Teoria dei filtri

I filtri per radiofrequenza, impiegati comunemente negli impianti d'antenna, si possono dividere in quattro tipologie:

- **passa-basso**
- **passa-alto**
- **passa-banda**
- **elimina banda (notch)**

Sono costituiti da condensatori, fissi o variabili, e bobine (induttanze) d'opportuno valore, collegati tra loro secondo un dato schema.

- **Il filtro passa-basso attenua le frequenze superiori ad una certa frequenza di taglio, che è definita sulla base dei valori di capacità ed induttanza presenti nel circuito.**

- **Il filtro passa-alto attenua le frequenze inferiori ad una certa frequenza di taglio**.

- **Il filtro passa-banda è una combinazione di un filtro passa-alto con un filtro passa-basso.**

- **ll filtro elimina banda, detto anche notch, è una combinazione di filtri che attenuano fortemente i segnali che si trovano all'interno di una banda ristretta, lasciando invece inalterati i segnali che sono al di fuori.**
  Questo tipo di filtro è particolarmente utile per ridurre i problemi d'i**ntermodulazione** e **frequenza immagine** causati dai forti segnali delle stazioni di radiodiffusione che trasmettono nella Banda
  FM (88 ↔ 108 [MHz])

I parametri che caratterizzano un filtro sono :

- **la frequenza di taglio (passa-basso e passa-alto)**
- **la frequenza di centro banda e il fattore di qualità per i filtri passa-banda e notch**
- **la corrispondente attenuazione in dB e la pendenza della curva di Guadagno in Banda attenuata**

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (FdT) :

- **E' il rapporto tra una grandezza elettrica in OUT (es: Vout, oppure Iout) e la omologa grandezza in IN (Vin, oppure Iin), definite NEL DOMINIO DELLA PULSAZIONE ω (o della FREQUENZA f)**

- **E' sempre in forma RAZIONALE FRATTA e i 2 polinomi a Numeratore e Denominatore differiscono al massimo per un grado. Il più grande fra i 2 gradi determina l' ORDINE del filtro.**

  In formula : $\bar{G}(j\omega) = \bar{V}out(j\omega) / \bar{V}in(j\omega)$

ZERO : valore di jω che annulla il Numeratore di $\bar{G}$

POLO : valore di jω che annulla il Denominatore di $\bar{G}$

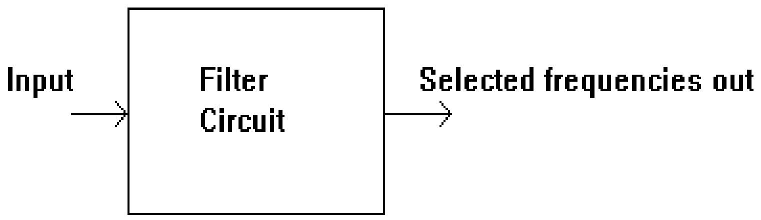
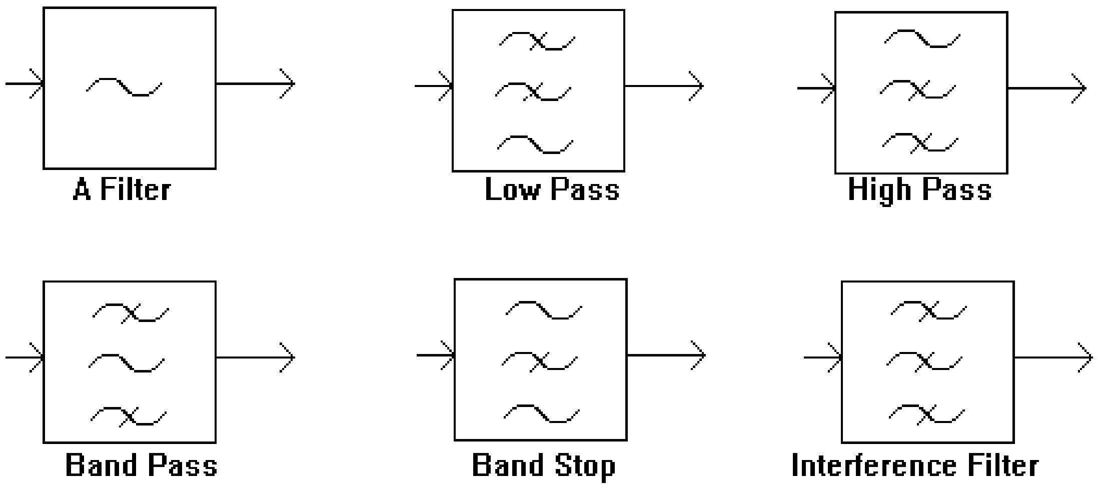


fig. 1

Questo è lo schema a blocchi di un generico filtro avente in ingresso un generico segnale , con in uscita il segnale modificato in vario modo (**attenuato e sfasato**) a seconda della frequenza .

Nell'immagine successiva vengono raffigurati i rispettivi blocchi di un filtro generico, di un passa-basso, di un passa-alto, passa-banda, elimina-banda :



BLOCK DIAGRAM SYMBOLS FOR FILTERS

Filtri elementari passivi

Si dicono passivi perché NON vi sono componenti attivi : la resistenza dissipa energia per effetto Joule, il condensatore e l'induttore la conservano, quindi sono passivi, in altre parole non forniscono un guadagno.
I filtri passivi si dividono in 2 categorie :

1°) A polo singolo : sono basati sulla combinazione di resistori, capacitori e induttori.
Sono circuiti **RC, RL .**

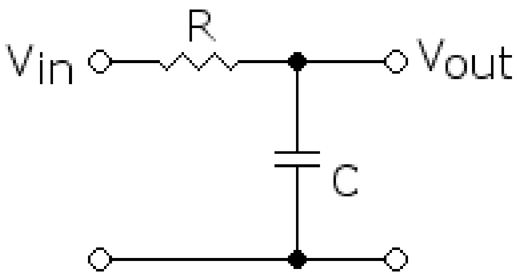
Sono chiamati "filtri passivi", perché il loro funzionamento non dipende da una fonte di alimentazione esterna e il segnale di OUT ha ampiezza minore o al max uguale a quella del segnale di IN.

Gli induttori bloccano i segnali ad alta frequenza e conducono quelli a bassa frequenza, mentre i condensatori si comportano al contrario.
Un filtro in cui il segnale di IN passa attraverso un induttore, o nel quale un condensatore fornisce un percorso verso terra, presenta minore attenuazione ai segnali a bassa frequenza rispetto a quelli ad alta frequenza ed è perciò un filtro passa-basso.
Se il segnale di IN passa attraverso un condensatore, o ha un percorso a terra attraverso un induttore, allora il filtro presenta un'attenuazione minore per i segnali ad alta frequenza rispetto a quelli a bassa frequenza, ed è un filtro passa-alto.
I resistori da parte loro non hanno la proprietà di selezionare le frequenze, ma sono aggiunti a condensatori e induttori per determinare le **costanti di tempo** del circuito, e quindi le frequenze di taglio.

2°) Multipolari : LC , RLC .
I filtri del secondo ordine (o di ordine superiore) sono misurati con il loro **fattore di qualità o fattore Q. Si dice che un filtro ha un Q alto, se seleziona o inibisce un intervallo di frequenze stretto, relativamente alla sua frequenza centrale.**

Vediamo ora i vari tipi di filtri passivi a polo singolo.

1. FILTRO PASSIVO PASSA-BASSO del 1° ORDINE

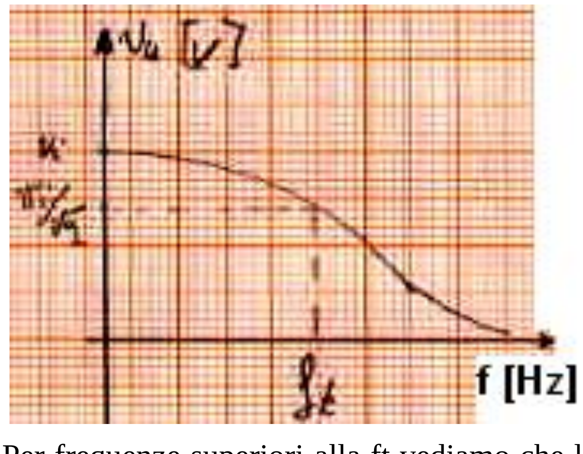


Il circuito rappresenta un filtro passa-basso.
Si dice filtro passa basso un circuito che fa passare in uscita solo i segnali aventi frequenza più bassa di un'altra prefissata. La frequenza prefissata, che viene scelta a piacere, viene detta **frequenza di taglio** e la indichiamo con **ft.**
Possiamo vedere come il condensatore è un componente che conduce molto le alte frequenze mentre attenua e non fa passare le basse frequenze; nel nostro caso, però, il condensatore non è posto in serie tra ingresso e uscita ma in parallelo all'uscita, quindi le altre frequenze vengono messe in corto circuito dal condensatore verso massa, e non le ritroviamo in uscita ,dove arrivano solo le basse frequenze; quindi il filtro si comporta da filtro passa basso.

Per calcolare la frequenza di taglio si usa la seguente formula:

$$ft = 1/\ 2\pi RC$$

Se indichiamo con **Vi** la tensione di ingresso e con **Vo** la tensione di uscita il diagramma del filtro è in funzione della frequenza.



Possiamo vedere come a frequenza zero l'uscita assuma il massimo valore, cioè **Vo = V**i ;
in corrispondenza della frequenza di taglio ft l'uscita assume il valore **Vo = Vi /√2**
Si dice frequenza di taglio di un filtro quella frequenza alla quale l'attenuazione del filtro, cioè il rapporto tra tensione di uscita e tensione di ingresso è uguale a
1/√**2** ,cioè : Vo/Vi= 1 / √**2**

Per frequenze superiori alla ft vediamo che la curva scende verso il basso e quindi la tensione in uscita risulta molto attenuata.

Calcoliamo la FdT :

$$\overline{G}\,(j\omega) = \overline{Vout} / \overline{Vin} = \overline{Zc} / (R + \overline{Zc}) = 1 / 1 + j\omega RC$$

$$|G| = 1 / \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \qquad G(j0) = 1 \rightarrow 0\ [dB]$$

$$G(j\infty) = 0 \rightarrow -\infty\ [dB] \qquad |G(j\omega_t)| = 1/\sqrt{2} \rightarrow -3\ [dB]$$

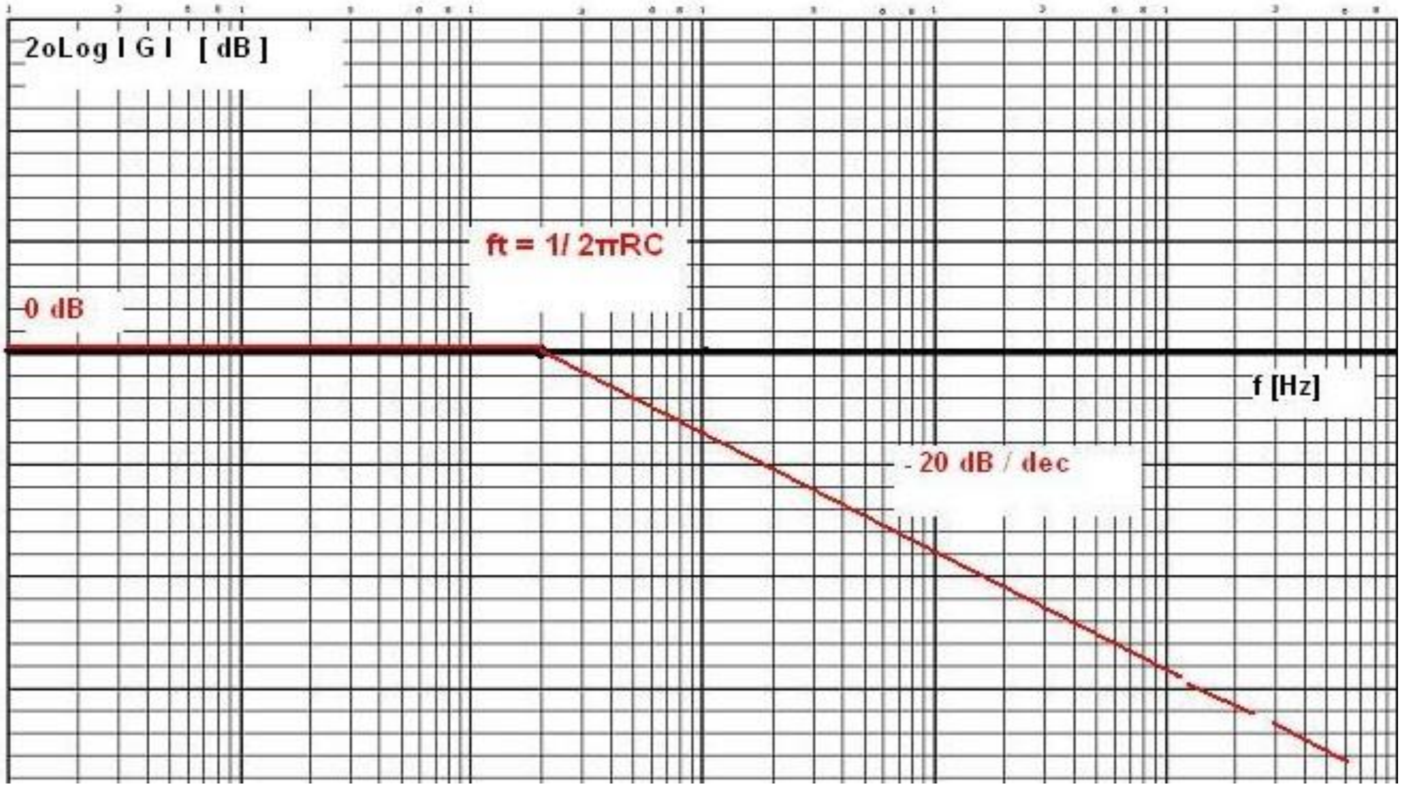
Fase di G = - artan (ωRC)

Fase (per ω = 0) = 0°

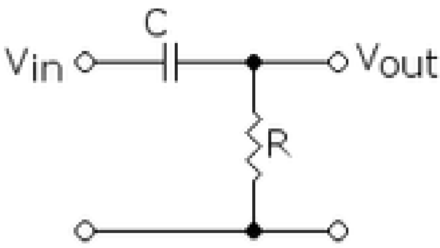
Fase (per ω→ ∞) = - 90°

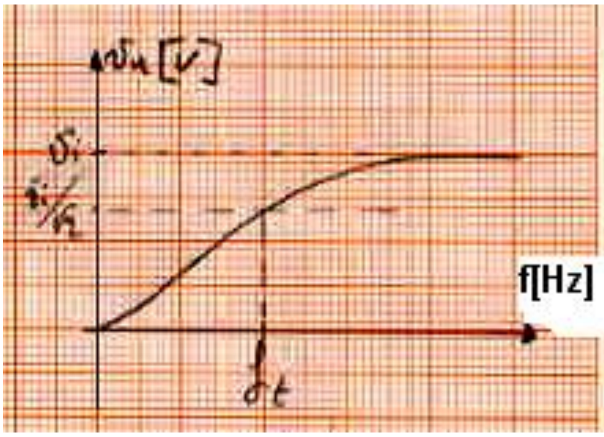
Fase (per $\omega = \omega_t$) = - 45°

Curva ideale del Guadagno di un generico filtro RC passa-basso (in scale logaritmiche)



2. FILTRO **PASSIVO PASSA - ALTO del 1° ORDINE**



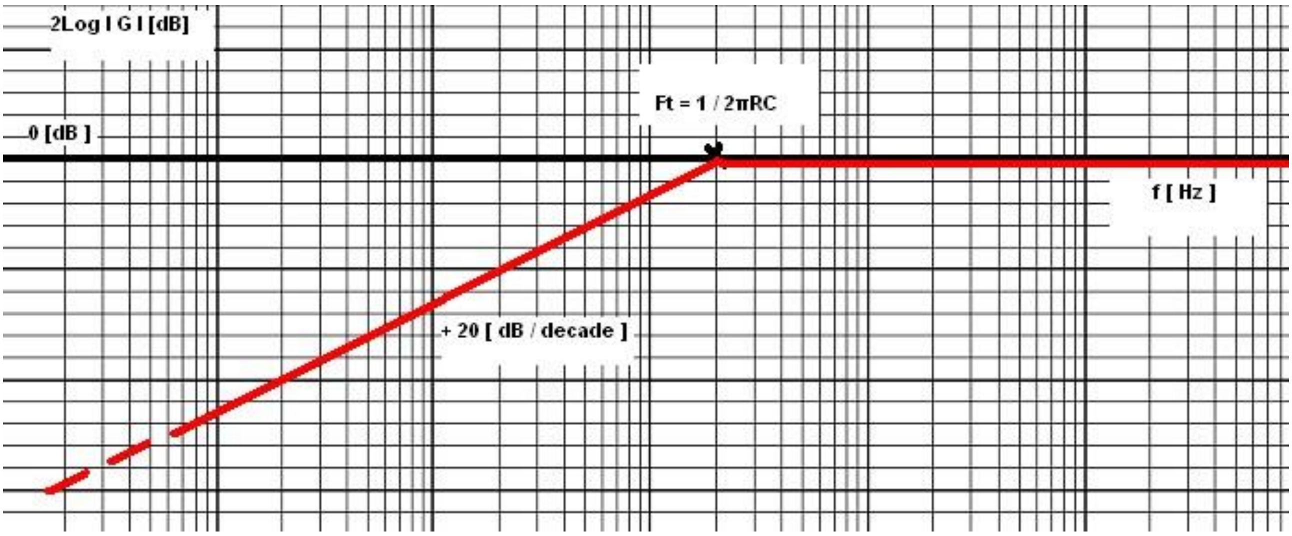


Il circuito rappresentato è un filtro passa-alto.Si dice filtro passa alto un circuito che fa passare in uscita solo le frequenze più alte della frequenza di taglio **ft.**
Possiamo vedere come il condensatore sia un componente che conduce molto le alte frequenze mentre attenua e non fa passare le basse frequenze; nel nostro caso il condensatore è posto in serie tra ingresso e uscita quindi le altre frequenze vengono messe in corto circuito dal condensatore e le ritroviamo in uscita; mentre per le basse frequenze il condensatore si comporta come un circuito aperto, quindi le basse frequenze non riescono a passare; il circuito si comporta perciòda filtro passa alto.

Per calcolare la frequenza di taglio si usa la seguente formula: $\mathbf{Ft = 1 / 2\pi RC}$

Se indichiamo con Vi la tensione di ingresso e con Vo la tensione di uscita il diagramma del filtro è in funzione della frequenza.
Possiamo vedere come a frequenza zero l'uscita assume il valore zero; per frequenze inferiori a ft la curva si mantiene molto bassa, quindi le basse frequenze non passano.
In corrispondenza della frequenza di taglio ft l'uscita assume il valore $\mathbf{vu = vi / \sqrt{2}}$
Per frequenze superiori a ft vediamo che la curva va verso il valore massimo vi.
Quindi è un filtro passa alto.

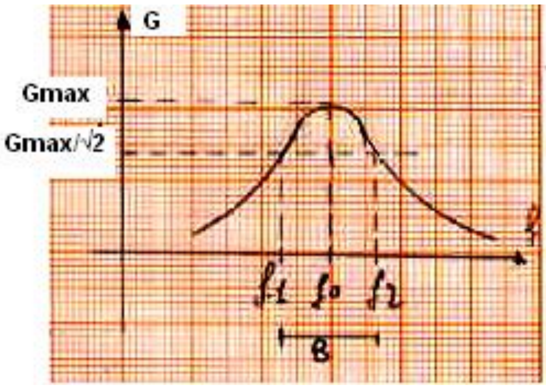
Curva ideale del Guadagno di un generico filtro RC passa-alto (in scale logaritmiche)



$$\overline{G}(j\omega) = \overline{Vout} / \overline{Vin} = R / (R + \overline{Zc}) = R / (R + 1/j\omega C) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

3. FILTRO PASSIVO PASSA-BANDA del 2° ORDINE

Un filtro passa-banda è un dispositivo che permette il passaggio di frequenze all'interno di un certo intervallo (la banda passante) e attenua le frequenze al di fuori di esso.



Un esempio di un circuito analogico che si comporta come filtro passa-banda è un circuito **RLC** (una rete elettrica formata da resistore-induttore-condensatore).
I filtri passa-banda possono anche essere creati dalla combinazione di un filtro passa-basso e un filtro passa-alto.
Un filtro ideale dovrebbe avere una **banda passante perfettamente piatta,** non dovrebbe avere né attenuazione né guadagno per le frequenze all'interno, e dovrebbe attenuare completamente tutte le frequenze al di fuori di essa. Inoltre, dovrebbe avere un intervallo ben determinato, con una suddivisione netta tra frequenze all'interno o all'esterno della banda passante (cioè il grafico del Guadagno dovrebbe essere un rettangolo).Nella pratica, **nessun filtro passa-banda è ideale.**
Il filtro non attenua completamente tutte le frequenze al di fuori della banda voluta; in particolare, esiste una regione contigua alla banda passante dove le frequenze sono poco attenuate.
Tra la frequenza di taglio inferiore $\mathbf{f_1}$ e quella superiore $\mathbf{f_2}$ di una banda passante, si trova la **frequenza di risonanza $\mathbf{f_0}$, in corrispondenza della quale il guadagno del filtro è massimo**.
La banda passante del filtro è semplicemente la differenza tra $\mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_1}$.

Filtri attivi

Sfruttando essenzialmente il diverso comportamento di elementi reattivi, **C** ed **L**, al variare della frequenza ,si realizzano filtri di vario tipo con prestazioni e strutture molto differenziate. Se la rete filtrante comprende solo elementi passivi, il filtro è detto passivo, e deve avere, necessariamente, su tutto l'asse delle frequenze un guadagno di potenza inferiore o uguale a 1; se è presente un componente attivo (**tipicamente un amplificatore operazionale**), il filtro è di tipo attivo, ed è possibile che abbia, in un certo intervallo di frequenze, un guadagno di potenza maggiore di 1.
Gli amplificatori operazionali sono frequentemente utilizzati nel progetto dei filtri attivi. Possono avere Q elevati e raggiungere la risonanza senza utilizzo di induttori. **La loro frequenza superiore è però limitata dalla larghezza di banda degli amplificatori utilizzati.**

I filtri attivi si differenziano da quelli passivi per le seguenti proprietà :

• **Amplificano il segnale filtrato**: Presentano quindi un elemento attivo (amplificatore) che permette di attribuire al segnale in uscita l'ampiezza più opportuna.

• **Si può progettare il filtro indipendentemente dal carico e si possono collegare in cascata più celle filtranti senza che esse interagiscano tra di loro.** I componenti attivi grazie alla loro **bassa impedenza d'uscita**, non risentono dell'influenza del carico.

• **E' possibile evitare l'uso di induttanze:** infatti è possibile ottenere filtri attivi combinando reti RC con amplificatori operazionali. Ciò comporta una diminuzione dell'ingombro e una diminuzione dei disturbi di natura elettromagnetica. Solo alle alte frequenze le bobine sono ancora usate.

• **Permettono di realizzare facilmente filtri di ordine elevato**: Possono infatti essere collegati in cascata filtri del 1°, 2° ordine per realizzare filtri di ordine superiore.

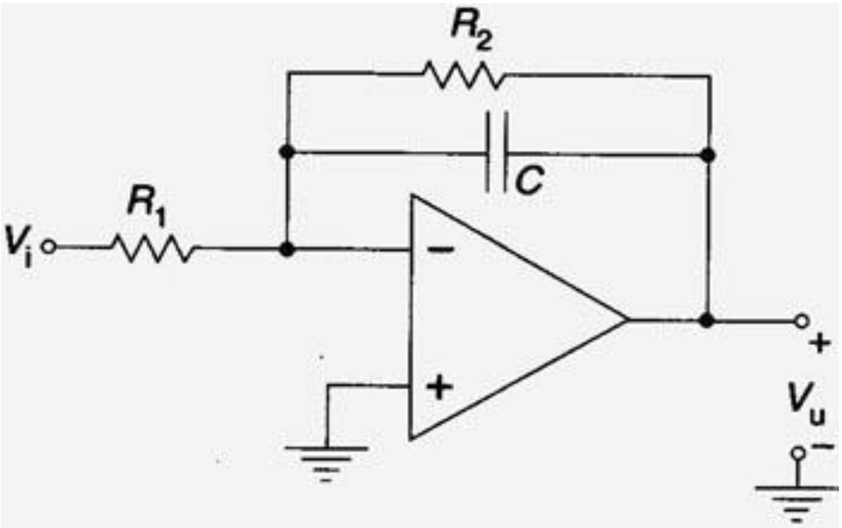
• **Si ha maggiore facilita nella progettazione e nella realizzazione.** Esistono in commercio integrati che per il completamento del filtro richiedono solo l'aggiunta di pochi componenti.

I filtri attivi realizzati con l'impiego di amplificatori operazionali presentano numerosi vantaggi rispetto ai filtri passivi: la presenza dell' amplificatore operazionale oltre a consentire un eventuale guadagno rende la progettazione del filtro indipendente dalle reti del filtro stesso.
D'altra parte i **filtri passivi** che sono costituiti solamente con elementi passivi non necessitano di una elevata alimentazione e **possono agire anche a frequenze molto elevate irraggiungibili da un filtro attivo** dato la limitata larghezza di banda dell' operazionale (dipendente anche dal guadagno).
La classificazione dei filtri viene effettuata oltre che per il tipo di filtraggio anche in relazione del grado del polinomio al denominatore della funzione di trasferimento, detto **ordine del filtro.**

La s**elettività** dei filtri attivi viene misurata mediante la loro capacità di attenuare i segnali con una frequenza esterna alla banda,inoltre la selettività è legata alla **pendenza** della curva,rappresentata dall'andamento dell'amplificazione in funzione della frequenza.
Andiamo ora ad analizzare i diversi tipi di filtri:

- **FILTRI PASSA BASSO (LP);**
- **FILTRI PASSA ALTO (HP);**
- **FILTRI PASSA BANDA (BP).**

1. Filtro attivo passa-basso con A.O. (invertente)

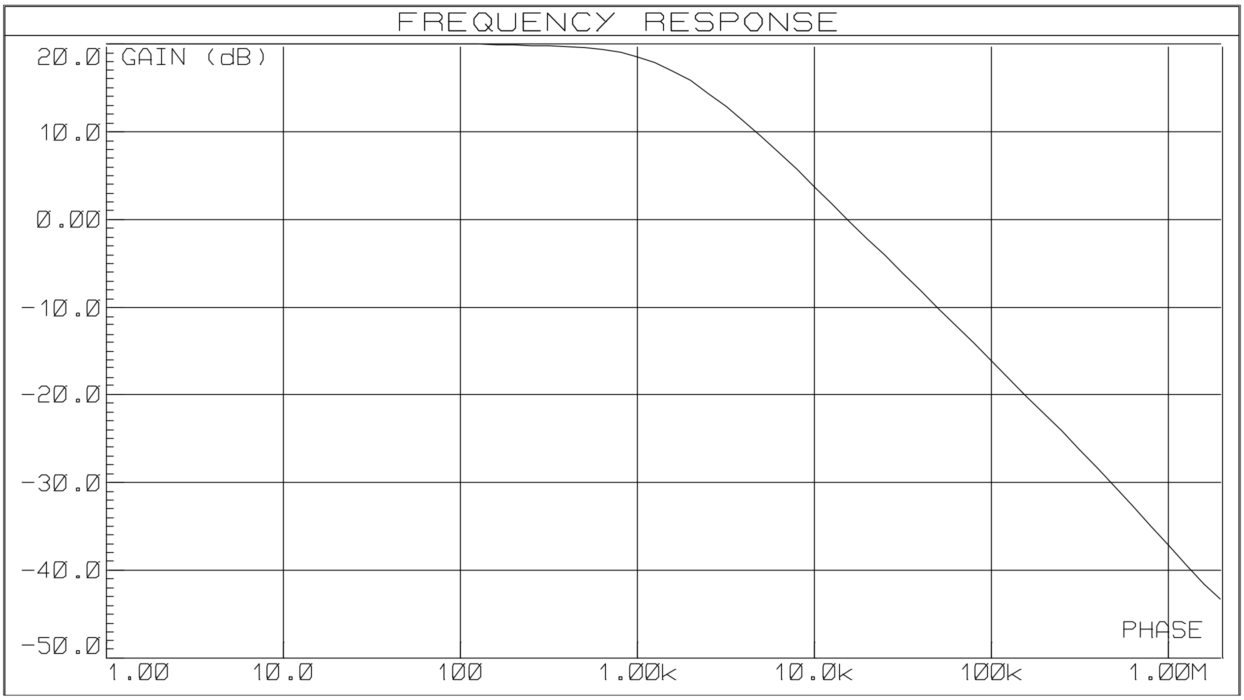


Il circuito sopra rappresenta un filtro attivo passa-basso(invertente)con AO.
Alle **basse frequenze** il condensatore può essere considerato un ramo aperto
(**reattanza molto elevata**) , per cui la sua amplificazione è **:** $\mathbf{G_{LF} = - R_2 / R_1}$
Il suo limite di banda è : $\mathbf{f_t = B = 1 / 2\pi R_2 C}$
Ricaviamo la f.d.t. :

$$\overline{G} = - \overline{Zp} / R_1 \qquad \overline{Zp} = (R_2 * 1 / j\omega C) / (R_2 + 1 / j\omega C) = R_2 / (1 + j\omega R_2 C)$$

$$\overline{G} = - R_2 / (R_1 + j\omega R_1 R_2 C)$$ da cui si vede come $G (j0) = - R_2 / R_1$

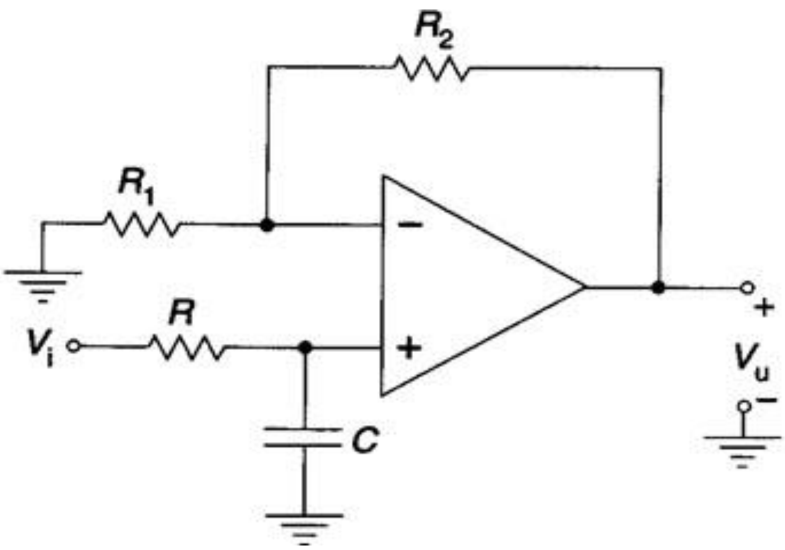
$G(j\infty) = 0$



Curva del guadagno con R_1 = 10 k R_2 = 100 K C = 1 [nF]

ft = 1590 [Hz]

2. Filtro attivo passa-basso con A.O. (non invertente)

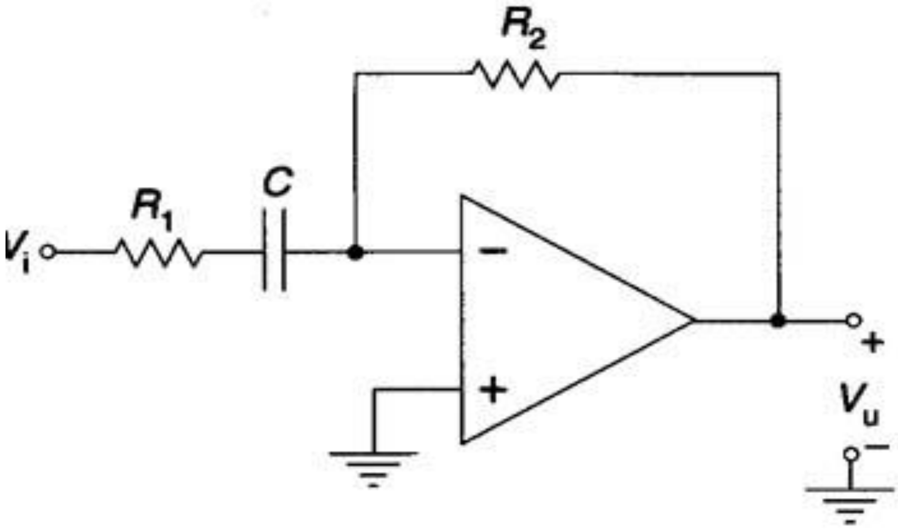


Il circuito sopra rappresenta sempre un filtro attivo passa-basso ma questa volta è **non invertente** perchè il segnale d'ingresso **Vi** è inserito sull'ingresso (**+**),quello non invertente dell'operazionale.
Il condensatore in continua è un circuito aperto, per cui **Vc = Vi**

L' amplificazione , in **LF** , è : $G_{LF} = 1 + [R_2 / R_1]$
Invece in **HF** il condensatore è un corto circuito, per cui **Vc = 0** e anche **Vu = 0** → $G_{HF} = 0$
Il suo limite di banda è: $f_t = B = 1 / 2\pi RC$

$$\overline{G} = \overline{Z}c / (R + \overline{Z}c) * (1 + [R2 / R1])$$

3. Filtro attivo passa-alto con AO (invertente)

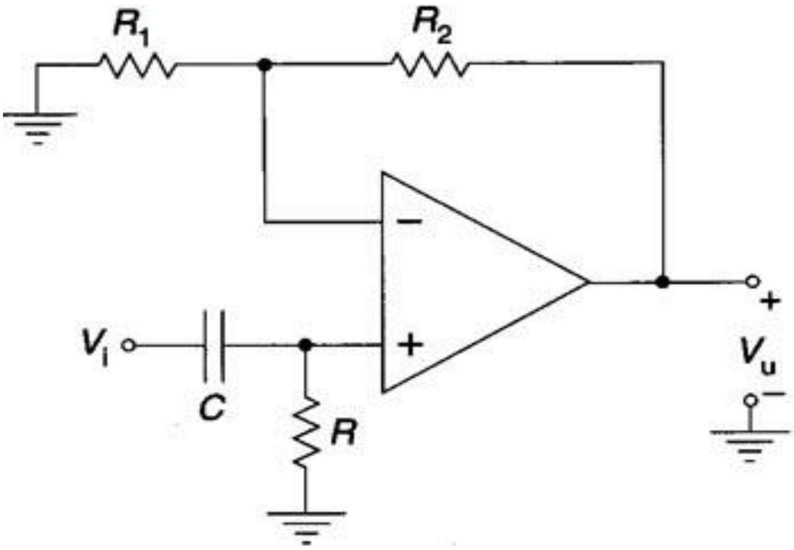


Il circuito sopra rappresenta un filtro attivo passa-alto (invertente) con A.O.
Alle alte frequenze il condensatore può essere considerato come un cortocircuito (reattanza Xc trascurabile).
La sua amplificazione , in HF , è : $\mathbf{Af = - R_2 / R_1}$

Il suo limite di banda è : $\mathbf{f_t = 1 / 2\pi R_1 C}$

$$\overline{G}(j\omega) = - R2 / (R1 + 1/ j\omega C)$$

4. Filtro attivo passa-alto con A.O. (non invertente)



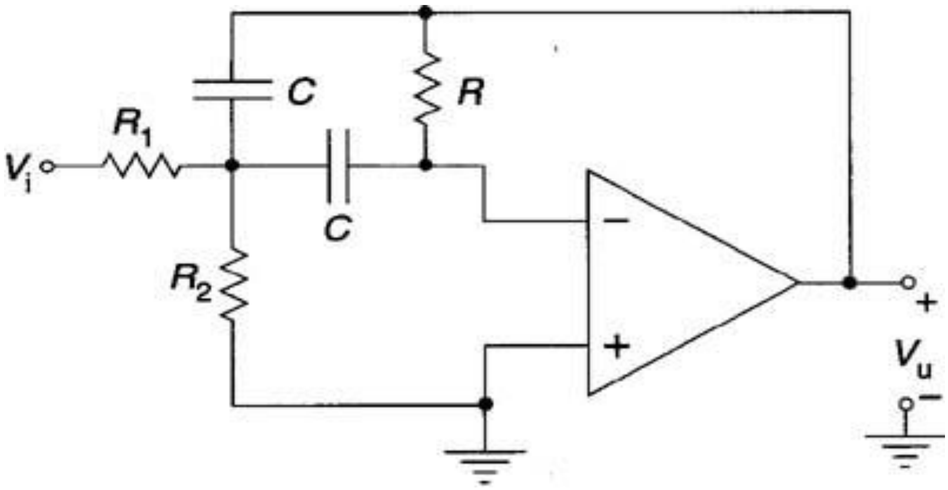
Il circuito sopra rappresenta sempre un filtro attivo passa-alto,ma questa volta non invertente,perchè avente il segnale d'ingresso sull'ingresso non invertente dell'operazionale.
Il condensatore è considerato anche adesso come un cortocircuito, in HF .

La sua amplificazione è : $G_{HF} = 1 + (R_2 / R_1)$

Il suo limite di banda è : $f_t = 1 / 2\pi RC$

$$\bar{G}(j\omega) = \frac{R}{R + 1 / j\omega C} * (1 + R2 / R1)$$

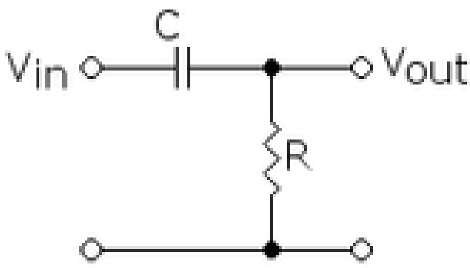
5. Filtro attivo passa-banda con AO



La sua amplificazione è : **Ao= - R / 2 R1**

Applicazioni e considerazioni

Esercizio n°1:



Si vuole realizzare mediante un quadripolo RC un filtro passa-alto,disponendo di una resistenza R=10 [KΩ] e di una capacità C = 0,2 [μF] .
Calcolare la frequenza di taglio f_T , sapendo che il segnale che entra all'ingresso del quadripolo ha una ampiezza di 220 [V] e una frequenza f = 100 [Hz]

Svolgimento:

Conoscendo il valore dei due componenti che formano il filtro, possiamo subito calcolare la $\mathbf{f_T}$.

$\mathbf{f_T = 1/2\pi\ RC} = 1/\ (2*3,14*10*10^3*0,2*10^{-6})$

$= 1/\ (6,28*10*10^3*0,2*10^{-6}) = 1\ /\ (12,56*10^{-3}) = 10^3\ /\ 12,56 =$ **79,6 [Hz]**

$\overline{Vi} = \overline{Vc}+\overline{Vr} = 1/j\omega C * \overline{I} + R* \overline{I} = \overline{I} * (R+1/j\omega C)$

$\mathbf{Xc} = 1/\omega C = 1/2\pi\ f * C = 1/\ (6,28*100*0,2*10^{-6}) = 1/\ (628*0,2*10^{-6}) = 1/\ 125,6*10^6 \approx$ **8 [KΩ]**

$\overline{Z} = R - j * X_c \rightarrow \overline{Z} = \sqrt{R^2+X_c^2} = \sqrt{10^8+64*10^6} = \sqrt{10^6*(100+64)} =$

$=\sqrt{10^6}*\sqrt{100+64} = 10^3*\sqrt{164} =$ **12,8 [KΩ]**

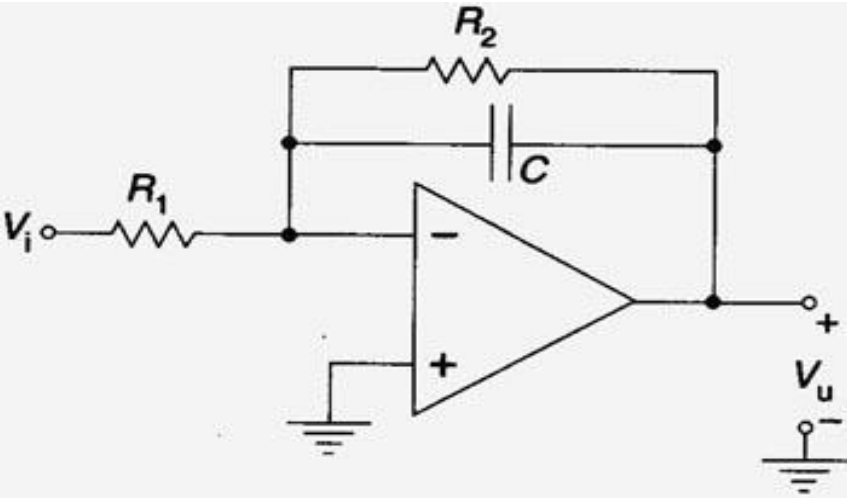
$\overline{I} = \overline{V}i / \overline{Z} = 220 / 12,8*10^3 =$ **17,18 [mA]**

$\overline{\mathbf{Vu}} = R * \overline{I} = 10*10^3*17,18*10^{-3} =$ **171,8 [V]**

Segnali a frequenze minori della frequenza di taglio vengono filtrati (attenuati e sfasati), mentre segnali a frequenze maggiori di ft arrivano in uscita non attenuati nè sfasati.

Esercizio n°2:

Dimensionare un filtro passa-basso attivo del primo ordine,di tipo invertente,
volendo ottenere un ' amplificazione **Ao = -10** e una banda passante **B = 1 [KHz**]
si conosce il valore della sola resistenza **R1** , pari a **1 [KΩ].**



Svolgimento:

$\mathbf{G_{LF}} = - R2/R1 = -10 \quad \rightarrow \quad R_2/R_1=10 \quad \rightarrow \quad R_2 = R_1*10 = 1*10 =$ **10 [KΩ].**

Conoscendo il valore di R_2 , basta ora calcolare il valore di capacità da utilizzare.

$\mathbf{ft=1/2\pi\, R_2*C} \rightarrow \mathbf{C} = 1/2\pi\, ftR_2 \rightarrow = 1/ 2*3,14*10^4*10^3 = 1/62,8*10^6 = 0,016\ [\mu F] =$ 1**6 [nF]**