

## CAPITOLO SESTO

### CINEMATICA INVERSA

#### Introduzione

La posizione e l'orientamento di un oggetto manipolato da un robot dipendono dalle caratteristiche geometriche della sua struttura e dalla configurazione dei suoi giunti.

Assai meno evidente è il procedimento, noto sotto il nome di cinematica inversa, con cui determinare quale configurazione deve assumere la struttura affinché l'oggetto manipolato assuma la posizione ed l'orientamento desiderati.

Dopo un inquadramento qualitativo della cinematica inversa si risolve il problema per un robot a due gradi di libertà e si introduce la funzione trigonometrica inversa  $\text{ATAN2}(x, y)$ .

Si affronta quindi teoricamente la cinematica inversa per una struttura a sei gradi di libertà per terminare con una serie di esempi di complessità graduata con cui verificare le conoscenze apprese.

Il capitolo si conclude con una introduzione alle metodologie di controllo delle traiettorie del robot.

#### 6.1 Cinematica inversa

La cinematica inversa affronta il problema statico della ricerca delle relazioni per il calcolo delle variabili di giunto, date la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura dei robot e i parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti (fig. 1).

Dati una certa posizione e un certo orientamento della terna di estremità della struttura, si tratta di calcolare tutti i possibili insiemi di variabili di giunto che permettono di ottenerli.

I parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti vengono definiti durante la modellizzazione della struttura e, per ogni grado di libertà del robot, si avranno tre costanti e una variabile. La posizione e l'orientamento della estremità della struttura dipendono dal valore che le variabili di giunto assumono di volta in volta.

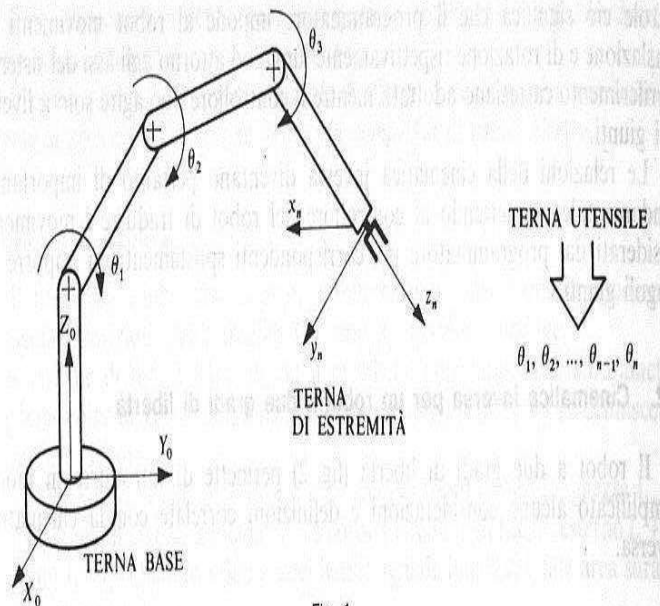


Fig. 1

Nella pratica, la cinematica inversa utilizza come dati di partenza i valori degli elementi della matrice  $T$ :

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ricava i valori delle variabili di giunto corrispondenti:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) \leftarrow \text{soluzione 1} \\ &\quad (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) \leftarrow \text{soluzione 2} \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\quad (q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) \leftarrow \text{soluzione k} \end{aligned}$$

Con  $q_i$  si intende la generica variabile che sarà un angolo ( $\theta_i$ ) od una traslazione ( $d_i$ ) in funzione del tipo di giunto corrispondente.

Nel par. 5.1 si è visto come la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura del robot possano essere espressi sia nello spazio cartesiano (tramite la matrice  $T$ ) sia in quello dei giunti (tramite le variabili di giunto). La cinematica diretta trasforma un punto dello spazio dei giunti nella corrispondente posizione ed orientamento della terna di estremità; quella inversa al contrario, data la posizione e l'orientamento della terna di estremità, determina tutti i punti corrispondenti nello spazio dei giunti.

Nelle applicazioni pratiche la cinematica inversa è di gran lunga più importante di quella diretta.

Il programmatore ragiona infatti nello spazio tridimensionale cartesiano, mentre il controllo elettronico del robot opera in quello dei giunti. In altre

parole ciò significa che il programmatore impone al robot movimenti di traslazione e di rotazione rispettivamente lungo od attorno agli assi del sistema di riferimento cartesiano adottato mentre il controllore può agire solo a livello dei giunti.

Le relazioni della cinematica inversa diventano pertanto di importanza fondamentale permettendo al controllore del robot di tradurre i movimenti desiderati dal programmatore nei corrispondenti spostamenti da imporre ai singoli giunti.

**6.2. Cinematica inversa per un robot a due gradi di libertà**

Il robot a due gradi di libertà (fig. 2) permette di introdurre in modo semplificato alcune considerazioni e definizioni correlate con la cinematica inversa.

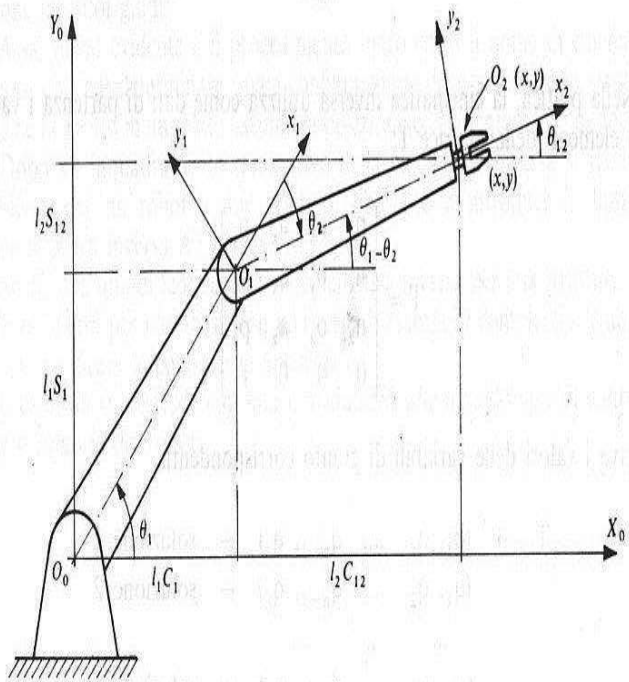


Fig. 2

Il problema cinematico inverso per un robot a due gradi di libertà è quello di ricavare i valori delle variabili di giunto che permettono di posizionare l'estremità della struttura (O2) nella posizione specificata dalle coordinate x, y.

Si tratta di risolvere le seguenti equazioni cinematiche:

$$\begin{aligned} x &= f(q_1, q_2) \\ y &= f(q_1, q_2) \end{aligned}$$

esplicitando le variabili del giunto:

$$\begin{aligned} q_1 &= f(x, y) \\ q_2 &= f(x, y) \end{aligned}$$

Tale soluzione si presenta complessa quando, come per il robot considerato, le equazioni cinematiche non sono lineari.

Proprio questa motivazione consente di affermare che il problema cinematico inverso si presenta di soluzione molto più complessa di quello diretto.

**Esistenza della soluzione**

Il problema cinematico inverso, a differenza di quello diretto, può, per particolari posizioni dell'estremità O2, non ammettere soluzione.

L'insieme di tutti i punti in cui il problema cinematico inverso ammette soluzione coincide con la porzione di piano raggiungibile dal robot e definisce la sua area di lavoro.

La fig. 3 mostra che, quando i due bracci del robot hanno lunghezza l1, l2 diverse, l'area di lavoro coincide con la corona circolare di raggio esterno l1+l2 e interno l1-l2. Quando i due bracci hanno uguale lunghezza tale area sarà il cerchio di raggio l1+l2.

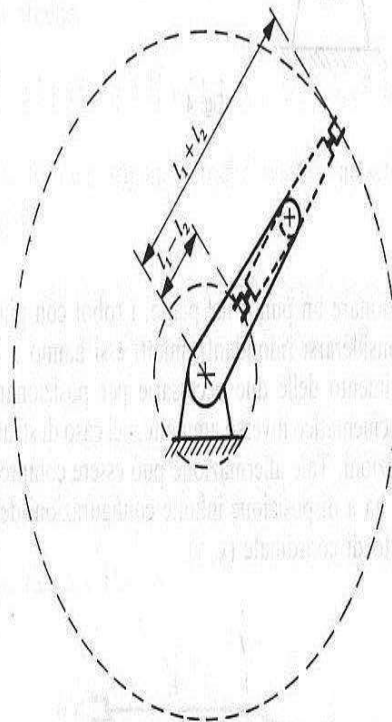


Fig. 3

Quanto detto vale nell'ipotesi di giunti ideali che permettono rotazioni di 360°. Nella realtà i giunti permettono raramente rotazioni così ampie e ciò provoca una riduzione dell'estensione dell'area di lavoro.

**Molteplicità della soluzione**

Il problema cinematico inverso molto spesso ammette più di una soluzione nel senso che possono esistere più configurazioni della struttura che portano la sua estremità nella medesima posizione. Si consideri ad esempio la fig. 4 in cui si



vede come la pinza possa essere portata nello stesso punto di coordinate  $(x, y)$  con due diverse coppie di valori per le variabili di giunto.

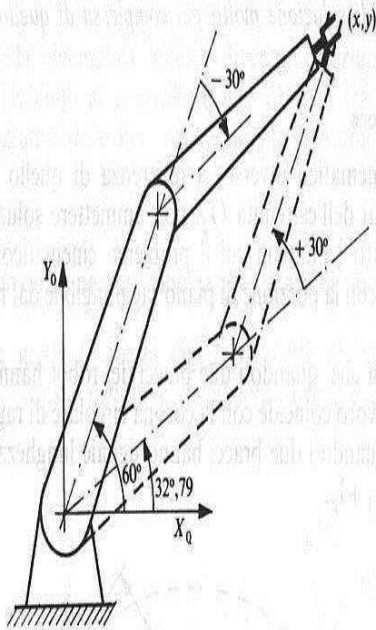


Fig. 4

**Strutture ridondanti**

Al fine di posizionare un punto nel piano, i robot con più di due gradi di libertà sono da considerarsi ridondanti; infatti essi hanno a disposizione più possibilità di movimento delle due necessarie per posizionare un punto nel piano. Il problema cinematico inverso ammette, nel caso di strutture ridondanti, una infinità di soluzioni. Tale affermazione può essere compresa osservando il robot di fig. 5 che ha a disposizione infinite configurazioni della struttura per raggiungere il punto di coordinate  $(x, y)$ .

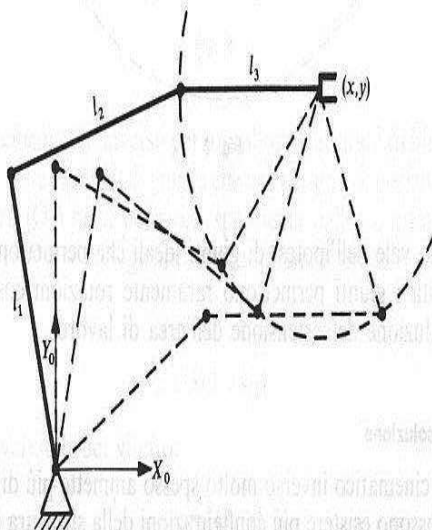


Fig. 5

**Cinematica inversa**

Le equazioni cinematiche del robot considerato sono (cfr. par. 5.2):

$$\begin{aligned} x &= l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ y &= l_2 S_{12} + l_1 S_1 \end{aligned}$$

Risolvere il problema cinematico inverso significa esplicitare le variabili  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= f(x, y) \\ \theta_2 &= f(x, y) \end{aligned}$$

ottenendo in tal modo due relazioni che, per ogni posizione  $x, y$  occupata dalla pinza, permettano di determinare gli angoli di rotazione  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dei rispettivi giunti.

Si cominci con l'esplicitare  $\theta_2$ . Elevando al quadrato e quindi sommando le due equazioni di ottiene:

$$x^2 + y^2 = l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 (C_{12} C_1 + S_{12} S_1)$$

Applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha \pm \beta) &= \text{sen} \alpha \cos \beta \pm \text{sen} \beta \cos \alpha \\ \text{cos}(\alpha \pm \beta) &= \text{cos} \alpha \cos \beta \mp \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \end{aligned}$$

si ottiene:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C_2$$

da cui è possibile ricavare  $C_2$  e  $S_2$ :

$$C_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$S_2 = \pm \sqrt{1 - C_2^2}$$

Utilizzando le funzioni trigonometriche inverse, si risale ai due possibili valori di  $\theta_2$ :

$$\theta_{2a} = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) \quad \text{prima soluzione}$$

$$\theta_{2b} = -\theta_{2a} \quad \text{seconda soluzione}$$

I valori di  $\theta_1$ , noti  $C_2$  ed  $S_2$ , si determinano applicando le formule trigono-

metriche relative al seno e coseno della somma di due archi, alle equazioni cinematiche ottenendo:

$$x = l_2(C_1C_2 - S_1S_2) + l_1C_1$$

$$y = l_2(S_1C_2 + C_1S_2) + l_1S_1$$

Ricavando  $C_1$  dalla prima equazione

$$C_1 = \frac{x + l_2S_1S_2}{l_2C_2 + l_1}$$

e sostituendo nella seconda, dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene  $S_1$ :

$$S_1 = \frac{y(l_2C_2 + l_1) - l_2xS_2}{(l_1 + l_2C_2)^2 + l_2^2S_2^2}$$

Sostituendo nell'equazione i due possibili valori di  $S_2$  e quello di  $C_2$ , si ricavano i corrispondenti valori di  $S_1$ ; noti questi è possibile calcolare anche  $C_1$  e quindi risalire al valore di  $\theta_1$  utilizzando le funzioni trigonometriche inverse.

### Esempio

Dato il robot di fig. 4, calcolare il valore delle due variabili di giunto  $\theta_1$  e  $\theta_2$  quando:

$$x = 733,013$$

$$y = 769,615$$

sapendo che:

$$l_1 = 600$$

$$l_2 = 500$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$C_2 = \frac{733,013^2 + 769,615^2 - 600^2 - 500^2}{2 \cdot 600 \cdot 500} = 0,866$$

$$S_2 = \sqrt{(1 - 0,866^2)} = +/- 0,500$$

da cui si ricavano i due possibili valori di  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = +/- 30^\circ$$

È ora possibile ricavare i due valori di  $\theta_1$ .

Quando  $\theta_2 = -30^\circ$ :

$$S_1 = \frac{769,615 \cdot (500 \cdot 0,866 + 600) - 500 \cdot 733,013 \cdot (-0,5)}{(600 + 500 \cdot 0,866)^2 + (500 \cdot (-0,5))^2} = 0,866$$

$$C_1 = \frac{733,013 + 500 \cdot 0,866 \cdot (-0,5)}{500 \cdot 0,866 + 600}$$

$$\theta_1 = 60^\circ$$

Quando  $\theta_2 = 30^\circ$

$$S_1 = 0,542$$

$$C_1 = 0,840$$

$$\theta_1 = 32,79^\circ$$

Le due coppie di angoli che permettono di portare l'estremità della struttura nel punto indicato sono:

$$\theta_1 = 60^\circ \quad \theta_2 = -30^\circ \quad \text{prima soluzione}$$

$$\theta_1 = 32,79^\circ \quad \theta_2 = 30^\circ \quad \text{seconda soluzione}$$

### 6.3. La funzione ATAN2

La risoluzione del problema cinematico inverso comporta un pesante utilizzo delle funzioni trigonometriche inverse.

Questa necessità si scontra col fatto che le funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente) non ammettono funzione inversa univoca. Infatti, rappresentando in ascissa gli angoli e in ordinata il valore della funzione (fig. 6) si vede come, per tutte e tre, ad ogni valore di  $y$  corrispondono infiniti angoli.

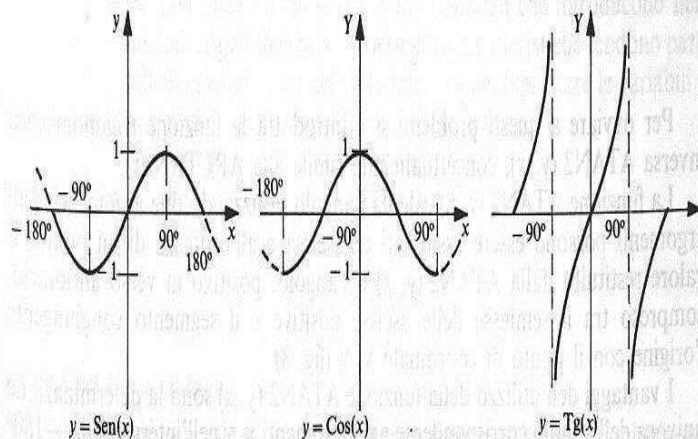


Fig. 6



Nell'ambito della robotica l'intervallo di variazione interessante per le variabili di giunto angolari è limitato a quello compreso tra  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ , in quanto rotazioni di un angolo giro non modificano la configurazione della struttura.

Rimane comunque il fatto che, anche all'interno di questo modesto intervallo, dato un valore della funzione trigonometrica è impossibile risalire in modo univoco all'angolo. Per individuare l'angolo è infatti necessario conoscere i valori di due funzioni trigonometriche. Ad esempio, conoscendo il seno e il coseno, si riesce a ricavare, rimanendo all'interno del campo stabilito, in modo univoco l'angolo.

Le funzioni trigonometriche inverse (ARCSEN (x), ARCCOS (x), ARCTAN (x)) oltre alla non univocità presentano anche il problema dell'accuratezza con cui determinano gli angoli.

La funzione ARCCOS (x) (fig. 7a) ha una tangente verticale quando l'angolo assume i valori  $-180^\circ$ ,  $0^\circ$  e  $180^\circ$  e, in tali zone, l'accuratezza con cui fornisce l'angolo è scarsa.

La funzione ARCSEN (x) (fig. 7b) presenta identico problema quando l'angolo vale  $-90^\circ$  o  $90^\circ$ .

La funzione ARCTAN (x) (fig. 7c) non è definita quando l'angolo vale  $-90^\circ$  o  $90^\circ$  e, per i valori nell'intorno di questi, non garantisce una sufficiente accuratezza.

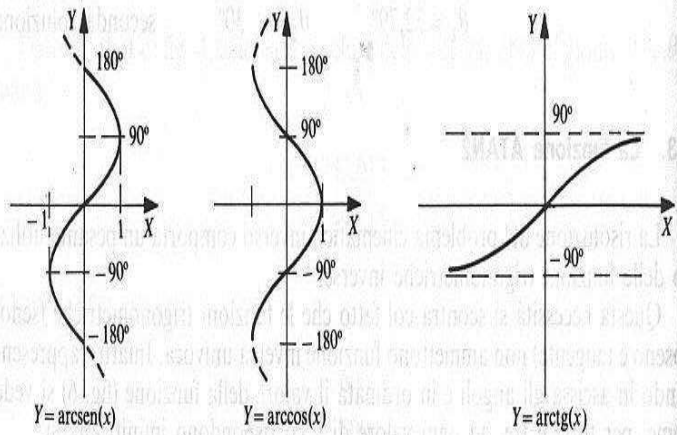


Fig. 7

Per ovviare a questi problemi si è introdotta la funzione trigonometrica inversa ATAN2 (y, x), concettualmente simile alla ARCTAN (x).

La funzione ATAN2 (y, x) calcola l'angolo utilizzando due argomenti. Tali argomenti possono essere assimilati all'ascissa e all'ordinata di un punto. Il valore restituito dalla ATAN2 (y, x) è l'angolo, positivo in verso antiorario, compreso tra il semiasse delle ascisse positive e il segmento congiungente l'origine con il punto di coordinate x, y (fig. 8).

I vantaggi dell'utilizzo della funzione ATAN2 (y, x) sono la determinazione univoca dell'angolo corrispondente agli argomenti x, y nell'intervallo da  $-180^\circ$  a  $180^\circ$  e l'accuratezza uniforme in tutto il campo di definizione.

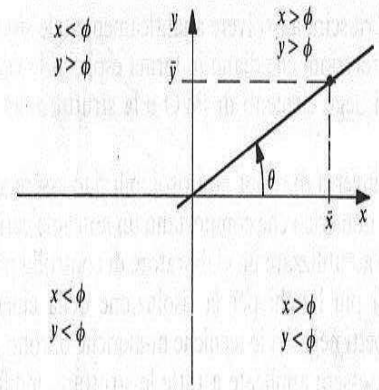


Fig. 8

### 6.4. Cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà

La cinematica inversa di un robot a sei gradi di libertà si presenta in genere complessa poiché le difficoltà segnalate nel paragrafo 6.2 vengono aumentate dal maggior numero di variabili di giunto.

Le equazioni cinematiche si presentano nella forma:

$$T = f(q_1, q_2, \dots, q_5, q_6)$$

dove con T si indica la trasformazione omogenea che descrive la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura rispetto a quella di riferimento.

Uguagliando la matrice T con quella di riferimento P&O i cui elementi descrivono una particolare posizione ed orientamento della terna di estremità, si ottengono le dodici equazioni da cui partire per risolvere la cinematica inversa:

$n_x = P\&O [1, 1]$	$n_y = P\&O [2, 1]$	$n_z = P\&O [3, 1]$
$o_x = P\&O [1, 2]$	$o_y = P\&O [2, 2]$	$o_z = P\&O [3, 2]$
$a_x = P\&O [1, 3]$	$a_y = P\&O [2, 3]$	$a_z = P\&O [3, 3]$
$p_x = P\&O [1, 4]$	$p_y = P\&O [2, 4]$	$p_z = P\&O [3, 4]$

In generale queste equazioni sono funzione di più di una variabile di giunto e si presentano non lineari a causa dei giunti rotoidali che introducono nella relazione le funzioni trigonometriche. Queste loro caratteristiche rendono particolarmente difficile, quando non del tutto impossibile, esplicitare le variabili di giunto in funzione dei valori degli elementi della matrice T:

$$\begin{aligned} q_1 &= f(P\&O) \\ &\dots \\ q_6 &= f(P\&O) \end{aligned}$$

#### Risolubilità di una struttura.

Nel caso più generale si dovrà risolvere un sistema di sei equazioni trigonometriche in seno e coseno in sei incognite, rappresentate dalle variabili di giunto.

Quando non si riuscirà a risolvere analiticamente tale sistema, sarà impossibile ottenere delle relazioni che diano in forma esplicita le variabili di giunto in funzione dei valori degli elementi di P&O e la struttura del robot verrà detta non risolubile.

La cinematica inversa di robot non risolubili può essere affrontata solo con tecniche di calcolo numerico che comportano un notevole carico computazionale. Questo costringe ad utilizzare un elaboratore di controllo più veloce e, spesso, ad accettare tempi più lunghi per la risoluzione della cinematica inversa. A fronte di questi aspetti negativi le tecniche numeriche offrono il non trascurabile vantaggio di poter essere applicate a tutte le strutture, indifferentemente dalle loro caratteristiche. Per questo è possibile prevedere in futuro una loro diffusione quando saranno disponibili calcolatori sufficientemente veloci da garantire il calcolo delle soluzioni in tempo reale.

Tuttavia, per ora, in ambito industriale si utilizzano praticamente solo strutture per le quali è possibile risolvere la cinematica inversa in modo esplicito.

Questa necessità ha spinto a ricercare quali caratteristiche debbano essere soddisfatte nella struttura affinché la sua cinematica inversa ammetta soluzioni esplicite.

*Condizione sufficiente affinché la struttura di un robot a sei gradi di libertà sia risolubile è che gli assi di rotazione di tre giunti consecutivi si incontrino in uno stesso punto, per tutti i possibili valori delle variabili di giunto.*

Il punto d'incontro dei tre assi può anche essere improprio e quindi anche quando tre giunti rotoidali consecutivi hanno gli assi di rotazione paralleli la struttura sarà risolubile.

Si ricorda che la condizione è solo sufficiente per cui possono esistere delle strutture che, pur non godendo di questa proprietà sono risolubili.

Tutte le strutture che utilizzano un polso sferico soddisfano la condizione sufficiente sopra riportata e questo spiega la loro ampia diffusione in ambito industriale. Osservando la fig. 9 si può intuire perché queste strutture siano sempre risolubili.

Essendo nota la matrice P&O si conoscerà la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto al riferimento. Risulta quindi possibile calcolare le coordinate di  $O_5$  ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) trovandosi infatti sul prolungamento, in direzione negativa, dell'asse  $z_6$ , distante  $d_6$  da  $O_6$ :

$$x' = p_x - a_x d_6$$

$$y' = p_y - a_y d_6$$

$$z' = p_z - a_z d_6$$

La posizione di  $O_5$  è tuttavia funzione solo dei primi tre gradi di libertà e quindi la cinematica inversa può essere scissa in due sottoproblemi in tre incognite.

Ricordando la formulazione della cinematica diretta come prodotto tra la matrice di posizionamento e quella di orientamento (cfr. par. 5.3):

$$T = T_p T_o$$

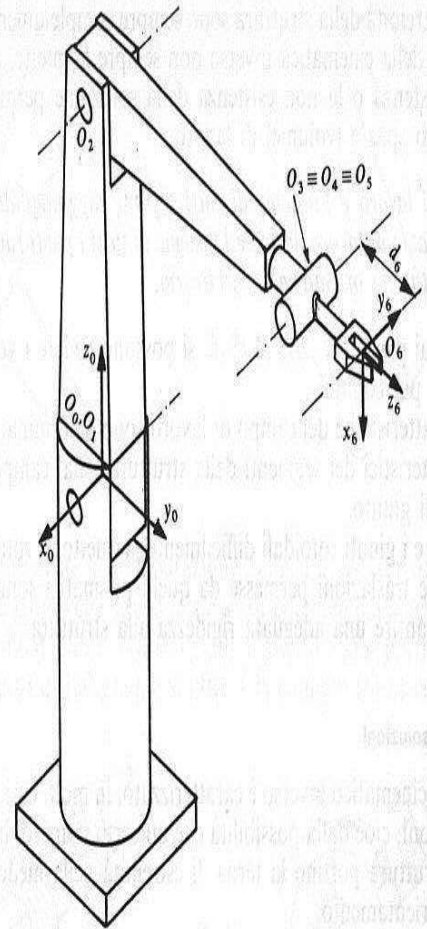


Fig. 9

si capisce come sia possibile ricavare le relazioni che danno i valori delle prime tre variabili di giunto utilizzando le seguenti equazioni:

$$T_p[1, 4] = x'$$

$$T_p[2, 4] = y'$$

$$T_p[3, 4] = z'$$

Avendo ridotto il sistema a tre sole incognite si può essere certi di esplicitare le variabili di giunto essendo l'equazione risolvente al massimo di quarto grado e, come tale, analiticamente risolubile.

Calcolati i valori delle prime tre variabili di giunto la matrice  $T_p$  è da considerarsi completamente nota e quindi varrà la relazione:

$$T_o = (T_p)^{-1} P \& O$$

che rappresenta un altro problema in tre incognite risolvendo il quale è possibile ricavare anche i valori delle variabili di giunto corrispondenti agli ultimi tre gradi di libertà.

#### Esistenza della soluzione

Il problema della cinematica diretta ammette sempre soluzione in quanto, dato un certo valore a tutte le variabili di giunto, la posizione e l'orientamento



della terna di estremità della struttura sono sempre completamente determinati.

Il problema della cinematica inversa non sempre ammette, al contrario, la soluzione. L'esistenza o la non esistenza della soluzione permette di definire rigorosamente lo spazio (volume) di lavoro:

*Lo spazio di lavoro è l'insieme di tutti i punti raggiungibili dalla terna di estremità. Lo spazio di lavoro destro è l'insieme di tutti i punti raggiungibili dalla terna di estremità con orientamento arbitrario.*

Riandando ai par. 1.5.1./2./3./4./5./6. si possono vedere i volumi di lavoro per le strutture più comuni.

Limiti e caratteristiche del campo di lavoro sono determinate dai valori dei parametri caratteristici dei segmenti della struttura e dal campo di variazione delle variabili di giunto.

In particolare i giunti rotoidali difficilmente permettono rotazioni complete (360°), mentre le traslazioni permesse da quelli prismatici sono limitate dalla necessità di garantire una adeguata rigidità alla struttura.

**Molteplicità delle soluzioni**

Il problema cinematico inverso è caratterizzato, in molti casi, dalla molteplicità delle soluzioni, cioè dalla possibilità che un certo numero di configurazioni diverse della struttura portino la terna di estremità nella medesima posizione con lo stesso orientamento.

Anche le strutture di comune impiego in ambito industriale possono avere più soluzioni al problema cinematico inverso.

Si consideri per ora separatamente il posizionamento e l'orientamento della terna di estremità:

**posizionamento:** la struttura antropomorfa permette di raggiungere lo stesso punto dello spazio con ben quattro diverse configurazioni della struttura (fig. 10): braccio destro con gomito alto e basso, braccio sinistro con gomito alto e basso.

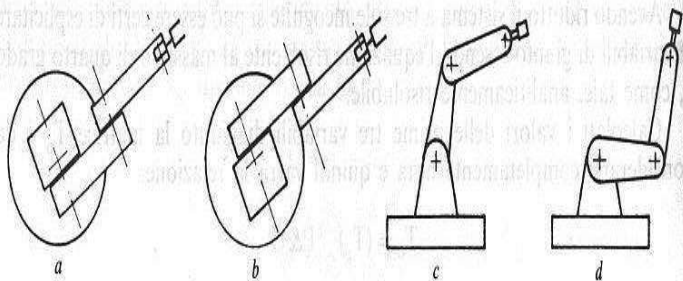


Fig. 10

Lo SCARA, così come il cilindrico, ha invece a disposizione solo le due possibilità di braccio destro e sinistro (fig. 11).

**orientazione:** il polso sferico permette di ottenere la stessa orientazione con due diverse configurazioni della struttura.

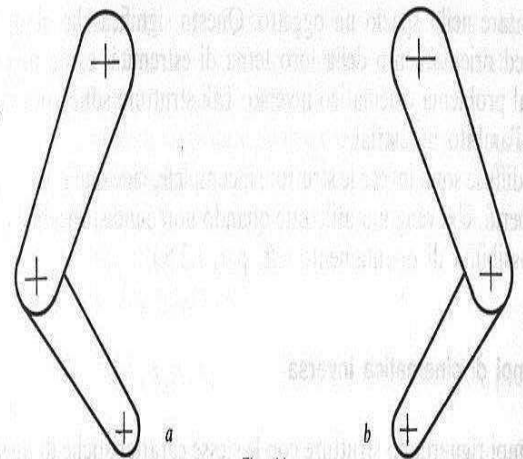


Fig. 11

Si immagini di avere la configurazione di fig. 12a e di cercare gli altri valori delle variabili di giunto che danno lo stesso orientamento alla terna di estremità. Si ruoti allo scopo il giunto 4 di 180 gradi, il giunto 5 lo si porti da  $\theta_5$  a  $-\theta_5$ , si ruoti infine il sesto di 180 gradi e si otterrà la configurazione cercata (fig. 12b).

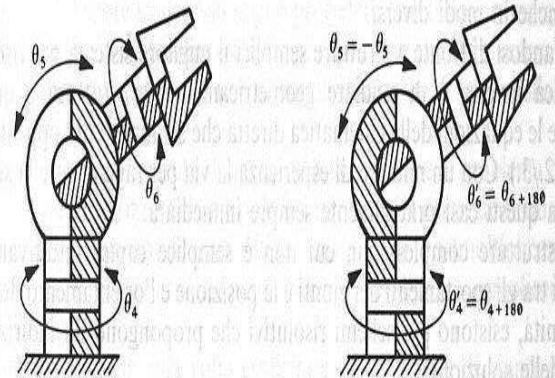


Fig. 12

Considerando una struttura completa a sei gradi di libertà il numero di configurazioni che permettono di ottenere la stessa posizione ed orientamento della terna di estremità aumentano.

Nel caso di robot che utilizzano un polso sferico il numero di soluzioni al problema cinematico inverso sarà il doppio di quelle permesse dai primi tre gradi di libertà. Questo perché, ogni configurazione dei primi tre giunti genera due diverse soluzioni al problema cinematico inverso tenendo conto delle due possibili disposizioni dei gradi di libertà del polso.

Il numero di soluzioni dipende, a parità di gradi di libertà, dalle caratteristiche della struttura. In generale si può affermare che maggiore è il numero di parametri caratteristici non nulli e maggiore sarà il numero di soluzioni al problema della cinematica inversa.

**Strutture ridondanti e incomplete**

I robot con più di sei gradi di libertà sono detti ridondanti in quanto hanno a disposizione più possibilità di movimento di quante ne servano per posiziona-

re ed orientare nello spazio un oggetto. Questo significa che, data una certa posizione ed orientamento della loro terna di estremità, esiste una infinità di soluzioni al problema cinematico inverso. Tali strutture sono comunque quasi assenti nell'ambito industriale.

Molto diffuse sono invece le strutture incomplete, cioè quelle con meno di sei gradi di libertà, che vengono utilizzate quando non è indispensabile disporre di tutte le possibilità di orientamento (cfr. par. 1.2.5.).

### 6.5. Esempi di cinematica inversa

Gli esempi riguardano strutture con le stesse caratteristiche di quelle proposte nel par. 5.5. dal momento che la soluzione della cinematica inversa presuppone la conoscenza delle relazioni di quella diretta.

Il procedimento risolutivo del problema cinematico inverso non si presta ad essere codificato in una serie di regole che, applicate meccanicamente e rigorosamente, permettano di arrivare alla soluzione (come per la cinematica diretta). Per questo motivo i procedimenti esposti nel seguito devono essere considerati solo come esempi e suggerimenti in quanto i problemi proposti possono essere risolti anche in modi diversi.

Trovandosi di fronte a strutture semplici il migliore sistema per risolvere la cinematica inversa è di studiare geometricamente la struttura e quindi di utilizzare le equazioni della cinematica diretta che sembrano più opportune (cfr. par. 6.4.2./3.). Con un minimo di esperienza la via per raggiungere la soluzione risulta in questi casi praticamente sempre immediata.

Per strutture complesse, in cui non è semplice capire intuitivamente le relazioni tra gli spostamenti dei giunti e la posizione e l'orientamento della terna di estremità, esistono più schemi risolutivi che propongono un indirizzo nella ricerca delle soluzioni.

Il metodo che verrà utilizzato nel seguito è dovuto principalmente all'americano R. Paul e propone una serie di manipolazioni della equazione cinematica nel tentativo di isolare alcune relazioni facilmente risolubili. Nel caso più generale si conosceranno gli elementi della trasformazione omogenea (P&O) che descrive la posizione e l'orientamento della terna di estremità rispetto al riferimento e l'equazione cinematica che sarà il risultato del prodotto delle sei matrici  $A_i$ :

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad [k = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)]$$

Uguagliando membro a membro le due matrici si ottengono dodici equazioni il cui termine a sinistra è una costante mentre quello a destra è funzione delle variabili di giunto.

In casi semplici, come quello di strutture a tre gradi di libertà specializzate nel posizionamento o nell'orientamento di oggetti, si avrà a che fare con un numero di relazioni inferiore.

Più precisamente si avranno a disposizione tre equazioni se il problema è di posizionamento (sottomatrice di posizione, quarta colonna) e nove se è di orientazione (sottomatrice di orientamento, prime tre colonne).

In alcuni casi fortunati può darsi che qualcuna di queste equazioni sia facilmente risolubile, ad esempio quando contiene una sola variabile di giunto che può essere esplicitata in modo univoco.

Quando non si riesce a esplicitare nessuna variabile di giunto, il metodo di Paul, consiglia di premoltiplicare o di postmoltiplicare l'equazione cinematica per l'inversa delle matrici  $A_1$  e  $A_6$ , rispettivamente quella a sinistra e quella a destra del secondo membro.

Si ottengono così due relazioni:

$$A_1^{-1} P \& O = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad [g(q_1) = f(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)]$$

che esprimono la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto alla prima, e:

$$P \& O A_6^{-1} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \quad [g(q_1) = f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)]$$

che esprimono la posizione e l'orientamento della quinta terna rispetto al riferimento.

Ciascuna delle due equazioni matriciali così ottenute genera dodici equazioni tra cui ricercarne qualcuna facilmente risolubile.

In caso di ulteriore insuccesso si può procedere portando a sinistra un'altra matrice  $A_i$  mediante una premoltiplicazione (la matrice dovrà essere quella a sinistra del secondo membro) o una postmoltiplicazione (e sarà quella a destra del secondo membro).

Nell'ipotesi che la struttura di cui si cerca la soluzione al problema cinematico inverso sia caratterizzata da un polso sferico si ha la certezza di riuscire, con un appropriato numero di premoltiplicazioni e di postmoltiplicazioni, ad individuare delle relazioni che permettono di esplicitare semplicemente le variabili di giunto.

Va sottolineato che, una volta esplicitata una variabile di giunto, questa è determinabile e quindi tutti gli elementi della matrice  $A$  corrispondenti possono essere calcolati. In tal modo, diminuendo il numero di variabili in gioco, la ricerca di equazioni che permettano di esplicitare le variabili di giunto rimanenti risulta semplificato.

Se la spiegazione teorica della metodologia risolutiva risultasse complicata, il modo migliore per comprenderla è quello di seguire la soluzione degli esempi (6.4.4. e 6.5.4.) e solo dopo rileggere questa parte.

Si ricorda ancora che esistono altri approcci altrettanto validi alla soluzione del problema cinematico inverso e soprattutto, che queste tecniche si limitano a fornire solo degli indirizzi di carattere generale. Infatti la soluzione può sempre essere ottenuta con molte modalità diverse fra le quali solo l'intuito e l'esperienza permettono di destreggiarsi agevolmente. Quanto detto risulta ancora più vero per la soluzione delle strutture che non soddisfano la condizione sufficiente per la risolubilità.

#### 6.5.1. Robot a due gradi di libertà

Si consideri il robot descritto nel paragrafo 5.5.1. e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.



Un robot a due gradi di libertà può soltanto posizionare gli oggetti in un piano. Per poterli anche orientare è necessario un terzo grado di libertà che permetta di ruotare le parti manipolate attorno ad un asse perpendicolare al piano di lavoro.

Mancando il terzo grado di libertà l'orientamento della terna di estremità del robot è fissata dalla posizione della sua origine  $O_2$ . Fissato il punto  $O_2$  infatti, la terna potrà assumere solo due diverse orientazioni, corrispondenti alle due possibili configurazioni della struttura. Questa affermazione è valida in generale, ma esiste la singolarità dell'origine  $O$  della terna base, punto nel quale, quando i due bracci hanno lunghezze uguali, la terna di estremità può essere arbitrariamente ruotata attorno ad un asse verticale.

Per quanto riguarda la soluzione della cinematica inversa e il relativo esempio numerico si può fare riferimento al par. 6.2.

**6.5.2. Robot cilindrico a tre gradi di libertà**

Si consideri il robot cilindrico di fig. 13 descritto nel paragrafo 5.5.2. e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

Un robot a tre gradi di libertà può soltanto posizionare degli oggetti nello spazio. Si tratta quindi, note le coordinate  $p_x, p_y, p_z$  di  $O_3$  (coincidenti con quelle della pinza), di calcolare tutti i corrispondenti valori delle variabili di giunto.

Aggiungendo a valle di questa struttura un polso sferico si guadagna la possibilità di orientare arbitrariamente gli oggetti senza modificare le coordinate di  $O_3$ . Questo permette di considerare il procedimento che verrà sviluppato, come la prima delle due tappe in cui può essere suddivisa la risoluzione della cinematica inversa di un robot a sei gradi di libertà.

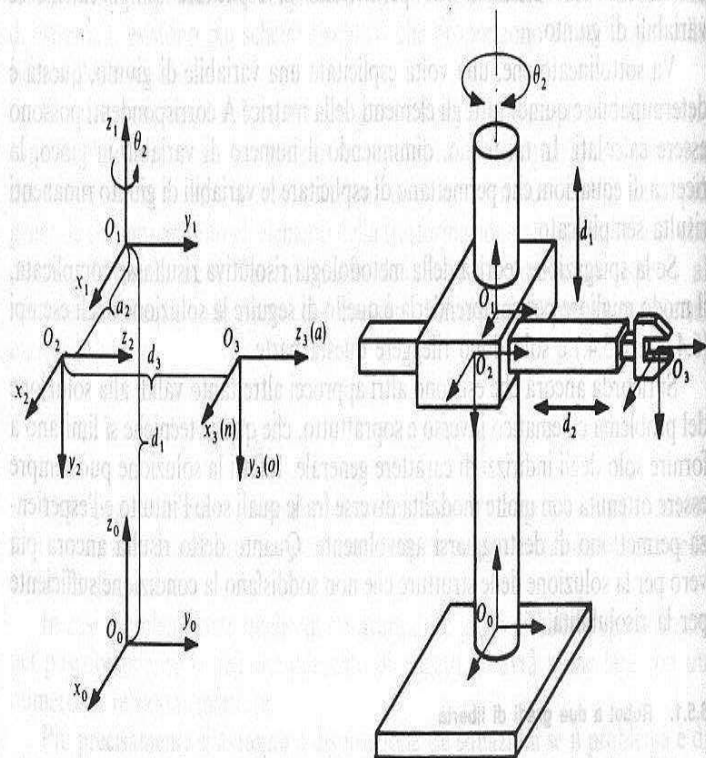


Fig. 13

Le tre equazioni che danno le coordinate di  $O_3$  sono:

$$\begin{aligned} p_x &= -d_3 S_2 + a_2 C_2 \\ p_y &= +d_3 C_2 + a_2 S_2 \\ p_z &= d_1 \end{aligned}$$

La relazione che fornisce il vettore della prima variabile di giunto è banale:

$$d_1 = p_z$$

Osservando la fig. 13 è d'altra parte evidente che la quota di  $O_3$  è determinata dal solo valore del primo giunto.

Elevando al quadrato e sommando tra loro le due relazioni non utilizzate si ha:

$$p_x^2 + p_y^2 = d_3^2 + a_2^2$$

da cui si ricava il valore della terza variabile di giunto:

$$d_3 = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 - a_2^2)}$$

Delle due possibili soluzioni solo quella positiva ha significato fisico in quanto, per come sono state disposte le terne di riferimento, la variabile  $d_3$  può assumere solo valori positivi.

Il procedimento applicato può essere pensato come l'applicazione del teorema di Pitagora per il calcolo del cateto del triangolo rettangolo rappresentato in fig. 14 nella quale sono evidenziate anche le altre grandezze coinvolte.

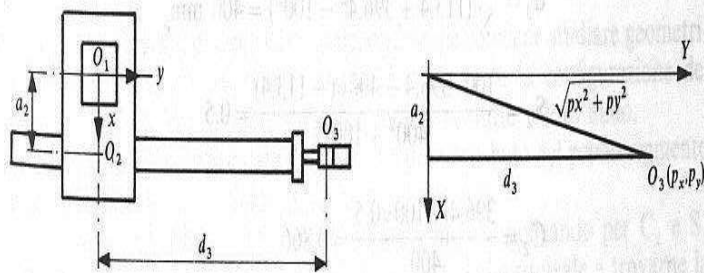


Fig. 14

Nota  $d_3$  si ricavano seno e coseno di  $\theta_2$  risolvendo il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} p_x &= -d_3 S_2 + a_2 C_2 \\ p_y &= d_3 C_2 + a_2 S_2 \end{aligned}$$

ottenendo

$$S_2 = \frac{a_2 p_y - d_3 p_x}{d_3^2 + a_2^2}$$

$$C_2 = \frac{p_y - a_2 S_2}{d_3}$$

I valori di  $\theta_2$  si ottengono applicando la funzione ATAN2:

$$\theta_2 = \text{ATAN2}(S_2, C_2)$$

**Esempio**

Dato il robot di fig. 13, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo le coordinate della pinza:

$$p_x = -113,4$$

$$p_y = 396,4$$

$$p_z = 500$$

e il valore del parametro  $a_2$ :

$$a_2 = 100 \text{ mm}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa individuate in precedenza si ha:

$$d_1 = 500 \text{ mm}$$

$$d_3 = \sqrt{(113,4 + 396,4^2 - 100^2)} = 400 \text{ mm}$$

$$S_2 = \frac{100 * 396,4 - 400 * (-113,4)}{400^2 + 100^2} = 0,5$$

$$C_2 = \frac{396,4 - 100 * 0,5}{400} = 0,866$$

$$\theta_2 = \text{ATAN2}(0,5, 0,866) = 30^\circ$$

**6.5.3. Robot antropomorfo a tre gradi di libertà**

Si consideri il robot antropomorfo di fig. 15 descritto nel paragrafo 5.5.3. e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

Si tratta di individuare quelle relazioni che, note le coordinate  $p_x, p_y, p_z$  della pinza, determinano tutti i corrispondenti valori delle variabili di giunto. Come

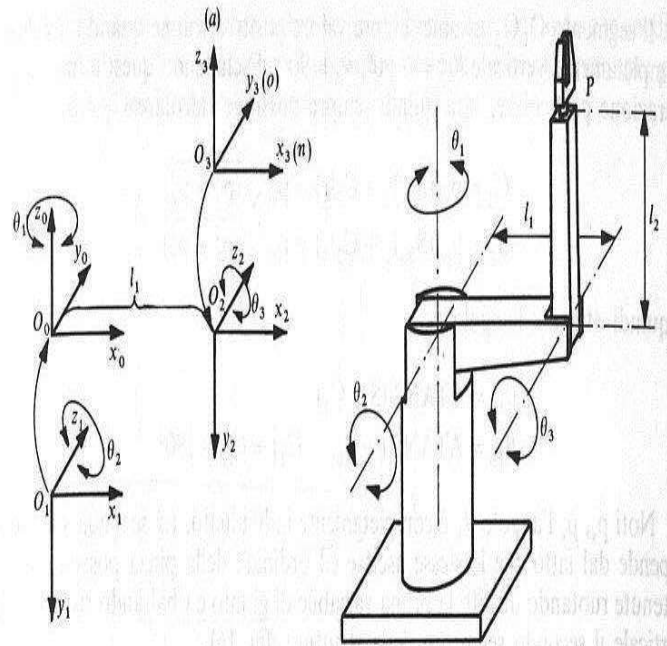


Fig. 15

quella cilindrica, anche la risoluzione di questa struttura può essere pensata come la prima delle due tappe in cui è possibile suddividere la risoluzione della cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà.

Nella modellizzazione della struttura l'origine della terza terna è stata fatta coincidere con quella della seconda per rispettare la convenzione di Denavit-Hartenberg e quindi le coordinate di  $O_3$  non coincideranno con quelle della pinza. Le tre equazioni che danno le coordinate  $p_x, p_y, p_z$  della pinza sono (cfr. par. 5.5.3.):

$$p_x = C_1(S_{23}l_2 + C_2l_1)$$

$$p_y = S_1(S_{23}l_2 + C_2l_1)$$

$$p_z = C_{23}l_2 - S_2l_1$$

Prima di tentare di esplicitare qualche variabile conviene studiare geometricamente la struttura osservando la fig. 15 che riporta la configurazione del robot quando le sue variabili di giunto assumono tutte valore nullo.

La quota della pinza è data dalla somma del contributo del primo segmento ( $S_2l_1$ ) e di quello del secondo ( $C_{23}l_2$ ).

L'ascissa e l'ordinata della pinza si ottengono moltiplicando per  $C_1$  e  $S_1$  l'estensione orizzontale del braccio ( $S_{23}l_2 + C_2l_1$ ), il che equivale a trovarne la posizione sugli assi  $X_0$  e  $Y_0$  rispettivamente.

L'estensione orizzontale del braccio può essere calcolata utilizzando il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo  $O_0O_2P$ :

$$\begin{aligned} S_{23}l_2 + C_2l_1 &= \sqrt{((O_0P)^2 + (PO_2)^2)} = \\ &= \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_z^2)} = \\ &= \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)} \end{aligned}$$



Il segmento  $O_0O_2$  assume sempre valore positivo tranne quando il robot è completamente verticale ( $\theta_2 = -90^\circ, \theta_3 = 90^\circ$ ). Escludendo quest'ultima configurazione particolare, sarà quindi sempre possibile calcolare  $C_1$  e  $S_1$ :

$$C_1 = p_x / (S_{23}l_2 + C_2l_1) = p_x / \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}$$

$$S_1 = p_y / (S_{23}l_2 + C_2l_1) = p_y / \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}$$

e quindi ottenere l'angolo  $\theta_1$ :

$$\theta_{1a} = \text{ATAN2}(S_1, C_1)$$

$$\theta_{1b} = \text{ATAN2}(-S_1, -C_1) = \theta_{1a} + 180^\circ$$

Noti  $p_x, p_y$ , l'angolo  $\theta_1$  è completamente individuato. La seconda soluzione dipende dal fatto che le stesse ascisse ed ordinate della pinza possono essere ottenute ruotando di  $180^\circ$  la prima variabile di giunto e ribaltando rispetto alla verticale il secondo segmento della struttura (fig. 16).

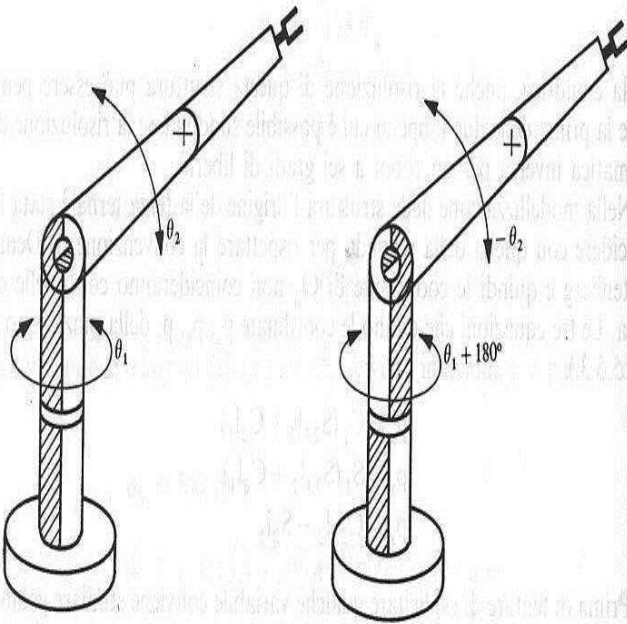


Fig. 16

Quando il robot è verticale il calcolo di  $\theta_1$ , impossibile attraverso il metodo in oggetto perché si annulla il denominatore delle formule che ne danno il seno e il coseno, non costituisce problema in quanto il suo valore non influisce sulle coordinate della pinza.

Per determinare i due rimanenti valori delle variabili di giunto si hanno ora a disposizione le due relazioni:

$$S_{23}l_2 + C_2l_1 = p_x / C_1$$

$$C_{23}l_2 - S_2l_1 = p_z$$

che presentano molte analogie con quelle che sono state utilizzate per risolvere

la cinematica inversa del robot a due gradi di libertà. Tale analogia è immediatamente comprensibile pensando di ragionare nel piano verticale passante per  $Z_0$  individuato dall'angolo di rotazione  $\theta_1$  (fig. 17).

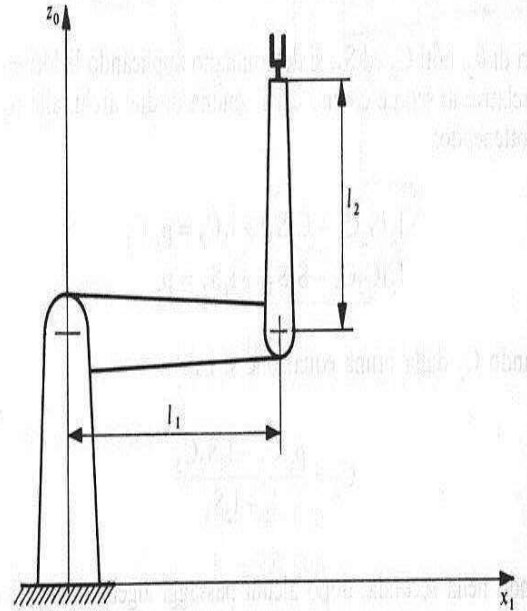


Fig. 17

Bisogna comunque sottolineare che la prima delle due relazioni è valida solo per  $C_1$  diverso da zero; quando  $C_1 = 0$  essa deve essere sostituita con la relazione equivalente:

$$S_{23}l_2 + C_2l_1 = p_y / S_1$$

Per isolare le due variabili di giunto conviene elevare al quadrato e sommare le due relazioni sopra riportate ottenendo:

$$l_2^2 + l_1^2 + 2l_1l_2(S_{23}C_2 - C_{23}S_2) = (p_x^2 / C_1^2 + p_z^2)$$

Applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, si ottiene:

$$l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2S_3 = (p_x^2 / C_1^2 + p_z^2)$$

da cui è possibile ricavare  $S_3$  e  $C_3$ :

$$S_3 = \frac{p_x^2 / C_1^2 + p_z^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

$$C_3 = +/- \sqrt{(1 - S_3^2)}$$

Noti  $S_3$  e  $C_3$  è possibile calcolare i due possibili valori dell'angolo  $\theta_3$ :

$$\theta_{3a} = \text{ATAN2}(S_3, C_3)$$

$$\theta_{3b} = \text{ATAN2}(S_3, -C_3) = 180^\circ - \theta_{3a}$$

I valori di  $\theta_2$ , noti  $C_3$  ed  $S_3$ , si determinano applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, alle equazioni di partenza ottenendo:

$$l_2(S_2C_3 + C_2S_3) + l_1C_2 = p_x/C_1$$

$$l_2(C_2C_3 - S_2S_3) + l_1S_2 = p_z$$

Ricavando  $C_2$  dalla prima equazione si ha:

$$C_2 = \frac{p_x/C_1 - l_2S_2C_3}{l_1 + l_2S_3}$$

e sostituendo nella seconda, dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene  $S_2$ :

$$S_2 = \frac{-p_z(l_1 + l_2S_3) + (p_x/C_1)l_2C_3}{l_2^2 + l_1^2 + 2l_1l_2S_3}$$

Sostituendo nell'equazione i due possibili valori di  $C_3$  e di  $C_1$ , oltre a quello di  $S_3$ , si ricavano i corrispondenti valori di  $S_2$ ; noti questi è possibile calcolare anche  $C_2$  e quindi risalire al valore di  $\theta_2$  utilizzando la funzione  $\text{ATAN2}(S_2, C_2)$ . Si noti che esistono quattro possibili valori di  $C_2$  ed  $S_2$ , a causa dei due possibili valori di  $C_1$  e  $C_3$ .

Riassumendo, le possibili soluzioni al problema cinematico inverso sono in genere quattro:

$\theta_1 = \theta_{1a}$	$\theta_2 = \theta_{2a}$	$\theta_3 = \theta_{3a}$
$\theta_1 = \theta_{1a}$	$\theta_2 = \theta_{2b}$	$\theta_3 = 180^\circ - \theta_{3a}$
$\theta_1 = \theta_{1a} + 180^\circ$	$\theta_2 = 180^\circ - \theta_{2b}$	$\theta_3 = \theta_{3a}$
$\theta_1 = \theta_{1a} + 180^\circ$	$\theta_2 = 180^\circ - \theta_{2b}$	$\theta_3 = 180^\circ - \theta_{3a}$

### Esempio

Dato il robot di fig. 18, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo le coordinate della pinza:

$$p_x = 1100$$

$$p_y = 0$$

$$p_z = 0$$

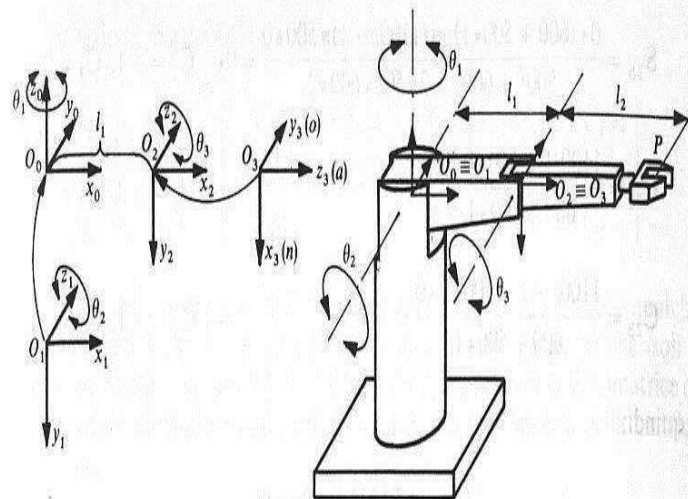


Fig. 18

e il valore dei due parametri:

$$l_1 = 600 \text{ mm}$$

$$l_2 = 500 \text{ mm}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$C_1 = 1100/\sqrt{(1100^2 + 0^2)} = 1$$

$$S_1 = 0/\sqrt{(1100^2 + 0^2)} = 0$$

e quindi

$$\theta_{1a} = \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ$$

$$\theta_{1b} = \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ$$

Per il calcolo della terza variabile di giunto si ha:

$$S_3 = \frac{1100/1^2 + 0^2 - 600^2 - 500^2}{2 \cdot 600 \cdot 500} = 1$$

$$C_3 = +/- 0$$

e quindi:

$$\theta_3 = \text{ATAN2}(1, 0) = 90^\circ$$

In questo esempio, dove il braccio del robot è completamente esteso orizzontalmente, le due soluzioni di gomito in alto e gomito in basso vengono a coincidere. Per il calcolo della seconda variabile di giunto si ha:

$$S_{2a} = \frac{0 \cdot (600 + 500 \cdot 1) - (1100/1) \cdot 500 \cdot 0}{500^2 + 600^2 + 2 \cdot 500 \cdot 600 \cdot 1} = 0 \quad \leftarrow C_1 = 1, C_3 = 0$$



$$S_{2b} = \frac{0*(600 + 500*1) - (1100/-1)*500*0}{500^2 + 600^2 + 2*500*600*1} = 0 \leftarrow C_1 = -1, C_3 = 0$$

$$C_{2a} = \frac{1100/1 - 500*0*0}{600 + 500*1} = 1 \leftarrow C_1 = 1, C_3 = 0$$

$$C_{2b} = \frac{1100/-1 - 500*0*0}{600 + 500*1} = -1 \leftarrow C_1 = -1, C_3 = 0$$

e quindi:

$$\theta_{2a} = \text{ATAN2}(1, 0) = 0^\circ$$

$$\theta_{2b} = \text{ATAN2}(1, 0) = 180^\circ$$

#### 6.5.4. Polso sferico

Si consideri il polso sferico di fig. 19 descritto nel paragrafo 5.5.4 e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

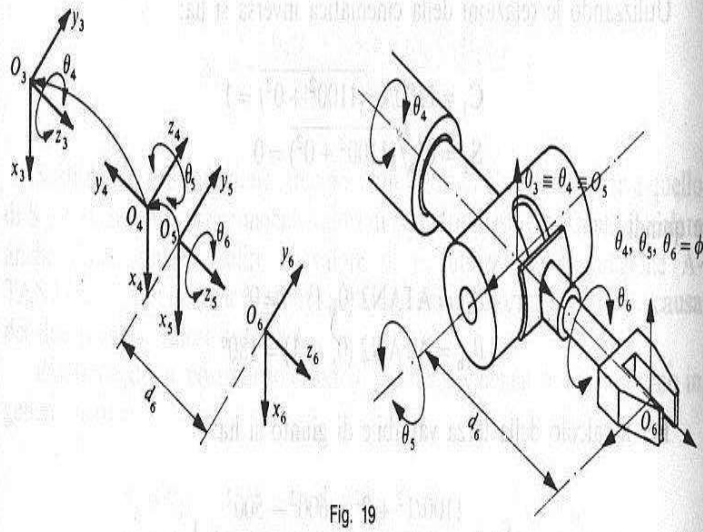


Fig. 19

Il polso sferico permette di orientare gli oggetti nello spazio e quindi, aggiungendogli a monte una struttura che sia in grado di posizionarlo si ottiene un robot completo a sei gradi di libertà. Questo permette di considerare il procedimento che verrà sviluppato come la seconda delle due tappe in cui è possibile suddividere la risoluzione della cinematica inversa di un robot completo.

Per determinare il valore assunto dalle variabili di giunto, bisognerà utilizzare i valori delle componenti dei versori della terna di estremità rispetto al riferimento base.

Nota la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità (la sesta) rispetto a quella di base (la terza), tali componenti sono contenute nella sottomatrice di orientazione.

L'equazione matriciale da utilizzare sarà quindi:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

Nessuna delle nove relazioni si presta per ricavare in modo esplicito qualche variabile di giunto; conviene quindi tentare una premoltiplicazione che isoli a sinistra, ad esempio, la variabile  $\theta_4$ . Limitandosi a considerare la sottomatrice di orientazione e premoltiplicando entrambi i membri per l'inversa della matrice  $A_4$  si ottiene:

$$\begin{bmatrix} C_4 n_x + S_4 n_y & C_4 o_x + S_4 o_y & C_4 a_x + S_4 a_y \\ -n_z & -o_z & -a_z \\ -S_4 n_x + C_4 n_y & -S_4 o_x + C_4 o_y & -S_4 a_x + C_4 a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5 C_6 & -C_5 C_6 & S_5 \\ S_5 C_6 & -S_5 S_6 & -C_5 \\ S_6 & C_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Uguagliando gli elementi [3, 3] delle due matrici sopra riportate si ottiene un'equazione in cui compare come unica variabile  $\theta_4$ :

$$-a_x S_4 + a_y C_4 = 0$$

da cui è facile ottenere i due possibili valori di  $\theta_4$  che la soddisfano:

$$\theta_{4a} = \text{ATAN2}(a_y, a_x)$$

$$\theta_{4b} = \text{ATAN2}(-a_y, -a_x) = \theta_{4a} + 180^\circ$$

La variabile  $\theta_5$  può essere ricavata uguagliando gli elementi [1, 3] e [2, 3] che danno rispettivamente il seno e il coseno di tale angolo:

$$S_5 = C_4 a_x + S_4 a_y$$

$$C_5 = a_y$$

Sostituendo i due possibili valori di  $\theta_4$  si ottengono in corrispondenza le due soluzioni:

$$\theta_{5a} = \text{ATAN2}(a_x C_4 + a_y S_4, a_y) \leftarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_{5b} = \text{ATAN2}(a_x C_4 + a_y S_4, a_y) = -\theta_{5a} \leftarrow \theta_{4b}$$

Con analogo procedimento è possibile determinare la variabile  $\theta_6$  eguagliando gli elementi [3, 1] e [3, 2] che danno rispettivamente il seno e il coseno di tale angolo:

$$S_6 = -S_4 n_x + C_4 n_y$$

$$C_6 = -S_4 o_x + C_4 o_y$$

Sostituendo i due possibili valori di  $\theta_4$  si ottengono in corrispondenza le due soluzioni:

$$\theta_{6a} = \text{ATAN2}(-S_4 n_x + C_4 n_y, -S_4 O_x + C_4 O_y) \leftarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_{6b} = \text{ATAN2}(-S_4 n_x + C_4 n_y, -S_4 O_x + C_4 O_y) = \theta_{6a} + 180^\circ \leftarrow \theta_{4b}$$

### Esempio

Dato il polso sferico di fig. 19, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo l'orientazione dei tre versori degli assi della terna associata alla pinza:

$$n_x = 1 \quad o_x = 0 \quad a_x = 0$$

$$n_y = 0 \quad o_y = 1 \quad a_y = 0$$

$$n_z = 0 \quad o_z = 0 \quad a_z = 1$$

Utilizzando le equazioni della cinematica inversa si ha:

$$\theta_4 = \text{ATAN2}(a_y, a_x) = \text{ATAN2}(0, 0) = \text{indeterminato}$$

In realtà ci si trova di fronte ad una situazione degenera del polso sferico riconoscibile dal fatto che gli assi  $z_3$  e  $z_6$  sono paralleli. Gli assi di rotazione del quarto e del sesto giunto sono paralleli e quindi il numero di gradi di libertà indipendenti del polso scende a due.

### Esempio

Dato il polso sferico di fig. 20, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo l'orientazione dei tre versori degli assi della terna associata alla pinza:

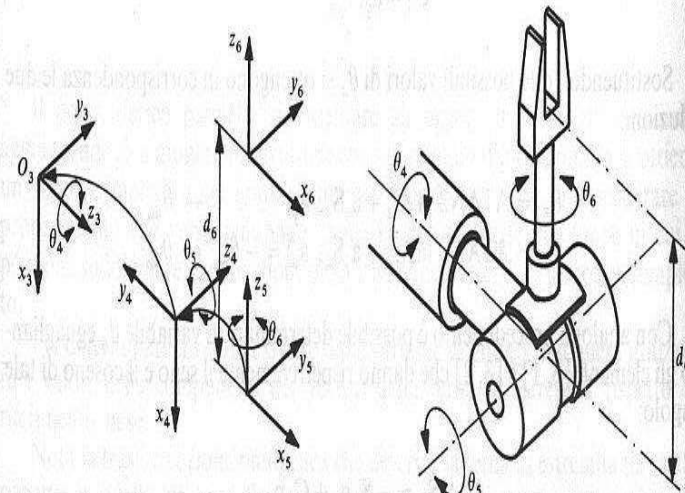


Fig. 20

$$n_x = 0 \quad o_x = 0 \quad a_x = -1$$

$$n_y = 0 \quad o_y = 1 \quad a_y = 0$$

$$n_z = 1 \quad o_z = 0 \quad a_z = 0$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$\theta_{4a} = \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ$$

$$\theta_{4b} = \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ$$

Sostituendo i due possibili valori di  $\theta_4$  nelle relazioni che danno  $\theta_5$  se ne ottengono i due possibili valori:

$$\theta_{5a} = \text{ATAN2}(1, 0) = 90^\circ \leftarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_{5b} = \text{ATAN2}(-1, 0) = -90^\circ \leftarrow \theta_{4b}$$

Analogamente si determinano i due possibili valori per la variabile  $\theta_6$ :

$$\theta_{6a} = \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ \leftarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_{6b} = \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ \leftarrow \theta_{4b}$$

### 6.5.5. Robot a sei gradi di libertà

Questo esempio è da ritenersi facoltativo ai fini del completamento del programma didattico e va considerato come uno strumento di approfondimento.

La risoluzione della cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà permette di padroneggiare il problema relativamente a quasi tutte le strutture dei robot industriali.

Come esempio si consideri il robot antropomorfo di fig. 21, descritto nel paragrafo 5.5.5.

La presenza del polso sferico consiglia di spezzare la soluzione della cinematica inversa nei suoi sottoproblemi di posizionamento ed orientazione.

Per quanto riguarda il posizionamento bisogna cercare un punto le cui coordinate soddisfino contemporaneamente le condizioni di dipendere solo dai primi tre giunti e di essere ricavabile dalla posizione e dall'orientamento della terna di estremo.

Nell'esempio proposto tale punto può essere individuato nell'origine  $O_4$  della quarta terna. Infatti la sua posizione è funzione solo dei primi tre giunti e le sue coordinate possono essere calcolate perché esso si trova sull'asse  $z_6$ , nella direzione negativa, alla distanza  $d_6$  da  $O_6$ .

Utilizzando la solita terminologia per dare la posizione e l'orientamento della terna di estremo, le coordinate di  $O_4$  saranno:

$$p_x^1 = p_x - a_x d_6$$

$$p_y^1 = p_y - a_y d_6$$

$$p_z^1 = p_z - a_z d_6$$



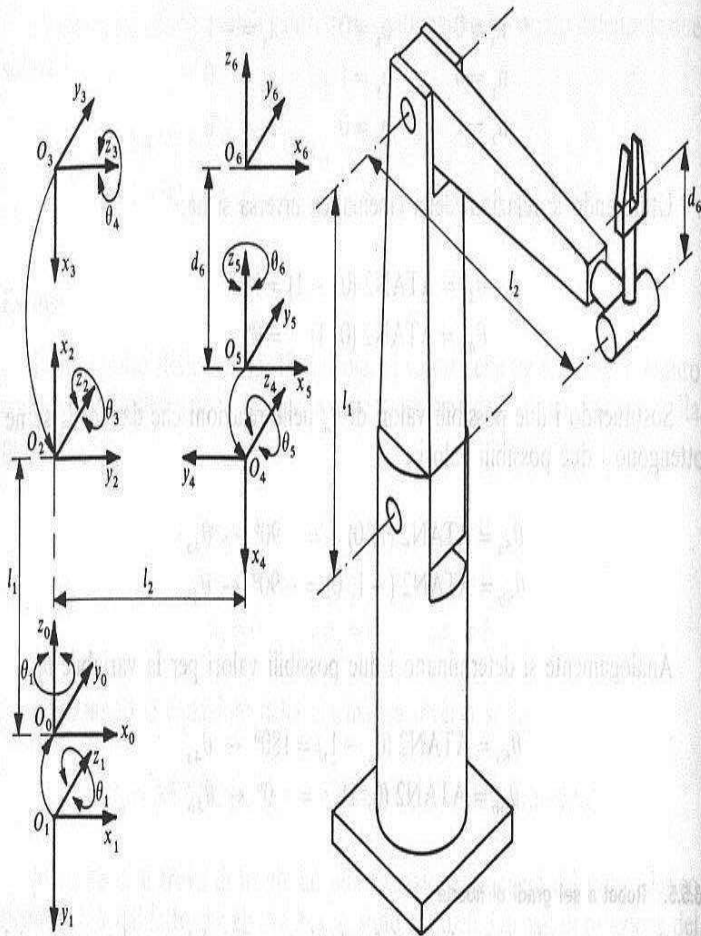


Fig. 21

Le relazioni che danno l'ascissa, l'ordinata e la quota di  $O_4$  sono contenute ordinatamente negli elementi (1, 4), (2, 4), (3, 4) della matrice  $A_1 A_2 A_3 A_4$  che dà la posizione e l'orientamento della quarta terna rispetto al riferimento.

Quindi le tre equazioni da cui esplicitare le relazioni della cinematica inversa per i primi tre giunti sono:

$$\begin{aligned} p_x^1 &= l_2 C_1 S_{23} + l_1 C_1 C_2 = C_1 (l_1 C_2 + l_2 S_{23}) \\ p_y^1 &= l_2 S_1 S_{23} + l_1 S_1 C_2 = S_1 (l_1 C_2 + l_2 S_{23}) \\ p_z^1 &= l_2 C_{23} - l_1 S_2 = -l_1 S_2 + l_2 C_{23} \end{aligned}$$

Trattandosi di relazioni accoppiate conviene cercare di esplicitare ad esempio  $\theta_1$  premoltiplicando l'equazione cinematica per l'inversa della trasformazione  $A_1$ :

$$(A_1^{-1})P\&O = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

Ricordando che le equazioni che interessano sono quelle che danno la posizione di  $O_4$ , sarà sufficiente calcolare la quarta colonna della matrice:

$$(A_1^{-1})P\&O = A_2 A_3 A_4$$

in quanto le trasformazioni descritte da  $A_5$  e  $A_6$  non la modificano.

Eseguendo le opportune moltiplicazioni si ottiene :

$$\begin{aligned} C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1 &= S_{23} l_2 + C_2 l_1 \\ -p_z^1 &= -C_{23} l_2 + l_1 S_2 \\ -S_1 p_x^1 + C_1 p_y^1 &= 0 \end{aligned}$$

L'ultima espressione permette di ricavare immediatamente  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned} \theta_{1a} &= \text{ATAN2}(p_y^1, p_x^1) \\ \theta_{1b} &= \text{ATAN2}(-p_y^1, -p_x^1) = \theta_{1a} + 180^\circ \end{aligned}$$

È buona norma cercare di verificare, quando è possibile, se i risultati ottenuti sono intuitivamente convincenti. In questo caso si è trovato che le coordinate  $p_x^1, p_y^1$  di  $O_4$ , risultato della sua proiezione nel piano  $X_0 Y_0$ , danno l'angolo di rotazione  $\theta_1$ , come era logico attendersi (fig. 21). Anche l'esistenza della doppia soluzione era prevedibile dopo quanto visto al par. 6.4.3. Per determinare  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , noto  $\theta_1$ , rimangono a disposizione le due relazioni:

$$\begin{aligned} S_{23} l_2 + C_2 l_1 &= C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1 \\ -C_{23} l_2 + S_2 l_1 &= -p_z^1 \end{aligned}$$

Queste due equazioni sono già state affrontate e risolte nel par. 6.4.3. relativo al robot antropomorfo a tre gradi di libertà e quindi ci si limiterà a riproporre i risultati precedentemente ricavati:

$$S_3 = \frac{(C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1)^2 + (p_z^1)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

$$C_3 = + / - \sqrt{(1 - S_3^2)}$$

Noti  $S_3$  e  $C_3$  si calcola l'angolo  $\theta_3$ :

$$\begin{aligned} \theta_{3a} &= \text{ATAN2}(S_3, C_3) \\ \theta_{3b} &= \text{ATAN2}(S_3, -C_3) = 180^\circ - \theta_{3a} \end{aligned}$$

Noti  $C_3$  e  $S_3$  è ora possibile determinare i valori di  $\theta_2$ :

$$S_2 = \frac{-p_z^1 (l_1 + l_2 S_3) + (C_1 p_x^1 + S_1 p_y^1) l_2 C_3}{l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 S_3}$$

$$C_2 = \frac{p_z^1 / C_1 - l_2 S_2 C_3}{l_1 + l_2 S_3}$$

Sostituendo nell'equazione che dà  $S_2$  i due possibili valori di  $C_3$  e di  $C_1$ , oltre a quello di  $S_3$ , si ricavano i corrispondenti valori di  $S_2$ ; noti questi è possibile

calcolare  $C_2$  e quindi risalire al valore di  $\theta_2$  utilizzando la funzione  $\text{ATAN2}(S_2, C_2)$ . Si noti che esistono quattro possibili valori di  $C_2$  ed  $S_2$ , a causa dei due possibili di  $C_1$  e  $C_3$ .

Individuati i valori di  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  le matrici  $A_1, A_2, A_3$  sono da ritenersi note e conviene portarle al primo membro dell'equazione cinematica:

$$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}P \& O = A_4 * A_5 * A_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} n'_x & o'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & o'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & o'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mentre il termine a sinistra è noto, quello a destra è funzione di  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ . Quest'ultimo coincide con la trasformazione omogenea che descrive la cinematica diretta del polso sferico per quanto riguarda la sottomatrice di orientazione.

Pertanto la soluzione del problema sarà del tutto simile a quella svolta nel paragrafo precedente. Le relazioni che si ottengono sono:

$$\theta_{4a} = \text{ATAN2}(a'_y, a'_x)$$

$$\theta_{4b} = \text{ATAN2}(-a'_y, -a'_x) = \theta_{4a} + 180^\circ$$

$$\theta_5 = \text{ATAN2}(a'_x C_4 + a'_y S_4, a'_z) \leftarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_5 = \text{ATAN2}(a'_x C_4 + a'_y S_4, a'_z) = -\theta_5 \leftarrow \theta_{4b}$$

$$\theta_6 = \text{ATAN2}(-n'_x S_4 + n'_y C_4, -O'_x S_4 + O'_y C_4) \leftarrow \theta_{4a}$$

$$\theta_6 = \text{ATAN2}(-n'_x S_4 + n'_y C_4, -O'_x S_4 + O'_y C_4) = \theta_6 + 180^\circ \leftarrow \theta_{4b}$$

### Esempio

Dato il robot di fig. 21, calcolare i valori delle sei variabili di giunto conoscendo la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto al riferimento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e il valore dei tre parametri:

$$l_1 = 600 \text{ mm}$$

$$l_2 = 500 \text{ mm}$$

$$d_6 = 150 \text{ mm}$$

Per poter utilizzare le relazioni della cinematica inversa bisogna conoscere le coordinate di  $O_4$ :

$$p'_x = 500 - 0 * 150 = 500$$

$$p'_y = 0 - 0 * 150 = 0$$

$$p'_z = 750 - 1 * 150 = 600$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$$\theta_{1a} = \text{ATAN2}(0, 500) = 0^\circ$$

$$\theta_{1b} = \text{ATAN2}(0, -500) = 180^\circ$$

Per il calcolo della terza variabile di giunto si ha:

$$S_3 = \frac{(1 * 500 + 0 * 0)^2 + 600^2 - 600^2 - 500^2}{2 * 600 * 500} = 0$$

$$C_3 = + / - 1$$

e quindi:

$$\theta_{3a} = \text{ATAN2}(0, 1) = 0^\circ$$

$$\theta_{3b} = \text{ATAN2}(0, -1) = 180^\circ$$

Per il calcolo della seconda variabile di giunto si ha:

$$S_2 = \frac{-600 * (600 + 500 * 0) + (1 * 500 + 0 * 0) * 500 * 1}{500^2 + 600^2 + 2 * 500 * 600 * 0} = -0,1803 \leftarrow \theta_{1a}, \theta_{3a}$$

$$C_2 = \frac{500/1 - 500 * -0,1803 * 1}{600 + 500 * 0} = 0,9836$$

$$S_2 = -1 \leftarrow \theta_{1a}, \theta_{3b}$$

$$C_2 = 0$$

$$S_2 = -1 \leftarrow \theta_{1b}, \theta_{3a}$$

$$C_2 = 0$$

$$S_2 = -0,1803 \leftarrow \theta_{1b}, \theta_{3b}$$

$$C_2 = -0,9836$$

e quindi:

$$\theta_{2a} = \text{ATAN2}(-0,1803, 0,9836) = -10,3874^\circ$$

$$\theta_{2b} = \text{ATAN2}(-1, 0) = -90^\circ$$

$$\theta_{2c} = \text{ATAN2}(-1, 0) = -90^\circ$$

$$\theta_{2d} = \text{ATAN2}(-0,1803, -0,9836) = -169,6126^\circ$$



Le quattro soluzioni, relativamente ai primi tre giunti sono pertanto:

$$\begin{array}{lll} \theta_{1a} = 0^\circ & \theta_{2a} = -10,3874^\circ & \theta_{3a} = 0^\circ \\ \theta_{1a} = 0^\circ & \theta_{2b} = -90^\circ & \theta_{3b} = 180^\circ \\ \theta_{1b} = 180^\circ & \theta_{2c} = -90^\circ & \theta_{3a} = 0^\circ \\ \theta_{1b} = 180^\circ & \theta_{2d} = -169,6126^\circ & \theta_{3b} = 180^\circ \end{array}$$

Sostituendo i valori ricavati per le prime tre variabili nella relazione:

$$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}P \& O = A_4A_5A_6$$

si ricava la trasformazione omogenea che descrive la posizione e l'orientamento della stessa terna rispetto alla terza.

Considerando solo la sottomatrice di orientazione sarà possibile determinare i valori delle ultime tre variabili di giunto procedendo in modo analogo a quanto fatto per il polso sferico (par. 6.5.4.).

## 6.6. Generalità sul controllo delle traiettorie

*La traiettoria di un robot è la linea descritta nello spazio dalla sua estremità funzionale, nel movimento dalla configurazione iniziale a quella finale.*

Il robot è un sistema meccanico i cui movimenti possono essere liberamente programmati e quindi il controllo dei suoi movimenti è di importanza fondamentale.

Prima di imporre al robot un qualsiasi tipo di movimento è necessario assicurarsi che, durante tale movimento, nessuna delle sue parti entri in contatto con gli oggetti che lo circondano (vincolo degli oggetti).

Si tratta poi di definire quali movimenti dell'estremità funzionale servono per realizzare il compito a cui il robot è dedicato. Nei casi più semplici interessa che il robot modifichi la configurazione della sua struttura in modo da cambiare la posizione e l'orientamento della sua estremità funzionale da una condizione iniziale (ex. coordinate di presa di una parte) ad una finale (ex. coordinate di deposito della stessa). In altre parole interessano il punto di partenza e di arrivo ma non la traiettoria con cui essi vengono collegati (vincolo delle posizioni iniziali e finali).

Nella maggioranza dei casi è invece necessario controllare anche la traiettoria descritta dall'estremità del robot (vincolo del percorso).

Il controllo dei movimenti di un robot può essere definito in due fasi: nella prima si cerca una traiettoria che soddisfi il vincolo degli ostacoli e nella seconda ne viene controllata l'esecuzione.

Per quanto riguarda la prima fase è sufficiente dire che le traiettorie vengono in genere studiate sul campo e quindi risulta relativamente semplice fare in modo che siano libere da collisioni. Va tuttavia sottolineato che si cominciano ad utilizzare dei programmi di simulazione che permettono di pianificare le traiettorie. I vantaggi di un tale approccio sono notevoli in quanto, potendo

lavorare in simulazione, si possono facilmente provare più traiettorie e diverse organizzazioni della stazione robotizzata in modo da migliorarne le prestazioni.

Imposti i vincoli degli ostacoli, rimane il problema di controllarne la corretta esecuzione, che può essere realizzato sia a livello dei giunti che nello spazio cartesiano.

### 6.6.1. Controllo del movimento a livello dei giunti

*Quando interessano soltanto le posizioni di inizio e fine della traiettoria si hanno a disposizione due insiemi di variabili di giunto che rappresentano la configurazione di partenza e quella finale della struttura. Il controllo si limita ad imporre ad ogni giunto uno spostamento che porti il valore della sua variabile da quello di partenza a quello finale.*

Poiché in generale gli spostamenti dei giunti saranno di entità diversa l'uno dall'altro il controllo si preoccupa anche di programmare accelerazioni e velocità di ognuno di essi in modo che tutti terminino il loro movimento contemporaneamente in modo da ottenere un «moto coordinato».

Questo controllo si presenta molto semplice ma l'impossibilità di imporre una determinata traiettoria al robot lo rende praticamente inutilizzabile per molte applicazioni industriali.

*Desiderando controllare completamente la traiettoria, il movimento del robot deve essere pianificato dando, in funzione del tempo, una legge che descriva gli spostamenti di ogni giunto e i valori iniziali e finali delle loro variabili.*

*La traiettoria viene realizzata con una sequenza di movimenti coordinati tra una successione di punti intermedi così ravvicinati da garantire che gli spostamenti dalla legge desiderata risultino contenuti.*

L'algoritmo di controllo che genera la sequenza dei punti intermedi si presenta relativamente semplice. Innanzitutto viene definito un intervallo di tempo, detto di campionamento, che intercorre tra un punto e il successivo. Il controllo sarà quindi un algoritmo ciclico che, ogni volta che trascorre un intervallo di campionamento, verifica dapprima se il robot ha raggiunto la posizione finale e, in caso negativo, calcola un nuovo punto intermedio sfruttando le funzioni che definiscono la traiettoria.

Affinché questo algoritmo di controllo risulti efficiente è necessario che le funzioni che descrivono gli spostamenti dei giunti permettano di calcolare agevolmente e in modo deterministico, dato un generico  $t$ , il valore della variabile di giunto. Questo significa ad esempio che sono da evitare quelle funzioni che forniscono il valore della variabile di un giunto un modo iterativo o che ne fanno corrispondere più di uno ad uno stesso valore di  $t$ . Inoltre è fondamentale che le funzioni siano continue per evitare che tra un intervallo di campionamento e il successivo ci siano variazioni troppo grandi che non potrebbero essere realizzate dagli attuatori del robot. Infatti le accelerazioni raggiungibili dai giunti sono limitate e quindi, data la velocità iniziale, lo spazio percorribile nell'intervallo di campionamento non potrà essere arbitrariamente grande. Le relazioni che vincolano i possibili spostamenti dei giunti del robot

alle prestazioni dei loro attuatori (coppia ...) e alle caratteristiche della struttura (masse, inerzie, ...) sono detti «vincoli dinamici».

Il principale vantaggio del controllo dei movimenti a livello dei giunti è la semplicità in quanto la traiettoria è stabilita fornendo direttamente le leggi di variazione delle variabili che devono essere controllate. Questo fatto garantisce inoltre che il peso computazionale per la pianificazione della traiettoria è minimo e quindi può essere eseguito in tempo reale.

#### 6.6.2 Controllo dei movimenti nello spazio cartesiano

*La traiettoria e i suoi punti iniziali e finali vengono descritti al controllo in riferimento allo spazio cartesiano.*

Questa modalità di controllo è di gran lunga più diffusa dell'altra perché è più semplice definire delle traiettorie corrette nello spazio cartesiano piuttosto che in quello dei giunti. D'altra parte, qualora si rendesse necessario conoscere i valori delle variabili di giunto corrispondenti ad una certa posizione ed orientamento della estremità, basterà richiamare la routine di soluzione della cinematica inversa.

*Quando interessano le posizioni di inizio e fine della traiettoria il controllo conoscerà soltanto la posizione e l'orientamento della terna di estremità corrispondenti alla configurazione di partenza e a quella finale della struttura.*

In questo caso il controllo dapprima calcola i valori delle variabili di giunto corrispondenti alle posizioni iniziale e finale della terna di estremità e quindi impone ad ogni giunto lo spostamento che gli compete. Poiché in generale gli spostamenti dei giunti saranno di entità diversa l'uno dall'altro il controllo si preoccupa anche di programmare accelerazioni e velocità di ognuno di essi in modo che tutti terminino il loro movimento contemporaneamente così da realizzare un moto coordinato.

Tale semplice controllo è tuttavia quasi sempre non utilizzabile in applicazioni pratiche in quanto molto spesso è indispensabile poter vincolare il robot a seguire un certo percorso.

*Desiderando controllare completamente la traiettoria, il movimento del robot deve essere pianificato fissando, in funzione del tempo, una legge che descriva la posizione e l'orientamento della terna di estremità, oltre a specificare le condizioni di partenza e di arrivo.*

Anche in questo caso la traiettoria viene realizzata con una sequenza di movimenti coordinati tra una successione di punti intermedi così ravvicinati, che gli scostamenti dalla legge desiderata risultano contenuti. L'algoritmo di controllo che genera la sequenza dei punti intermedi si presenta più complesso rispetto a quello utilizzato lavorando a livello dei giunti. Infatti, ad ogni intervallo di controllo, oltre a determinare la posizione e l'orientamento della terna di estremità esso deve convertire le posizioni cartesiane nei corrispondenti valori delle variabili di giunto risolvendo un problema di cinematica inversa. Questo aumento del carico computazionale obbliga ad adottare elaboratori più veloci e costosi per mantenere immutati gli intervalli di controllo.

Gli algoritmi di controllo possono essere concettualmente divisi in quelli che operano a livello della terna di estremità e quelli che lavorano a livello dei giunti.

Lavorando al livello della terna di estremità il controllo opera quasi sempre nello spazio cartesiano: la traiettoria è campionata a intervalli di tempo costante e il segnale di errore inviato agli attuatori per comandare i movimenti è calcolato in base alla differenza, espressa in coordinate cartesiane, tra la posizione da raggiungere e quella effettivamente occupata dalla terna di estremità.

I controlli di movimenti nello spazio cartesiano che lavorano a livello dei giunti approssimano la traiettoria della terna di estremità con delle funzioni che danno al variare del tempo i valori ideali delle variabili di giunto. Il segnale di errore da inviare agli attuatori è in questo caso proporzionale alla differenza tra la posizione teorica e quella reale, entrambe espresse in coordinate dei giunti.

Tra i due approcci quello cartesiano è da preferirsi in quanto si presenta di più chiara comprensione e permette precisioni maggiori non dovendo essere introdotte approssimazioni.

Tuttavia, dal momento che per ora è impossibile ottenere una misura diretta della posizione e dell'orientamento della terna di estremità, sarà necessario eseguire praticamente in tempo reale delle trasformazioni tra lo spazio cartesiano e quello dei giunti. Si ricordi inoltre che questa conversione non è univoca e quindi vanno calcolate più soluzioni tra cui scegliere quella da adottare. La scelta viene in genere fatta in base al criterio dell'adiacenza, si sceglie cioè, tra tutte le soluzioni possibili, quella che comporta i minori movimenti per i giunti.

Vale la pena di sottolineare che ogni giunto dovrà avere un suo peso relativo in quanto è palesemente diverso, ad esempio, ruotare di un certo angolo uno dei giunti del polso rispetto a muovere della stessa quantità uno di quelli principali. Questo carico computazionale può costringere ad allungare gli intervalli di controllo diminuendo l'accuratezza con cui viene eseguita la traiettoria richiesta. Inoltre, nel caso in cui si debba tener conto di vincoli dinamici, si dovrebbero combinare vincoli a livello cartesiano (la traiettoria) e a livello dei giunti (quelli dinamici).

La somma di questi svantaggi fa sì che nella pratica sia più diffuso il secondo che si presenta computazionalmente più veloce e in grado di lavorare semplicemente con i vincoli dinamici.

L'unico vero svantaggio è la perdita di precisione dovuta agli errori introdotti dalle funzioni approssimanti che, qualora fossero molto complesse, aumenterebbero i tempi di elaborazione e riducendo quindi il vantaggio più significativo di questo approccio.