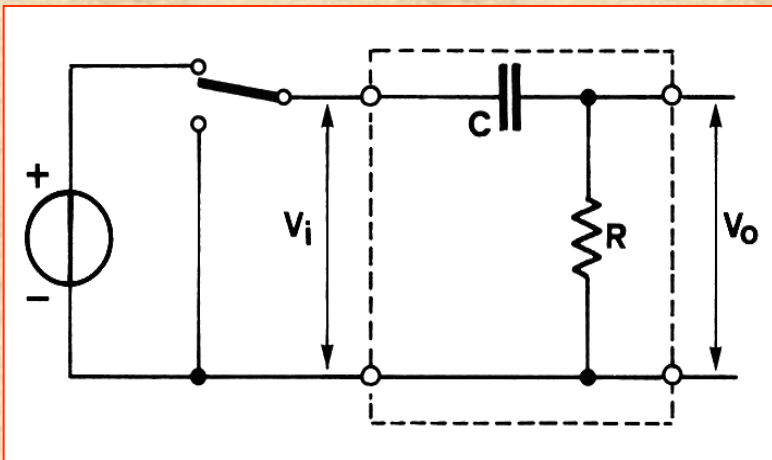
### Filtro passa-alto



# Effetti dei filtri sull'onda quadra.

$C1 < C2 < C3$

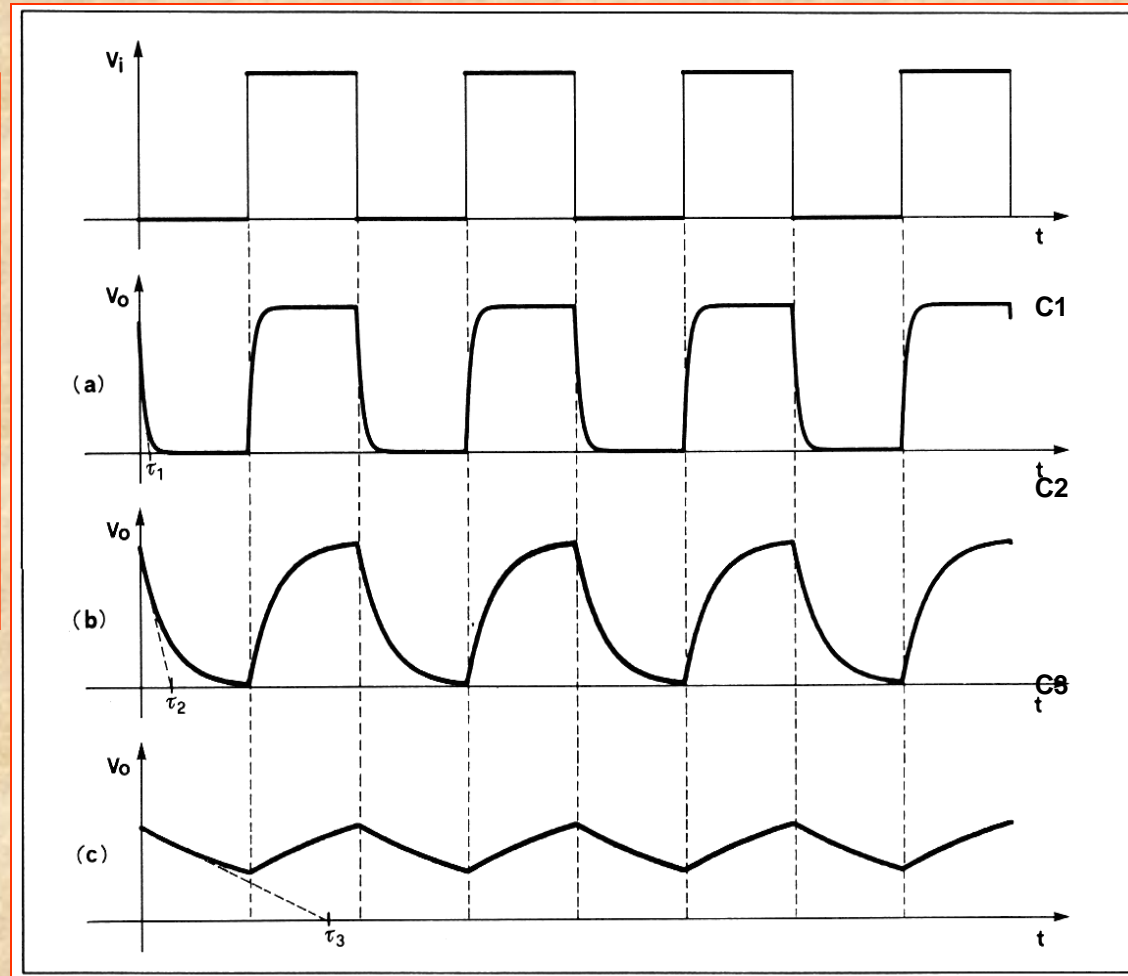
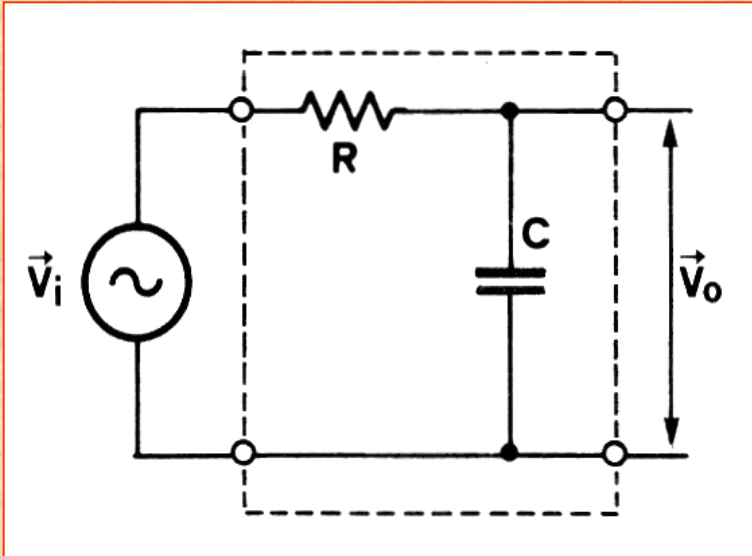
## Filtro passa-alto





# Filtro passa-basso

$$C1 < C2 < C3$$



# Soppressione del rumore : filtro passa-basso

