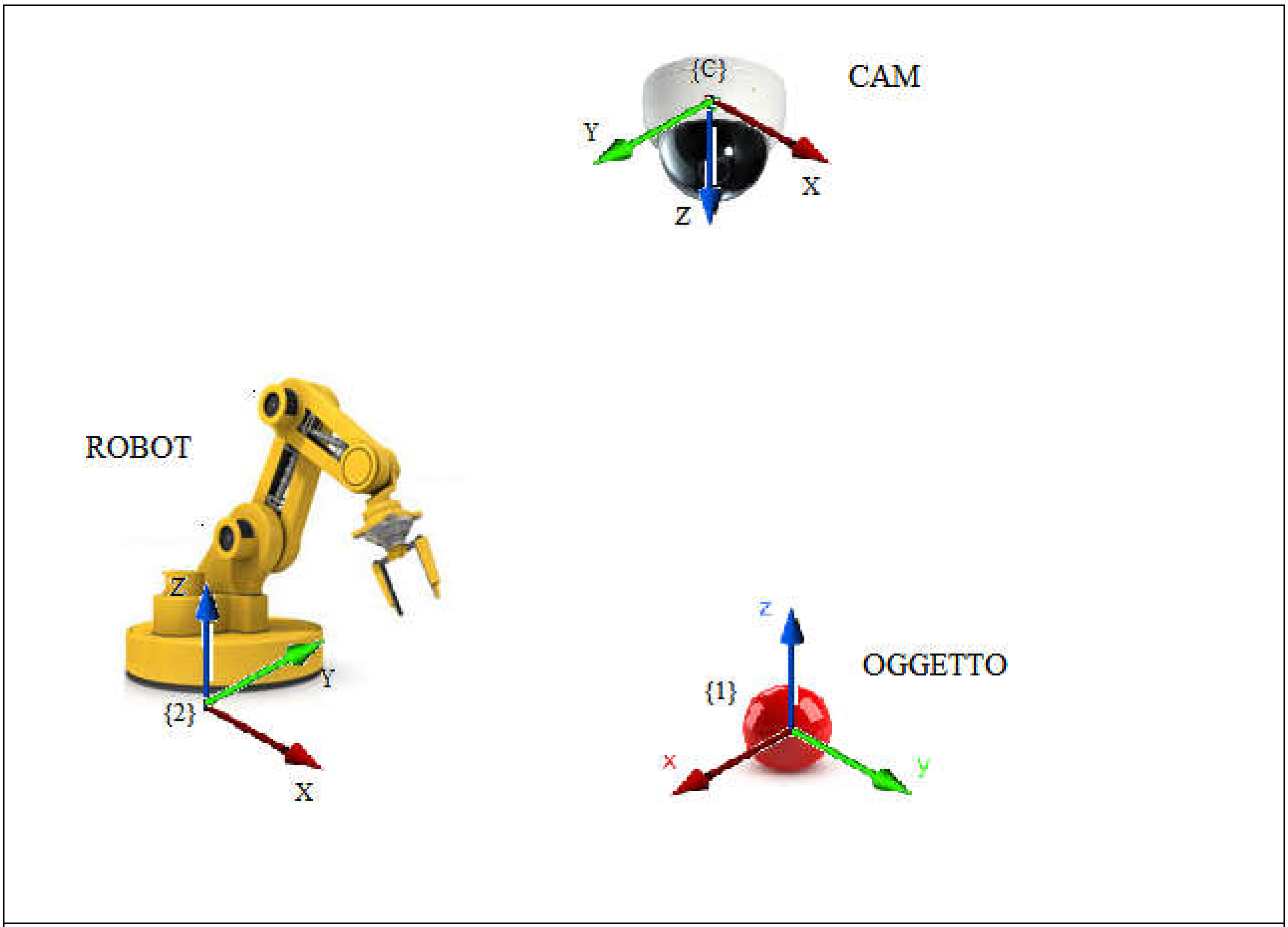
ROBOTICA

Robot + WebCam + Object

(Prof. Fischetti Pietro)

Analizziamo il caso descritto in figura:



Data la posizione dell'oggetto rilevata dalla WebCam, vogliamo determinare la posizione dell'oggetto rispetto al Robot affinche' lo possa prendere.

Posto il sistema base di riferimento in corrispondenza del Robot come in figura

definiamo:

T_{obj}^{cam} =L'oggetto visto dalla telecamera

T_{Robot}^{cam} =La posizione del robot rispetto alla telecamera

Cerchiamo la posizione dell'oggetto rispetto al robot

Dobbiamo trovare la matrice T_{obj}^{Robot}, date le seguenti matrici di riferimento:

$$T_{obj}^{cam} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & p_{1x} \\ 1 & 0 & 0 & p_{1y} \\ 0 & 0 & -1 & p_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{Robot}^{cam} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_{2x} \\ 0 & -1 & 0 & p_{2y} \\ 0 & 0 & -1 & p_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{obj}^{Robot} = T_{cam}^{Robot} \cdot T_{obj}^{cam} = \left(T_{Robot}^{cam}\right)^{-1} \cdot T_{obj}^{cam}$$

Bisogna calcolare l'inversa della matrice omogenea $\left(T_{Robot}^{cam}\right)$, cioe' $\left(T_{Robot}^{cam}\right)^{-1}$.

In generale data una matrice omogenea generica:

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sua matrice inversa avra' la forma:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Infatti nel case di matrice 2x2 si ha:} \\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ \qquad \text{e se d = 1 e c = 0 si ottiene:} \\ \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a} & -\dfrac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Per definizione, moltiplicando la matrice H per la sua inversa bisogna ottenere la matrice Identita':

$$H \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \tilde{R} & R \cdot \tilde{d} + d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione R e' ortonormale (in quanto da una rotazione della base si deve poter tornare indietro alla posizione base), cioe':

$$R^{-1} = R^T$$

N.B. La matrice H NON e' ortonormale, cioe': $H^{-1} \neq H^T$

Quindi:

$$\tilde{R} \cdot R = I \qquad \Rightarrow \tilde{R} \cdot = R^{-1}$$

$$R \cdot \tilde{d} + d = 0 \quad \Rightarrow R \cdot \tilde{d} = -d \Rightarrow R^{-1} \cdot R \cdot \tilde{d} = -R^{-1} \cdot d \Rightarrow \tilde{d} = -R^T \cdot d$$

In definitiva si ottiene la seguente Inversa di una matrice di traformazione:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tornando al nostro caso:

$$\left(T_{Robot}^{cam}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_{2x} \\ n_y & s_y & a_y & p_{2y} \\ n_z & s_z & a_z & p_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T \cdot p_2 \\ s_x & s_y & s_z & -s^T \cdot p_2 \\ a_x & a_y & a_z & -a^T \cdot p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -n^T \cdot p_2 \\ & R_{3x3}^T & & -s^T \cdot p_2 \\ & & & -a^T \cdot p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove:

$$T_{Robot}^{cam} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_{2x} \\ 0 & -1 & 0 & p_{2y} \\ 0 & 0 & -1 & p_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\left(T_{Robot}^{cam}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} & & & -n^T \cdot p_2 \\ & R_{3x3}^T & & -s^T \cdot p_2 \\ & & & -a^T \cdot p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ma:

$$R_{3x3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e:

$$-n^T \cdot p_2 = \begin{bmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} = -p_{2x}$$

$$-s^T \cdot p_2 = \begin{bmatrix} -s_x & -s_y & -s_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} = p_{2y}$$

$$-a^T \cdot p_2 = \begin{bmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{2x} \\ p_{2y} \\ p_{2z} \end{bmatrix} = p_{2z}$$

In definitiva si ottiene:

$$\left(T_{Robot}^{cam}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_{2x} \\ 0 & -1 & 0 & p_{2y} \\ 0 & 0 & -1 & p_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio:

L'oggetto ha coordinate p_1=[1,10,9] rispetto alla WebCam, mentre la WebCam si trova rispetto al robot alla posizione:p_2=[-10,20,10], avremo la posizione dell'oggetto rispetto al robot:

$$T_{obj}^{Robot} = \left(T_{Robot}^{cam}\right)^{-1} \cdot T_{obj}^{cam} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_{2x} \\ 0 & -1 & 0 & p_{2y} \\ 0 & 0 & -1 & p_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & p_{1x} \\ 1 & 0 & 0 & p_{1y} \\ 0 & 0 & -1 & p_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(-10) \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$