12. Matrici Sistemi Trasformazioni

12.0 Matrici: definizioni e proprietà.

Definizione: Matrice
Si dice Matrice reale A del tipo m x n l'insieme di m·n numeri reali disposti su m righe ed n colonne come segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Le scritture $[a_{ik}]$, (a_{ik}), $\|a_{ik}\|$ con $1 \le i \le m$ e $1 \le k \le n$ sono modi per indicare una matrice di m righe e n colonne.

Definizione: Matrice rettangolare
Una matrice è rettangolare se $m \neq n$;

Definizione: Matrice quadrata
Una matrice è quadrata se m = n;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice NULLA
Una matrice A si dice nulla se ha tutti gli elementi uguali a 0. La si indica sinteticamente anche con A=0

Definizione: Matrici dello stesso tipo
Due matrici A e B si dicono dello stesso tipo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne.
In due matrici dello stesso tipo gli elementi di ugual posto si dicono corrispondenti.

Definizione: Matrici EGUALI
Due matrici A e B si dicono eguali se hanno lo stesso numero di righe e di colonne e tutte le componenti corrispondenti identiche.

La relazione di eguaglianza tra matrici gode delle proprietà Riflessiva A = A, Simmetrica se A = B segue B = A e Transitiva se A = B e B = C segue che A = C.

Definizione: Matrice RIGA e Matrice COLONNA
Si dice matrice (o vettore) riga una matrice con un'unica riga, cioè una matrice del tipo 1 x n.
Si dice matrice (o vettore) colonna una matrice con un'unica colonna, cioè una matrice del tipo m x 1.

Definizione: Diagonale principale e secondaria, elementi coniugati di una matrice quadrata, matrice simmetrica
In una matrice quadrata

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gli elementi a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} costituiscono la **diagonale principale**, gli elementi a_{1n}, …, a_{n1} quella **secondaria.**
Gli elementi a_{ik} e a_{ki}, con gli stessi indici ma in ordine inverso si dicono **coniugati** e i loro posti sono simmetrici rispetto alla diagonale principale.
Se gli elementi coniugati sono fra loro uguali, cioè se $a_{ik} = a_{ki}$, allora la matrice si dice **simmetrica**.

Definizione: Matrice diagonale
Si dice matrice diagonale una matrice quadrata che ha tutti i termini nulli tranne quelli della diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice triangolare superiore (inferiore)
Si dice matrice triangolare superiore (inferiore) una matrice quadrata che ha nulli i termini $a_{ik} =0$ se $i>k$ ($a_{ik} = 0$ se $i<k$)

Mat. Triangolare superiore $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$ Mat. Triangolare inferiore $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{nn} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$

Definizione: Matrice Identità (o Unità)
La matrice Identità è una matrice quadrata del tipo n x n con tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti i restanti nulli.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice Trasposta

Si dice Matrice trasposta di A del tipo m x n e la si indica con A_T la matrice ottenuta dalla A trasformando ordinatamente le righe di A in colonne di A_T che sarà del tipo n x m

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A_T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definizione: Moltiplicazione di una matrice per uno scalare

Data la matrice A di tipo m x n e un numero reale *r* si chiama prodotto della matrice A per lo scalare *r* la matrice di tipo m x n ottenuta moltiplicando per il reale *r* gli elementi della matrici A.

$$A \cdot r = r \cdot A = [\mathrm{r} \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{ik}}]$$

Definizione: Addizione di matrici

La matrice somma di due matrici A e B dello stesso tipo m x n é una matrice C del tipo m x n ottenuta sommando gli elementi corrispondenti delle due matrici A e B.

Siano A e B due matrici dello stesso tipo m x n e siano *r* e *s* due numeri reali valgono le seguenti proprietà:

1. $r(sA) = (rs)A$
2. $r(A + B) = rA + rB$
3. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$
4. $(r + s)A = rA + sA$
5. $1 \cdot A = A$
6. $(rA)_T = rA_T$

12.1 Proprietà delle matrici rispetto all'addizione

L'insieme delle matrici del tipo m x n formano un **gruppo commutativo** rispetto all'operazione di addizione. Infatti:

1. La somma è una legge di composizione interna;
2. E' associativa $(A + B)+C = A + (B + C)$
3. E' commutativa $A + B = B + A$
4. Ha per elemento neutro la matrice Nulla $A + 0 = 0 + A = A$
5. Ogni matrice è dotata di un'opposta ottenuta da A cambiando il segno di tutte le componenti e si indica con (–A) tale che $A + (-A) = 0$

Vale inoltre la legge di **semplificazione**: se $A + C = B + C$ segue che $A = B$

Definizione: Moltiplicazione tra matrici

La moltiplicazione tra le matrici A e B è possibile solo se il numero di colonne della prima matrice coincide con il numero di righe della seconda. In altri termini per poter moltiplicare A per B A deve avere dimensione m x p e B p x n.

Il prodotto è la matrice C del tipo m x n ottenuta moltiplicando i termini di ogni riga di A con i corrispondenti termini delle colonne di B e sommando i prodotti ottenuti.

Per esempio

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}) & (a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}) & (a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}) \\ (a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}) & (a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}) & (a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}) \end{bmatrix}$$

12.2 Proprietà delle matrici rispetto alla moltiplicazione

Nell'insieme delle matrici la moltiplicazione

1. è una legge di composizione interna; se la prima matrice è del tipo m x p e la seconda del tipo p x n, la matrice prodotto è del tipo m x n;
2. è associativa (A * B) * C = A * (B * C)

INOLTRE

- NON vale la proprietà COMMUTATIVA $A * B \neq B * A$

(evidente, se di ordini m x p e p x n con m diverso da n, ma non vale anche se le matrici sono n x n)

- **NON vale la legge di annullamento** del PRODOTTO
  $A * B = 0 \ \ non \ \ segue \ A = 0 \vee B = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq 0 \quad A * B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

- **NON vale la legge di semplificazione**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A * B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = A * C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Vale la proprietà $(A * B)_T = B_T * A_T$
- Vale la proprietà distributiva a sinistra del moltiplicazione rispetto all'addizione
  A*(B +C)=A*B+A*C
- Vale la proprietà distributiva a destra del moltiplicazione rispetto all'addizione
  (B + C)*A=B*A+C*A

12.3 Determinante di una Matrice quadrata

Definizione: Determinante di una matrice quadrata
Ad ogni matrice quadrata è associato un numero che si chiama determinante. Il determinante della matrice A si indica con $|A|$.

Definizione: Minore complementare di un elemento di una matrice quadrata
Si dice minore complementare di un elemento a_{ik} di una matrice quadrata A di ordine n e lo si indica con M_{ik} il determinante della matrice quadrata di ordine n-1 che si ottiene dalla A eliminando tutti gli elementi della riga e della colonna a cui appartiene a_{ik} .

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{il minore compl. di } a_{11} \text{ è} \quad |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{il minore compl. di } a_{12} \text{ è} \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Definizione: Complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata
Si dice complemento algebrico di un elemento a_{ik} di una matrice quadrata A di ordine n e lo si indica con A_{ik} il minore complementare M_{ik} preceduto dal segno positivo se i+k è pari, negativo se dispari.

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}.M_{ik}$$

Il calcolo del determinante può essere definito ricorsivamente nel seguente modo:

- Il determinante di una matrice A del tipo 1 x 1 è il valore della sua unica componente e si indica con $|A| = a_{ik}$
- Il determinante di una matrice A del tipo n x n lo si ottiene come somma dei prodotti di ciascun elemento di una linea qualsiasi, riga o colonna, per il rispettivo complemento algebrico.

Il **determinante** di una **matrice diagonale** o di una **matrice triangolare** è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.

Definizione: Matrice SINGOLARE
Una matrice con determinante nullo si dice singolare o degenere; viceversa una matrice con determinante non nullo si dice non singolare o regolare.

12.3.1 PROPRIETÀ dei determinanti

1. Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante.

2. Se una riga (o una colonna) di una matrice quadrata ha tutti gli elementi nulli il determinante è 0.

3. Scambiando fra loro due righe (o due colonne) il determinante cambia di segno

4. Se in una matrice quadrata due righe o due colonne hanno gli elementi proporzionali il determinante è nullo.

5. Se si moltiplicano gli elementi di una riga o una colonna per una costante reale k, il determinante della matrice resta moltiplicato per k.

6. Il determinante di una matrice non cambia se ad una linea si aggiunge una linea parallela moltiplicata per un numero k.

7. Sia B una matrice dello stesso ordine di A, il determinante di A*B è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici A e B.

8. La somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) per i complementi algebrici di una riga (colonna) diversa vale zero (teorema di Laplace).

9. Se gli elementi di una riga (colonna) sono la somma di due (o più) addendi, il determinante della matrice è uguale alla somma di due (o più) determinanti, che si ottengono dal determinante dato conservando le altre righe (colonne) e sostituendo a quella binomia (polinomia) una volta i primi addendi, un'altra i secondi addendi (e così via).

Es.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12.3.2 Matrici quadrate con determinante non nullo

L'insieme delle matrici quadrate del tipo n x n formano un **gruppo non commutativo** rispetto all'operazione di moltiplicazione:

1. il prodotto di due matrici del tipo n x n è una legge di composizione interna;
2. E' associativa (A*B)*C = A*(B*C)
3. Ha per elemento neutro la matrice Identità A*I = I*A=A
4. Ogni matrice con determinante non nullo è dotata di inversa che si indica con A^{-1} tale che
$$A^{-1}*A=A*A^{-1}=I$$

Inoltre

- NON vale la proprietà COMMUTATIVA
- NON vale la legge di annullamento del PRODOTTO
- **Se il determinante di C non è nullo** vale la legge di **semplificazione**:
$$A*C = B*C \text{ segue che } A=B$$
Infatti C^{-1} esiste, quindi $A*C*C^{-1}=B*C*C^{-1}$ da cui A*I=B*I da cui A=B
- Vale la proprietà $(A*B)^{-1}=B^{-1}*A^{-1}$
- Vale la proprietà distributiva a sinistra della moltiplicazione rispetto all'addizione A*(B+C)=A*B+A*C
- Vale la proprietà distributiva a destra della moltiplicazione rispetto all'addizione (B+C)*A=B*A+C*A

Matrice inversa

Definizione: INVERSA di una matrice quadrata

Si dice **inversa** di una matrice quadrata *A* di ordine *n* la matrice quadrata di ordine *n*, se esiste, A^{-1} che moltiplicata a destra e a sinistra per la matrice data dà la matrice identità. Cioè:

$$A*A^{-1}= A^{-1}*A=I.$$

Teorema: di esistenza dell'inversa di una matrice quadrata.

Si dimostra che

- **esiste l'inversa solo delle matrici non singolari**
- l'**inversa** di una matrice quadrata, se esiste, **è unica**;

Data la matrice

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ con } D \neq 0 \text{ l'inversa è data da } A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots\dots & & & \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}$$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}

Infatti, per la proprietà 8 dei determinanti (Teorema di Laplace), si ha:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Regola per ottenere la matrice inversa della matrice *A* avente per determinante *D*.

1. Si determina la trasposta di *A*
2. Si sostituisce ciascun elemento con il rispettivo complemento algebrico diviso per *D*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}$$

Oppure

1. Si sostituisce ciascun elemento di *A* con il rispettivo complemento algebrico diviso per *D* .
2. Si determina la trasposta della matrice ottenuta.

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{12}}{D} & \dots & \frac{A_{1n}}{D} \\ \frac{A_{21}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{2n}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{D} & \frac{A_{2n}2}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}$$

Definizione: Matrice aggiunta

Si dice matrice aggiunta della quadrata di ordine *n A* e si indica con A^+

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Pertanto $A^{-1} = \frac{A^+}{D}$ e $A^+ = D \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot D$

Inoltre $A \cdot A^+ = A \cdot (A^{-1} \cdot D) = (A \cdot A^{-1}) \cdot D = D \cdot I$

Esempio:

A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $|A| = 3$ $[\alpha_{ik}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{-1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $A^{-1}=[\alpha_{ki}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Verificare eseguendo $A*A^{-1}=I$